

# Chapitre 5

## Fonction de transfert des systèmes discrets et échantillonnés

- 5.1. Fonction de transfert des systèmes discrets
  - 5.1.1. Fonction de transfert et équation récurrente
  - 5.1.2. Réponse impulsionnelle d'un filtre numérique
  - 5.1.3. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle
- 5.2. Transmittance échantillonnée ou « pulsée »
  - 5.2.1. Transmission d'un signal échantillonné par un système continu
  - 5.2.2. Association de transmittances en série
  - 5.2.3. Système échantillonné bouclé
- 5.3. Association de systèmes échantillonnés et discrets
  - 5.3.1. Chaîne de commande classique
  - 5.3.2. Prise en compte des retards purs
  - 5.3.3. Signal de sortie entre les instants d'échantillonnage
- 5.4. Forme générale des transmittances
  - 5.4.1. Transmittance physiquement réalisable
  - 5.4.2. Forme standard de la transmittance
  - 5.4.3. Modèle numérique du premier ordre
  - 5.4.4. Modèle numérique du deuxième ordre
- 5.5. Modèle numérique de l'opérateur «  $p$  »
- 5.6. Intégration et dérivation numérique
  - 5.6.1. Intégrateur numérique
  - 5.6.2. Dérivateur numérique
  - 5.6.3. Dérivateur filtré
  - 5.6.4. Correcteur P.I.D. programmé

La fonction de transfert d'un système exprime la relation existant entre son signal de sortie et son signal d'entrée. Cette notion a été développée à l'occasion de l'étude des systèmes linéaires continus. Dans ce chapitre nous définirons la transmittance des systèmes discrets et celle des systèmes échantillonnés (ou pulsés).

Un système discret linéaire reçoit une séquence d'entrée  $\{e_n\}$  qu'il traite selon un algorithme correspondant à une équation récurrente, pour fournir une séquence de sortie  $\{s_n\}$ .

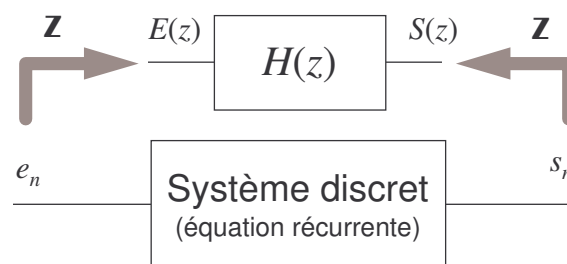


Figure 1 : Fonction de transfert d'un système discret

Considérons un système échantillonné. Après « reconstruction » (bloqueur d'ordre zéro) le signal  $e^*(t)$ , issu de l'échantillonnage de  $e(t)$ , *excite un processus analogique continu* en sortie duquel on obtient *un signal continu*  $s(t)$ . Pour apprécier la transformation subie par le signal d'entrée à partir du dispositif (bloqueur + processus) il faut bien que la sortie soit de même nature que l'entrée. Aussi *échantillonne-t-on de manière fictive* le signal  $s(t)$  afin

d'obtenir un signal échantillonné  $s^*(t)$  comparable à  $e^*(t)$ .

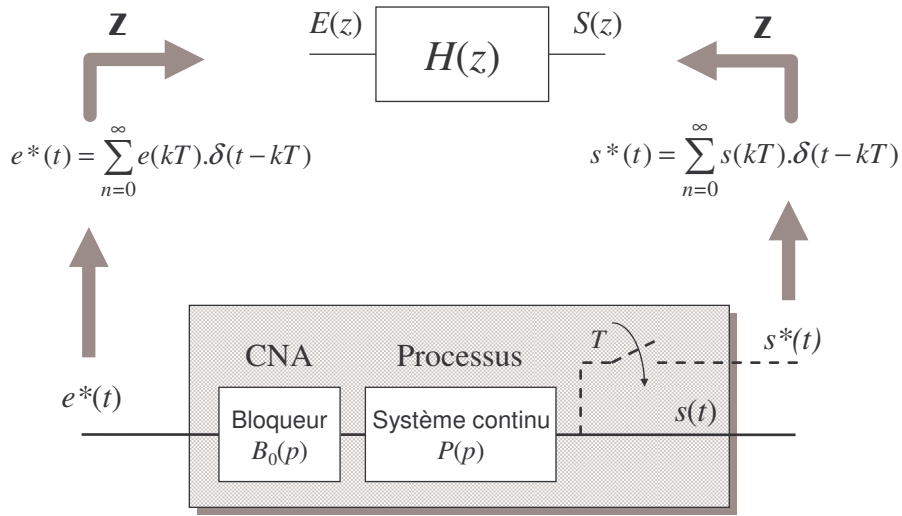


Figure 2 : Modélisation d'un processus commandé par le ordinateur (système échantillonné).

Evidemment nous serons conduits à envisager la combinaison de systèmes discrets (correcteur numérique) et échantillonnés (processus à régler). Nous précisons les règles à appliquer dans ce cas, notamment pour le calcul des systèmes hybrides bouclés. Enfin nous présenterons les méthodes permettant de modéliser les retards purs.

## 5.1. FONCTION DE TRANSFERT DES SYSTEMES DISCRETS

### 5.1.1. FONCTION DE TRANSFERT ET EQUATION RECURRENTTE

Soit un système numérique d'entrée  $E(z)$  et de sortie  $S(z)$ , *sans condition initiale*, il est caractérisé par la transmittance :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Soit encore :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_n z^{n-d} + b_{n-1} z^{n-d-1} + \dots + b_0 z^{-d}}{1 + a_{d-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-d}}$$

Avec la notation  $\mathbf{Z}[s_k] = S(z)$  et  $\mathbf{Z}[e_k] = E(z)$ , cette transmittance correspond à l'équation récurrente :

$$s_k + a_{d-1} s_{k-1} + a_{d-2} s_{k-2} + \dots + a_0 s_{k-d} = b_n e_{k-d+n} + b_{n-1} e_{k-d+n-1} + \dots + b_0 e_{k-d}$$

$$\sum_{i=0}^d a_{d-i} s_{k-i} = \sum_{i=0}^n b_{n-i} e_{k-d+n-i}$$

Cette expression montre sans ambiguïté que le degré de polynôme dénominateur «  $d$  » doit être supérieur ou égal au degré du polynôme numérateur «  $n$  » pour que le filtre soit causal c'est à dire que sa sortie à l'instant  $kT$  ne dépende pas de l'entrée à des instants à venir. Ce qui est le cas si  $n > d$  puisque  $e_{k+(n-d)}$  est un échantillon à venir.

On peut encore écrire :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = z^{-(d-n)} \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-n}}{1 + a_{d-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-d}}$$

Le terme  $(d-n)$  représente l'excédent de pôles par rapport aux zéros. Il traduit le nombre d'échantillons de retard de la sortie du système.

La fonction de transfert peut s'écrire selon les puissances de  $z^{-1}$  :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-n}}{1 + a_{d-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-d}}$$

Dans ce cas la transmittance est physiquement réalisable si «  $n$  » est inférieur, égal ou supérieur à «  $d$  ».

### 5.1.2. REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE NUMERIQUE

#### a. Présentation d'un cas particulier

Considérons un filtre numérique, dont les conditions initiales sont nulles. Il vérifie l'équation récurrente  $s_k = 2e_k - 1,2e_{k-1} - 0,8s_{k-1}$ . Prenons la transformée en  $z$  de l'équation récurrente. Il vient :

$$S(z) = 2E(z) - 1,2z^{-1}E(z) - 0,8z^{-1}S(z)$$

La fraction rationnelle  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{2z-1,2}{z+0,8}$  est la fonction de transfert  $H(z)$  du filtre numérique.

Supposons qu'il soit excité par **une impulsion**  $e_k = \begin{cases} 1 & \text{pour } k=0 \\ 0 & \forall k \neq 0 \end{cases}$  soit  $E(z) = 1$ .

Calculons sa sortie  $s_k$ . Cette séquence particulière est appelée **séquence de réponse impulsionnelle** ou **séquence de pondération**. Elle est notée  $h_k$ . L'organigramme d'élaboration de  $h_k$  est le suivant.

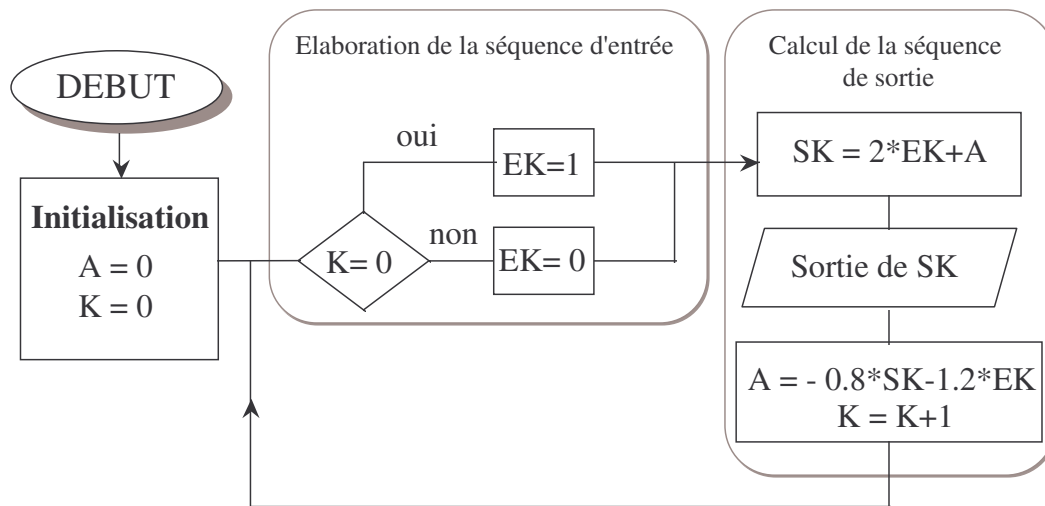


Figure 3 : Algorithme de résolution de l'équation récurrente

Les différentes étapes de calcul donnent les résultats suivants :

K	0	1	2	3	4
EK	1	0	0	0	0
2*EK	2	0	0	0	0
EK-1	0	1	0	0	0
-1,2*EK-1	0	-1,2	0	0	0
SK-1	0	2	-2,8	+2,24	-1,79
-0,8*SK-1	0	-1,6	+2,24	-1,79	+1,43
SK = HK	2	-2,8	+2,24	-1,79	+1,43

La séquence de réponse impulsionnelle est donnée par la dernière ligne du tableau ci dessus.

Elle peut être calculée par division selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  de  $H(z)$ .

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + \dots + h_k + \dots$$

$$H(z) = 2 - 2,8z^{-1} + 2,24z^{-2} - 1,8z^{-3} + 1,43z^{-4} + \dots^1$$

#### b. Réponse à une entrée quelconque

Considérons un filtre numérique dont on connaît la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = z^{-1} - 0,5z^{-2}$$

Appliquons lui, par exemple, la séquence d'entrée  $E(z) = 0,5.(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})$ .

Chaque échantillon  $e_n$  de l'entrée  $E(z)$ , est une impulsion décalée de  $nT$  qui déclenche une

<sup>1</sup> Ce filtre numérique est stable puisque sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque  $k$  (rang des échantillons) tend vers l'infini.

séquence de réponse impulsionnelle qui sera décalée de  $nT$ .

Explicitons cela sur un tableau.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h_k$	0	1	-0,5	0	0	0	0	0	0	0
$e_k$	$e_0 = 0$	$e_1 = 0,5$	$e_2 = 0,5$	$e_3 = 0,5$	$e_4 = 0,5$	0	0	0	0	0
Réponse à $e_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Réponse à $e_1$	0	0	0,5	-0,25	0	0	0	0	0	0
Réponse à $e_2$	0	0	0	0,5	-0,25	0	0	0	0	0
Réponse à $e_3$	0	0	0	0	0,5	-0,25	0	0	0	0
Réponse à $e_4$	0	0	0	0	0	0,5	-0,25	0	0	0
Réponse à $e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Réponse à $e_k$ $\forall k > 5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Sortie</b> $s_k$	0	0	0,5	0,25	0,25	0,25	-0,25	0	0	0

On vérifie sur cet exemple que  $s_3 = \sum_{i=0}^3 e_i h_{(3-i)}$

Plus généralement on écrit :

$$s_k = e_0 h_k + e_1 h_{k-1} + e_2 h_{k-2} + \dots + e_{k-1} h_1 + e_k h_0 = \sum_{i=0}^k e_i h_{k-i}$$

On peut encore écrire :

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_k & h_{k-1} & h_{k-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$h_k = 0 \quad \forall k < 0 \quad \Rightarrow \quad s_k = \sum_{i=0}^{\infty} e_i h_{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} e_{k-i} h_i$$

Cette expression indique que la sortie de rang  $k$  du filtre numérique est égale à **la convolution discrète** de la séquence d'entrée par la séquence de réponse impulsionnelle.

### 5.1.3. FONCTION DE TRANSFERT ET REPOSE IMPULSIONNELLE

Calculons la transformée en  $z$  de l'équation de convolution discrète.

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} e_i h_{k-i} \right] z^{-k}$$

$$S(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} h_{k-i} z^{-(k-i)} \quad \text{Posons} \quad j = k - i$$

$$S(z) = E(z) \sum_{k=0}^{\infty} h_j z^{-j} = E(z) \sum_{j=-i}^{\infty} h_j z^{-j} \quad \text{Or} \quad h_k = 0 \quad \forall k < 0 \quad \text{ainsi :}$$

$$S(z) = E(z) \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j} = E(z) \cdot H(z)$$

La fonction de transfert d'un système discret est égale à la transformée en  $z$  de sa réponse impulsionnelle.

$$H(z) = \mathbf{Z}[h_k] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$

## 5.2. TRANSMITTANCE ECHANTILLONNEE OU « PULSEE »

### 5.2.1. TRANSMISSION D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE PAR UN SYSTEME CONTINU

Soit la transmittance continue  $H(p)$  à laquelle on applique le signal échantillonné  $e^*(t)$ . Le signal issu de cette fonction de transfert est un signal continu. Aussi plaçons un échantillonneur fictif afin de matérialiser notre intention de n'observer  $s(t)$  qu'aux instants d'échantillonnage.

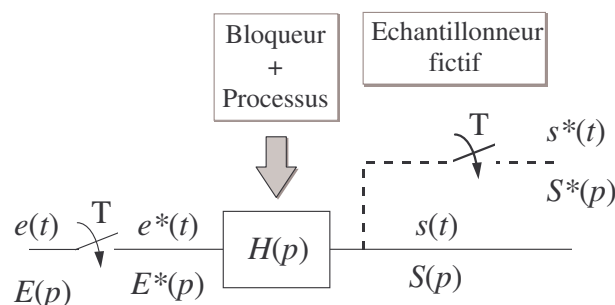


Figure 4 : Traitement des transmittances échantillonnées

$$S(p) = H(p) \cdot E^*(p)$$

$$S^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(p + jk \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$S^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(p + jk \frac{2\pi}{T}\right) \cdot E^*\left(p + jk \frac{2\pi}{T}\right).$$

Mais comme  $E^*(p) = E^*(p + jk \frac{2\pi}{T})$

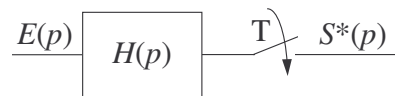
$$S^*(p) = E^*(p) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(p + jk \frac{2\pi}{T}) \quad \Rightarrow \quad S^*(p) = E^*(p) \cdot H^*(p)$$

Sachant que  $S(z) = [S^*(p)]_{z=e^{Tp}}$

$$\boxed{S(z) = E(z) \cdot H(z)}$$

### 5.2.2. ASSOCIATION DE TRANSMITTANCES EN SERIE

a. Premier cas



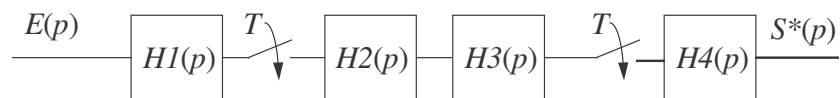
$$S(p) = E(p) \cdot H(p)$$

$S^*(p) = \overline{EH}^*(p)$  Cette notation indique que l'on échantillonne le produit  $E(p)H(p)$

**Remarque n° 1 :** On vérifie que  $\overline{EH}^*(p) \neq E^*(p) \cdot H^*(p)$

Ainsi si  $S(z) = \overline{EH}(z)$  on ne peut pas définir une transmittance.

b. Second cas



On trouve facilement que :

$$S^*(p) = \overline{EH1}^*(p) \cdot \overline{H2H3}^*(p) \cdot H4^*(p) \quad \Rightarrow \quad S(z) = \overline{EH1}(z) \cdot \overline{H2H3}(z) \cdot H4(z)$$

### 5.2.3. SYSTEME ECHANTILLONNE BOUCLE

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF(z)$ , ainsi que l'erreur séquentielle  $\varepsilon(z)$  (erreur aux instants d'échantillonnage) du système ci dessous. Ce système comporte un élément de retour (un capteur) de transmittance  $F(p)$ .

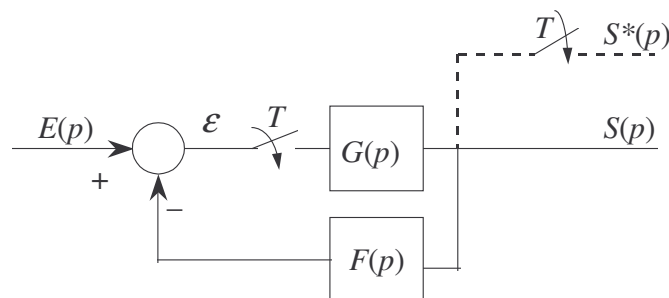


Figure 5 : tances d'un système échantillonné bouclé

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \cdot F(p)$$

$$S(p) = \varepsilon^*(p) \cdot G(p) \quad \Rightarrow \quad S^*(p) = \varepsilon^*(p) \cdot G^*(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon^*(p).G(p).F(p)$$

$$\varepsilon^*(p) = E^*(p) - \varepsilon^*(p).\overline{GF}^*(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{GF}^*(p)}$$

$$\boxed{\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + \overline{GF}(z)} \quad \text{ainsi} \quad \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GF}(z)} = FTBF(z)}$$

### 5.3. ASSOCIATION DE SYSTEMES ECHANTILLONNES ET DISCRETS

#### 5.3.1. CHAINE DE COMMANDE CLASSIQUE

Dans la pratique on associe un bloqueur d'ordre zéro (i.e. un convertisseur numérique analogique) au processus continu réglé par la boucle de commande.

Le calculateur numérique est un processeur discret qui traite des nombres, prélevés à la période d'échantillonnage  $T$ , selon un algorithme (équation récurrente). A cet algorithme correspond une transmittance  $C(z)$ .

Les commandes issues du calculateur numérique sont appliquées, à travers le convertisseur numérique analogique (CNA), au processus analogique de transmittance  $P(p)$ . A des fins de simplification la transmittance de l'actionneur et celle du capteur sont incluses dans celle du processus. Le retour est donc unitaire. La boucle de commande peut être représentée de la manière suivante :

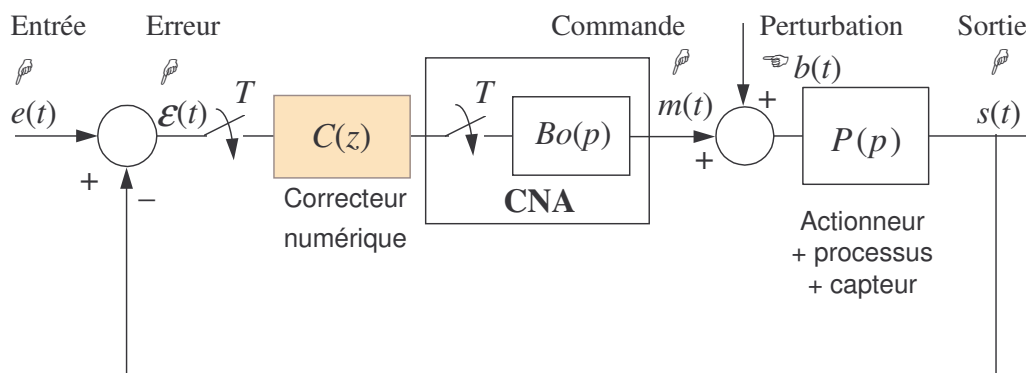


Figure 6 : Boucle de commande numérique

La *fonction de transfert en boucle ouverte* est donnée par :

$$\boxed{FTBO(z) = \frac{N_{bo}}{D_{bo}} = C(z)\overline{B_0P}(z)}$$

En l'absence de perturbation, la *fonction de transfert en boucle fermée* du dispositif à retour unitaire ci dessus est égale à :

$$\boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = FTBF(z) = \frac{N_{bf}}{D_{bf}} = \frac{C(z)\overline{B_0P}(z)}{1 + C(z)\overline{B_0P}(z)}}$$

Soit :



$$FTBF(z) = \frac{Nbf}{Dbf} = \frac{FTBO(z)}{1 + FTBO(z)} = \frac{Nbo}{Dbo + Nbo}$$

**Exercice n° 1 :** Calculer  $S(z)$  en présence du signal  $e(t)$  et d'une perturbation  $b(t)$  et vérifier que :

$$S(z) = \frac{C(z) \cdot \overline{B_0 P}(z)}{1 + C(z) \overline{B_0 P}(z)} E(z) + \frac{\overline{BP}(z)}{1 + C(z) \overline{B_0 P}(z)}$$

**Exercice n° 2 :** Sachant que  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$ , montrer que la  $FTBO(z)$  est donnée par :

$$FTBO(z) = C(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \mathbf{Z} \left[ \frac{P(p)}{p} \right]$$

### 5.3.2. PRISE EN COMPTE DES RETARDS PURS

#### a. Transmittance et retard pur

Dans certains cas le processus continu est affecté d'un retard pur  $\Delta$ . Ainsi :

$$P(p) = P_0(p) \cdot e^{-\Delta p}$$

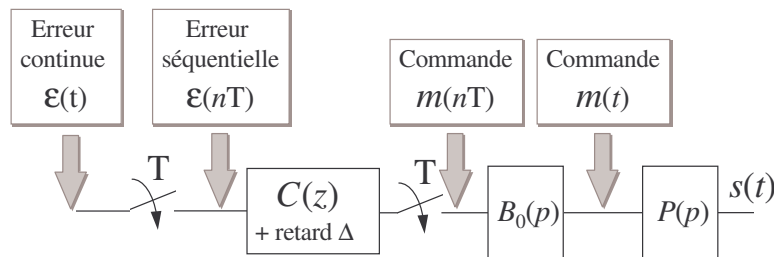
On pose alors :  $\frac{\Delta}{T} = \mu + \lambda$  avec  $\begin{cases} \mu \in \mathbf{N} \\ 0 < \lambda < 1 \end{cases}$

Le nombre entier de périodes d'échantillonnage est pris en compte en introduisant le terme  $z^{-\mu}$ . La partie fractionnaire quant à elle disparaît dès lors que l'on calcule la transformée en  $z$  modifiée de la transmittance continue affectée par le retard en prenant  $m = 1 - \lambda$

$$FTBO(z) = C(z) z^{-\mu} (1 - z^{-1}) \mathbf{Z}_m \left[ \frac{P_0(p)}{p} \right]_{m=1-\lambda}$$

### b. Prise en compte du temps de calcul

En général le temps  $\Delta$  mis par le calculateur numérique pour acquérir les données, les traiter et délivrer la commande  $m_n$  est très inférieur à la période d'échantillonnage  $T$ . Il est donc négligeable. Cependant, si ce n'est pas le cas, il convient de tenir compte de ce retard pur selon la démarche exposée ci-après. Sur le schéma on fait apparaître le retard  $\Delta$  dû aux traitements exécutés par le calculateur et ses périphériques.



Le retard  $\Delta$  est reporté sur le processus  $P(p)$ .

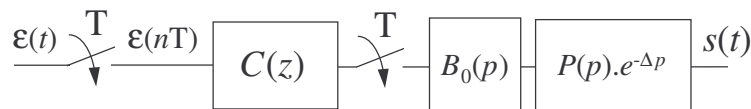


Figure 7 : Prise en compte des temps de calcul

### 5.3.3. SIGNAL DE SORTIE ENTRE LES INSTANTS D'ÉCHANTILLONNAGE

Il s'agit de calculer le signal de sortie entre les instants d'échantillonnage. On utilisera la méthode de la transformée en  $z$  modifiée. Signalons que les techniques de simulation constituent un moyen de visualisation des signaux entre les instants d'échantillonnage qui évite de tels calculs souvent fastidieux.

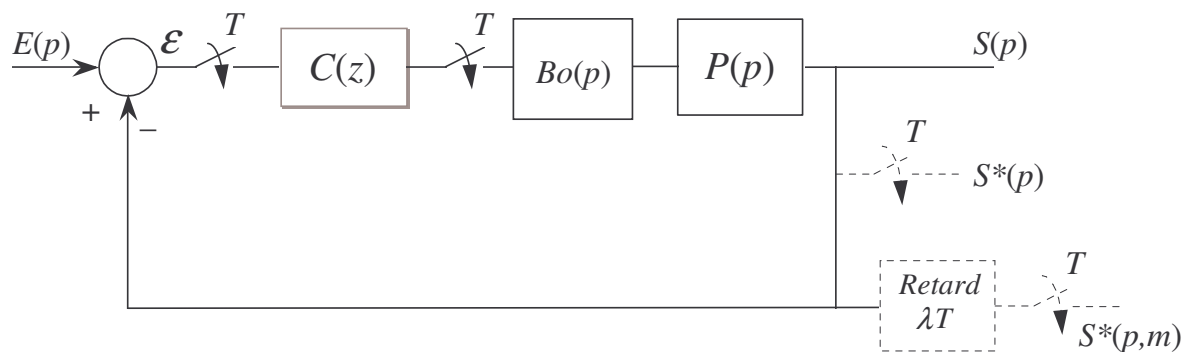


Figure 8 : Observation des signaux entre les instants d'échantillonnage

$$S(z,m) = \varepsilon(z) C(z) \overline{B_0 P}(z,m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(z,m) = \frac{E(z) C(z) \overline{B_0 P}(z,m)}{1 + C(z) \overline{B_0 P}(z)}}$$

## 5.4. FORME GENERALE DES TRANSMITTANCES

### 5.4.1. TRANSMITTANCE PHYSIQUEMENT REALISABLE

#### a. Cas des transmittances en $z$

Soit le système discret **d'ordre<sup>2</sup> « d »** décrit par l'équation récurrente :

$$s_{k+d} + a_{d-1}s_{k+d-1} + a_{d-2}s_{k+d-2} + \dots + a_0s_k = b_ne_{k+n} + b_{n-1}e_{k+n-1} + b_{n-2}e_{k+n-2} + \dots + b_0e_k$$

Le système étant **causal** l'échantillon  $s_{k+d}$  de la sortie ne peut dépendre que d'échantillons de l'entrée de rang inférieur ou égal à  $(k+d)$ . Ainsi  $d \geq n$ . On peut alors écrire :

$$s_k + a_{d-1}s_{k-1} + a_{d-2}s_{k-2} + \dots + a_0s_{k-d} = b_ne_{k+n-d} + b_{n-1}e_{k+n-d-1} + b_{n-2}e_{k+n-d-2} + \dots + b_0e_{k-d}$$

On obtient la transmittance du système discret correspondant en prenant la transformée en  $z$  de cette équation récurrente.

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_n z^{n-d} + b_{n-1} z^{n-d-1} + \dots + b_0 z^{-d}}{1 + a_{d-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-d}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Ou encore :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^d + a_{d-1} z^{d-1} + a_{d-2} z^{d-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^i}{\sum_{i=0}^d b_i z^d}$$

Pour que le système soit causal et donc réalisable, il faut que le dénominateur  $D(z)$  de la transmittance  $H(z)$  soit un polynôme en  $z$  de degré supérieur ou égal au degré du polynôme numérateur  $N(z)$ . Il conviendra de vérifier le respect de cette contrainte à l'issue de toute opération de synthèse. **Ainsi une transmittance est physiquement réalisable si :**

$$d = \|D(z)\| \geq n = \|N(z)\|$$

#### b. Cas des transmittances en $x = z^{-1}$

On peut encore écrire en posant  $x = z^{-1}$  :

$$s_k + a_{d-1}s_{k-1} + a_{d-2}s_{k-2} + \dots + a_0s_{k-d} = b_ne_{k+n-d} + b_{n-1}e_{k+n-d-1} + b_{n-2}e_{k+n-d-2} + \dots + b_0e_{k-d}$$

$$\frac{S}{E}(x) = H(x) = \frac{b_0 x^d + b_1 x^{(d-1)} + \dots + b_{n-1} x^{d-n+1} + b_n x^{d-n}}{a_0 x^d + a_1 x^{(d-1)} + \dots + a_{d-1} x + 1} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i x^{d-i}}{\sum_{i=0}^d a_i x^{d-i}} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

<sup>2</sup> Comparer la notion d'ordre d'un système discret à celle d'un système continu.

### 5.4.2. FORME STANDARD DE LA TRANSMITTANCE

On a souvent intérêt à mettre en évidence le gain statique et le type de la transmittance (i.e. le nombre d'intégrations). Aussi adopterons-nous une écriture standard des transmittances en  $z$  faisant apparaître directement le gain statique  $K$ , les intégrations (i.e. les pôles  $z=1$ ) et éventuellement les retards purs (pôles  $z=0$ ) d'ordre  $\mu \in \mathbf{N}$ .

$$\boxed{H(z) = \frac{K}{(z-1)^\alpha} z^{-\mu} \frac{N_1(z)}{D_1(z)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{N_1(1)}{D_1(1)} = 1 \\ K = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^\alpha \cdot H(z) \end{cases}$$

La fonction de transfert d'un système numérique (discret et échantillonné) s'écrit encore :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^i}{\sum_{i=0}^d a_i z^i} = k \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_{zi})}{\prod_{i=1}^d (z - z_{pi})} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$k$  est appelé le facteur de gain. Le dénominateur  $D(z)$  a «  $d$  » **racines appelées pôles de la transmittance**. Ces racines sont réelles ou complexes 2 à 2 conjuguées. Le numérateur  $N(z)$  admet «  $n$  » **racines appelées zéros de la transmittance**. Ces zéros sont réels ou complexes 2 à 2 conjugués. Ainsi un système quelconque peut toujours être décomposé en un produit de systèmes du premier ordre et du deuxième ordre.

Les pôles de la transmittance caractérisent le comportement dynamique du système.

**Exercice n° 3 :** Soit  $2s_k - s_{k-1} - 4s_{k-2} + 3s_{k-3} = e_{k-1} + 3e_{k-2} + 2e_{k-3}$

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{2 - z^{-1} - 4z^{-2} + 3z^{-3}} = \frac{z^2 + 3z + 2}{2z^3 - z^2 - 4z + 3} = \frac{(z+1)(z+2)}{(z-1)^2(2z+3)}$$

$$H(z) = \frac{1,2}{(z-1)^2} \frac{(z+1)(z+2)}{(2,4z+3,6)}$$

### 5.4.3. MODELE NUMERIQUE DU PREMIER ORDRE

Soit le système décrit par l'équation récurrente :

$$s_k + as_{k-1} = be_{k-1} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} = \frac{b}{z+a}$$

Le gain statique est  $K = \frac{b}{1+a}$  ;  $z_p = -a$  est le pôle de la transmittance.

On obtient la séquence de pondération par division selon les puissances croissantes de  $x = z^{-1}$  :

$$H(z) = 0 + b.z^{-1} - ba.z^{-2} + ba^2.z^{-3} - ba^3.z^{-4} + \dots + b(-a)^{n-1}.z^{-n} + \dots$$

Soit  $h_0 = 0$  et  $h_n = b(-a)^{n-1}$ . On examinera les cas particuliers  $a = -1$  et  $a = 0$ .

L'allure de la séquence de réponse impulsionnelle (séquence de pondération) dépend de la position du pôle  $-b$  dans le plan complexe  $z$ .

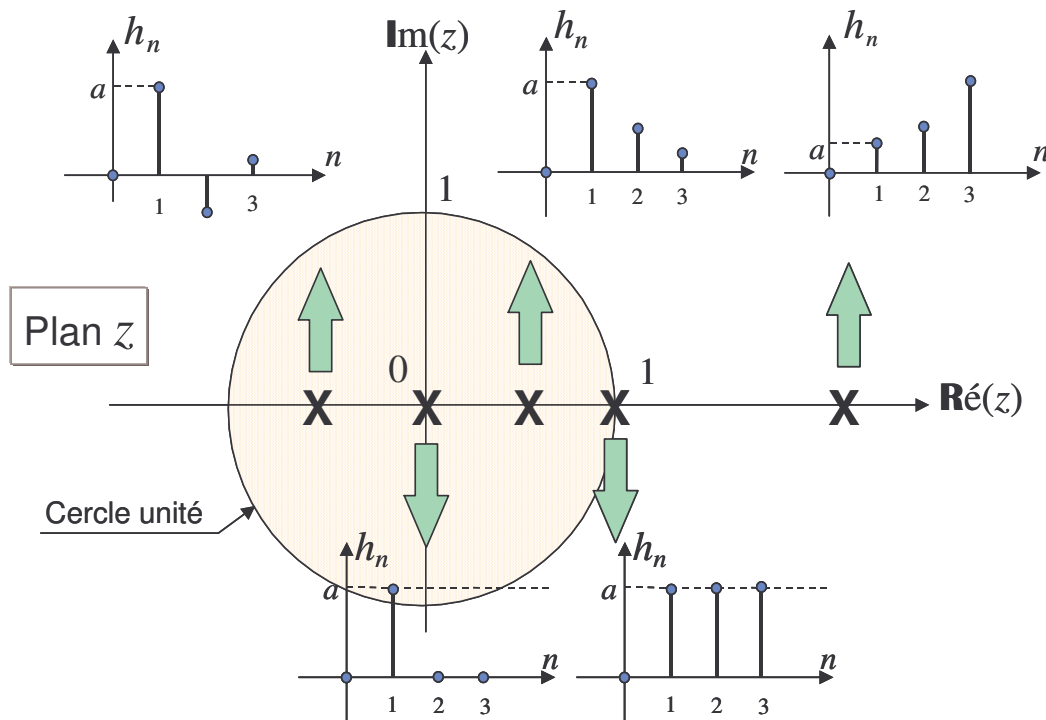


Figure 9 : Réponse impulsionnelle selon la position des pôles dans le plan complexe «  $z$  »

Si  $-1 < z_p < 1$  les échantillons de la séquence de réponse impulsionnelle tendent vers zéro lorsque leur rang  $n$  tend vers l'infini. Le filtre est stable.

Dans le cas contraire ( $z_p \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[$ ) le filtre est instable.

**Exercice n° 4 :** Soit un système analogique continu du premier ordre,  $P(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ , associé à un bloqueur d'ordre zéro  $B_0(p)$ . Calculer la transmittance échantillonnée de l'ensemble.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{K}{p(1 + \tau p)} \right] \Rightarrow G(z) = \frac{K(1 - z_0)}{z - z_0} \text{ avec } z_0 = e^{-T/\tau}$$

Cette transmittance est du premier ordre. Son pôle  $z_0 = e^{-T/\tau}$  est de module inférieur à l'unité. La séquence de réponse impulsionnelle s'éteint lorsque  $n \rightarrow \infty$ . **Le filtre est stable.**

Le gain statique est égal à  $G(1) = \frac{K(1 - z_0)}{(1 - z_0)} = K$ ; il est identique à celui du système continu.

**Exercice n° 5 :** L'identification par la méthode de STREJC d'un processus conduit à lui attribuer la transmittance :

$$P(p) = \frac{K}{1 + \tau p} e^{-\Delta p}$$

On associe un bloqueur  $B_0(p)$  à ce processus.

Calculons la transmittance échantillonnée de l'ensemble.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{K e^{-\Delta p}}{p(1 + \tau p)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z}_m \left[ \frac{K}{p(1 + \tau p)} \right]_{m=1-\frac{\Delta}{T}}$$

$$G(z) = \frac{k(z + \alpha)}{z(z - z_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = K(1 - z_0 e^{\Delta/\tau}) \\ z_0 = e^{-T/\tau} \\ \alpha = -z_0 \frac{(1 - e^{\Delta/\tau})}{1 - z_0 e^{\Delta/\tau}} \end{cases}$$

$$\text{Le gain statique est donné par } G(1) = \frac{K(1 - z_0 e^{\Delta/\tau}) \left( 1 - z_0 \frac{(1 - e^{\Delta/\tau})}{1 - z_0 e^{\Delta/\tau}} \right)}{(1 - z_0)} = K$$

Le retard fractionnaire se traduit par un retard pur d'une période d'échantillonnage ( $z^{-1}$ ) partiellement compensé par le zéro  $z_Z = -\alpha$ .

#### 5.4.4. MODELE NUMERIQUE DU DEUXIEME ORDRE

Soit le système du second ordre décrit par l'équation récurrente :

$$s_k + a_1 s_{k-1} + a_0 s_{k-2} = b_1 e_{k-1} + b_0 e_{k-2}$$

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_1 z + b_0}{(z - z_P)(z - \bar{z}_P)}$$

Si les pôles sont réels,  $H(z)$  est le produit de deux systèmes du premier ordre.

Si les pôles sont complexes conjugués, décomposons  $H(z)$  en éléments simples :

$$H(z) = \frac{A}{(1 - z_P z^{-1})} + \frac{\bar{A}}{(1 - \bar{z}_P z^{-1})} \quad \text{soit en posant} \quad \begin{cases} A = |A| e^{j\varphi} \\ z_P = |z_P| e^{j\psi} \end{cases}$$

$$h_0 = 0 \quad \text{et} \quad h_n = 2|A||z_P|^{n-1} \cos[\varphi + (n-1)\psi]$$

L'allure de la séquence de réponse impulsionnelle dépend de la position de la paire de pôles complexes dans le plan  $z$ .

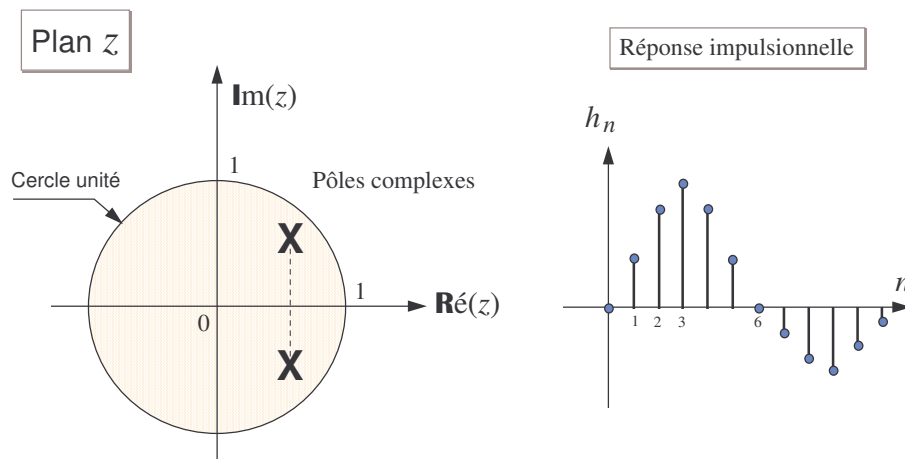


Figure 10 : Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre

- Si  $|z_p| < 1$  le système est stable car  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_p|^{n-1} = 0$
- Si la paire de pôles complexes est extérieure au cercle unité ( $|z_p| > 1$ ) on vérifie que l'amplitude des échantillons tend vers l'infini lorsque leur rang  $n$  tend vers l'infini. On perçoit ainsi que la stabilité d'un système échantillonné (ou discret) est garantie dès lors que, dans le plan complexe  $z$ , les pôles restent à l'intérieur du cercle unité.
- Enfin si les pôles du système du second ordre sont sur le cercle unité ( $|z_p| = 1$ ) on vérifie que la réponse est juste oscillante.

### 5.5. MODELE NUMERIQUE DE L'OPERATEUR « p »

Nous savons réaliser la synthèse des correcteurs continus. Tel était du moins un des objectifs majeurs de la première partie du cours d'Automatique. Il s'agit dans ce paragraphe de mettre au point une méthode permettant de transposer dans le domaine numérique une loi de commande continue conçue selon des méthodes analogiques. Cette démarche autorise la numérisation d'une chaîne de commande en évitant un nouveau travail de synthèse.

En continu l'opération d'intégration s'exprime par :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p}$$

Parmi l'ensemble des algorithmes d'intégration numérique qu'il est possible de définir, nous retiendrons le suivant :

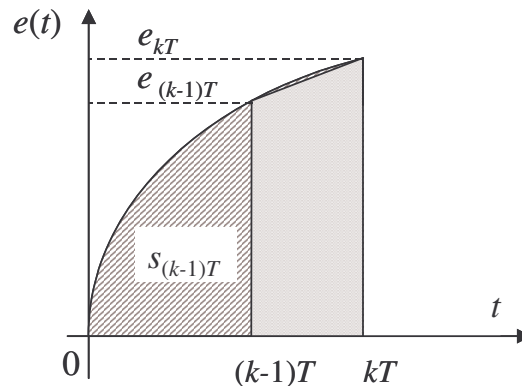


Figure 11 : Intégration numérique

$$s_k = s_{k-1} + \frac{T}{2}(e_k + e_{k-1}) \Rightarrow S(z) = z^{-1}S(z) + \frac{T}{2}E(z)(1 + z^{-1})$$

Soit :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Cette relation permet de déterminer un *équivalent* numérique de « p » (approximation de TUSTIN).

$$p \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Ainsi ayant réalisé la synthèse d'un correcteur analogique  $C(p)$  pour la commande d'un

processus en boucle fermée selon les méthodes relevant du domaine continu, il est possible de transposer<sup>3</sup> ce correcteur dans le domaine numérique<sup>4</sup> à partir de :

$$C(z) = [C(p)]_{p \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

## 5.6. INTEGRATION ET DERIVATION NUMERIQUE

Considérons un système analogique  $P(p)$ , doté d'un dispositif de maintien  $B_0(p)$ . La transmittance échantillonnée de l'ensemble est égale à :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{P(p)}{p} \right]$$

### 5.6.1. INTEGRATEUR NUMERIQUE

La transmittance de l'intégrateur analogique est donnée par  $1/T_i p$ . Associée au bloqueur d'ordre zéro sa transmittance en  $z$  est :

$$I(z) = \mathbf{Z} \left[ \frac{B_0(p)}{p} \right] = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{T_i p^2} \right]$$

$$\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{T_i p^2} \right] = \frac{T}{T_i} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$\frac{S}{E}(z) = I(z) = \frac{T}{T_i} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = \frac{T}{T_i} \frac{1}{(z - 1)}$$

Résultat que l'on obtient en programmant l'équation récurrente :

$$s_k = s_{k-1} + \frac{T}{T_i} e_{k-1}$$

### 5.6.2. DERIVATEUR NUMERIQUE

La transmittance du dérivateur analogique est donnée par  $T_d p$ . Cette transmittance analogique n'est pas physiquement réalisable. On adopte comme algorithme de dérivation l'équation récurrente<sup>5</sup> :

$$s_k = \frac{T_d}{T} [e_k - e_{k-1}]$$

La transmittance est donc égale à :  $D(z) = \frac{T_d}{T} [1 - z^{-1}]$ .

Cette opération n'a pas d'équivalent en analogique.

### 5.6.3. DERIVATEUR FILTRE

<sup>3</sup> Attention cette méthode n'est pas rigoureuse et donne parfois des surprises.

<sup>4</sup> Voir l'exercice au § 8.3.2.c.

<sup>5</sup> Revoir le commentaire concernant la dérivation d'un signal bruité au § 4.2.3.b.



La transmittance du dérivateur analogique filtré est donnée par :

$$\frac{T_d p}{\left(1 + \frac{T_d}{N} p\right)}$$

Associée au bloqueur d'ordre zéro sa transmittance en  $z$  est :

$$D_f(z) = \mathbf{Z} \left[ \frac{B_0(p) T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right] = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{T_d}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right] \Rightarrow D_f = \frac{N(z-1)}{(z-z_0)} \quad \text{avec} \quad z_0 = e^{-\frac{TN}{T_d}}$$

On choisit généralement  $3 < N < 20$  (valeur courante  $N = 10$ ).

#### 5.6.4. CORRECTEUR P.I.D. PROGRAMME

L'équivalent numérique du correcteur P.I.D. analogique est :

$$C(p) = K \left[ 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right] \Rightarrow C(z) = K \left[ 1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{N(z-1)}{(z-z_0)} \right] \quad \text{avec} \quad z_0 = e^{-\frac{TN}{T_d}}$$

ou encore :

$$C(z) = K \left[ 1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{TN}{T_d}\right)z - 1} \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p \approx \frac{z-1}{T} \text{ pour l'action intégrale} \\ p \approx \frac{z-1}{Tz} \text{ pour l'action dérivée} \end{cases}$$

On en déduira l'équation récurrente à programmer.