

## 1. Modèle du premier ordre

On a établi dans le cours consacré aux asservissements linéaires continus ( chapitre 3) la fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau \cdot p} \quad k \text{ gain statique, } \tau \text{ constante de temps.}$$

### 1. Fonction de transfert

Si l'on envisage une commande numérique pour ce système muni de son bloqueur d'ordre zéro, la fonction de transfert échantillonnée s'écrit :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{k}{p(1 + \tau \cdot p)} \right]$$

$$\text{On applique le théorème des résidus pour déterminer } Z \left[ \frac{k}{p(1 + \tau \cdot p)} \right]$$

$$Z \left[ \frac{k}{p(1 + \tau \cdot p)} \right] = \sum \left( \text{résidus de } \frac{\left( \frac{k/\tau}{\mu \left( \mu + \frac{1}{\tau} \right)} \right)}{1 - z^{-1} \cdot e^{\mu \cdot T_e}} \right)$$

$$Z \left[ \frac{k}{p(1 + \tau \cdot p)} \right] = \frac{k}{1 - z^{-1}} - \frac{k}{1 - z^{-1} \cdot e^{\frac{-T_e}{\tau}}}$$

$$H(z) = \frac{k(1 - z_0)}{z - z_0} \quad \text{avec } z_0 = e^{\frac{-T_e}{\tau}}$$

## 2. Réponse aux entrées type

### 0. Réponse indicielle

L'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0 \cdot \Gamma(k)$ ,

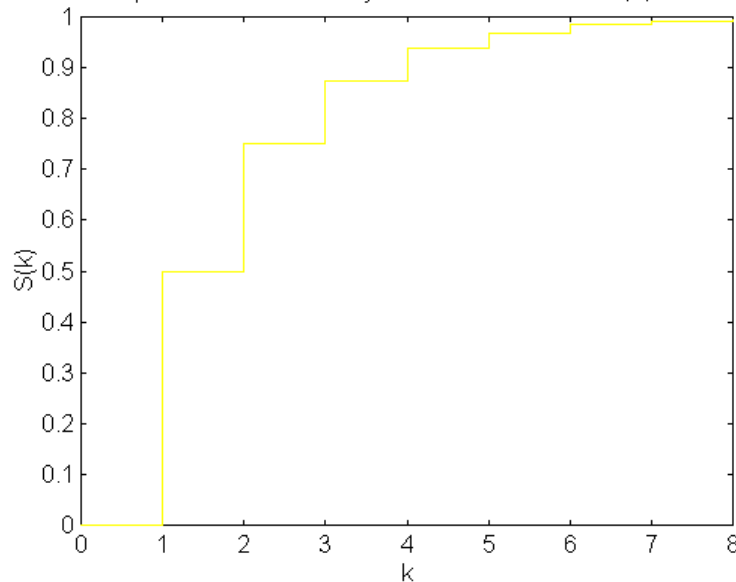
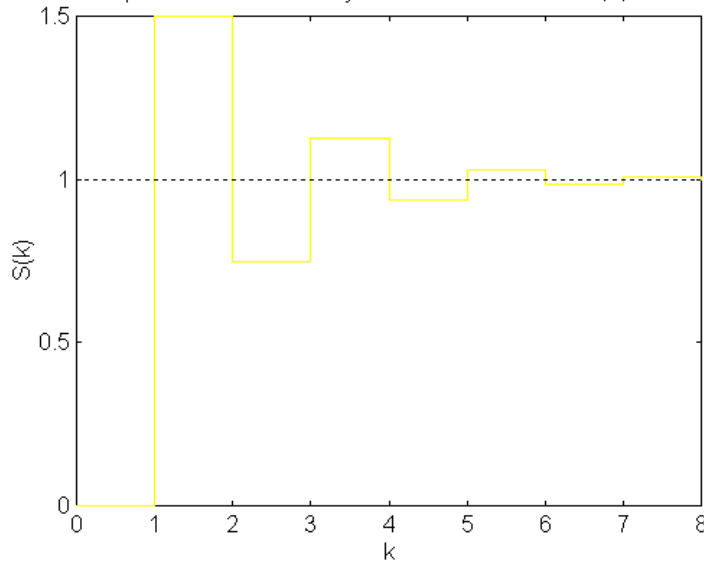
$$S(z) = H(z) E(z) = \frac{k(1 - z_0)}{z - z_0} \frac{z}{z - 1} E_0 = k \cdot E_0 \cdot \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{z_0}{z - z_0} \right)$$

d'après les tables de transformées en multipliant les deux membres de l'égalité par  $z$  et en appliquant le théorème de l'avance :

$$s(k+1) = k \cdot E_0 \cdot (1 - z_0^{k+1}) \quad \text{pour } k \geq -1$$

$$\Rightarrow s(k) = k \cdot E_0 \cdot (1 - z_0^k) \quad \text{pour } k \geq 0$$

Selon que  $1 > z_0 \geq 0$  ou  $0 \geq z_0 > -1$ , on obtient les réponses suivantes.

Réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  $z_0 = 0,5$ ,  $k = 1$ Réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  $z_0 = -0,5$ ,  $k = 1$ 

## 1. Réponse harmonique

L'entrée est un signal harmonique de pulsation harmonique  $\omega$  :  $e(k) = E_1 \cdot e^{j\omega k T_e}$ ,

$$S(z) = H(z)E(z) = \frac{k(1-z_0)}{z-z_0} \frac{z}{z-e^{j\omega T_e}} E_1 = k \cdot E_1 \left( \frac{1}{z-z_0} - \frac{z_0}{z-e^{j\omega T_e}} \right)$$

$$S(z) = kE_1 \left( \frac{1-z_0}{z_0 - e^{j\omega T_e}} \right) \left( \frac{z}{z-z_0} - \frac{z}{z-e^{j\omega T_e}} \right)$$

d'après les tables de transformées :

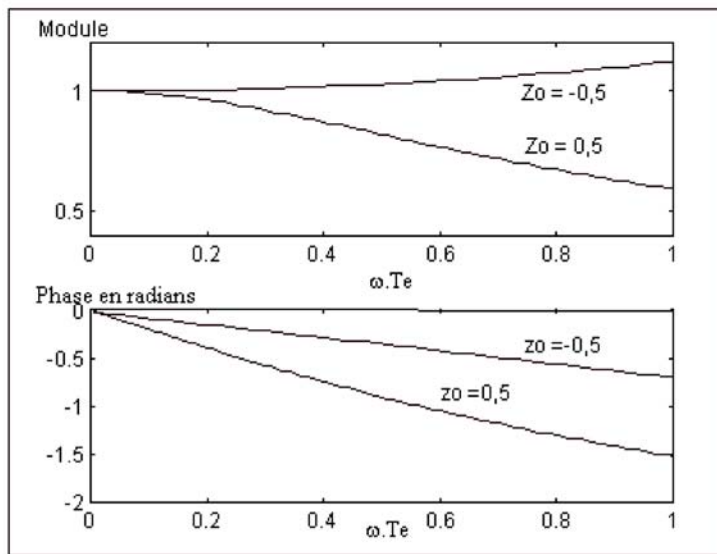
$$s(k) = kE_1 \left( \frac{1-z_0}{z_0 - e^{j\omega T_e}} \right) (z_0^k - e^{j\omega k T_e})$$

La réponse est la somme d'un régime transitoire  $z_0^k$  du premier ordre qui tend vers 0 lorsque  $|z_0| < 1$  et d'un régime permanent harmonique  $e^{j\omega k T_e}$ . Pour l'étude harmonique on ne considère que le régime permanent.

$$s_{\text{permanente}}(k) = kE_1 \left( \frac{1-z_0}{z_0 - e^{j\omega T_e}} \right) e^{j\omega k T_e} = kE_1 \left( \frac{1-z_0}{z_0 - \cos(\omega T_e) + j \sin(\omega T_e)} \right) e^{j\omega k T_e}$$

$$\text{module : } k.E_1 \frac{(z_0 - 1)}{\sqrt{z_0^2 + 1 - 2.z_0.\cos \omega T_e}}$$

$$\text{argument : } \arg(z_0 - 1) + \arctan\left(\frac{\sin(\omega T_e)}{z_0 - \cos \omega T_e}\right)$$



Les systèmes caractérisés par  $z_0 > 0$  ont un comportement de type filtre passe-bas tandis que pour  $z_0 < 0$  il est de type passe-haut.

## 1. Système du second ordre

### 1.1. Modèle échantillonné du second ordre

On a établi dans le cours consacré aux asservissements linéaires continus ( chapitre 3) la fonction de transfert d'un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k.\omega_n^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_n.p + \omega_n^2} \quad \mathbf{k : gain statique ; \omega_n : pulsation propre non amortie ; \xi : facteur d'amortissement réduit.}$$

On ne considère ici que le cas  $0 \leq \xi < 1$  pour lequel le système admet deux pôles complexes conjugués. Lorsque  $\xi > 1$  le système possède deux pôles réels distincts ; après décomposition en éléments simples l'étude se ramène à celle de deux systèmes du premier ordre.

$$p_1 = -\xi.\omega_n + j.\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}$$

$$p_1^* = -\xi.\omega_n - j.\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}$$

Ce système du second ordre muni de son bloqueur d'ordre zéro admet pour fonction de transfert échantillonnée :

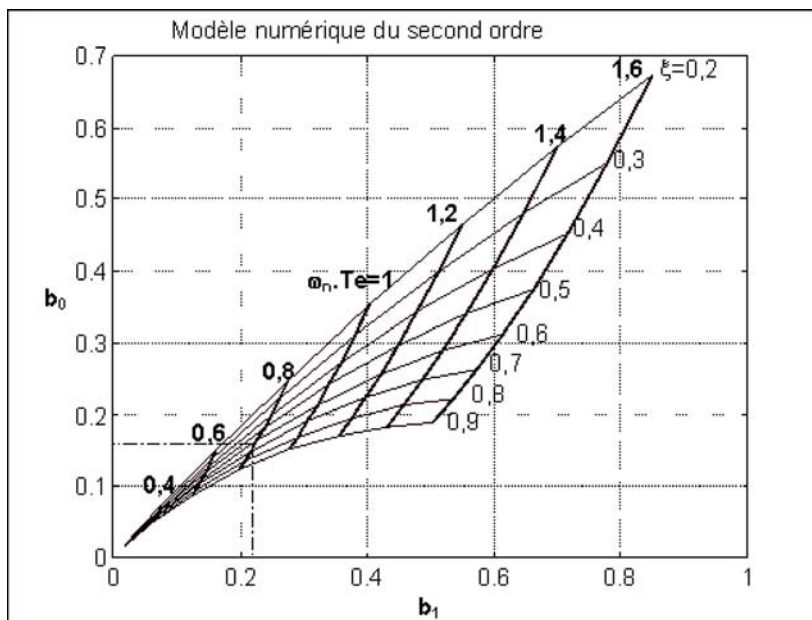
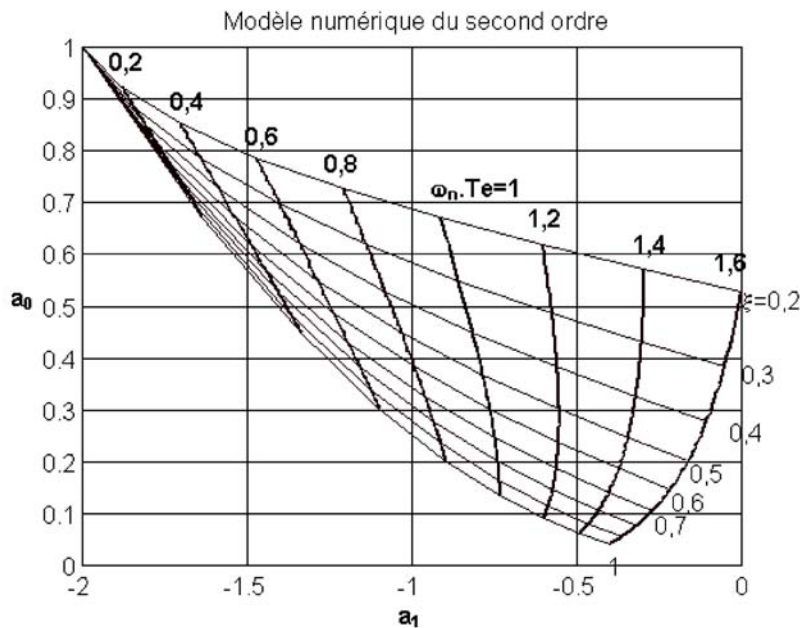
$$a_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} \quad a_1 = -2e^{-\xi\omega_n T_e} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} T_e)$$

$$b_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} + e^{-\xi\omega_n T_e} \left[ \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} T_e) - \cos(\sqrt{1-\xi^2} T_e) \right]$$

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_n T_e} \left[ \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} T_e) + \cos(\sqrt{1-\xi^2} T_e) \right]$$

$$H(z) = \frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_1^*)} \quad z_0 = \frac{-b_0}{b_1} \quad z_1 = e^{p_1 T_e} \quad z_1^* = e^{p_1^* T_e}$$

Pour la détermination de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  on exploite très avantageusement les abaques suivantes.



### 1. Exemple

Soit le système du second ordre décrit par :  $H(p) = \frac{0,64}{p^2 + 0,96p + 0,64}$ . On échantillonne ce système muni d'un bloqueur d'ordre zéro à la cadence de 1 seconde. D'après les abaques :

$a_0 = 0,4$ ,  $a_1 = -1$ ,  $b_0 = 0,16$  et  $b_1 = 0,22$ . On vérifie que le gain statique du système échantillonné est unitaire :

$$H(z) = \frac{b_1 + b_0}{1 + a_1 + a_0} = \frac{0,22 + 0,16}{1 - 1 + 0,4} \approx 1 \quad \text{aux erreurs de lecture près.}$$

### 2. Réponse indicielle

Le système du second ordre échantillonné est décrit par :

$$H(z) = \frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$

On le soumet à un échelon d'Heaviside d'amplitude  $e_0$  :

$$E(z) = \frac{z}{z - 1} e_0$$

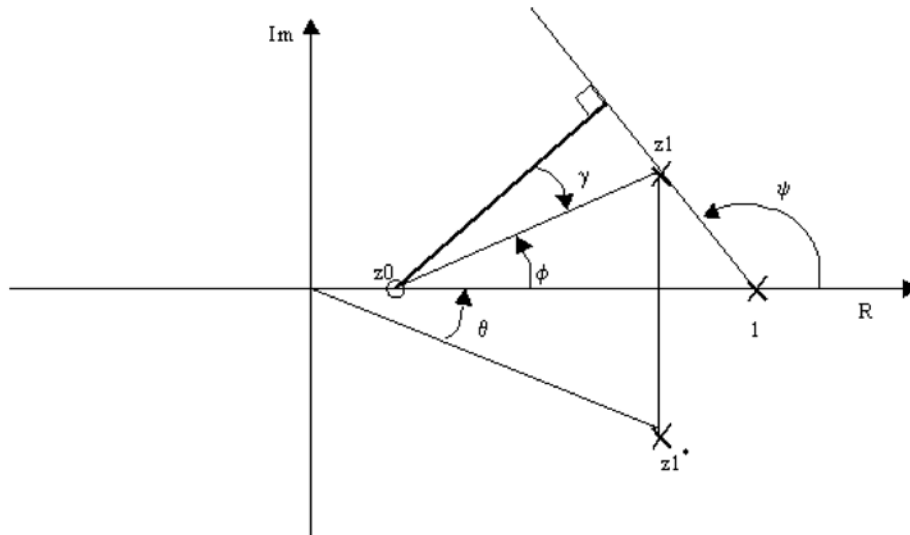
$S(z) = \frac{b_1(z - z_0)}{(z - z_1)(z - z_1^*)(z - 1)} z e_0$  qui après division par  $z$  puis décomposition en éléments simples s'écrit :

$$S(z) = \left( \left( \frac{1 - z_0}{(1 - z_1)(1 - z_1^*)} \right) \frac{1}{z - 1} + \frac{(z_1 - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1 - 1)} \frac{1}{z - z_1} - \frac{(z_1^* - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1^* - 1)} \frac{1}{z - z_1^*} \right) b_1 e_0$$

Dans le domaine temporel, d'après les tables de transformées :

$$s(k) = \left( \left( \frac{1 - z_0}{(1 - z_1)(1 - z_1^*)} \right) \Gamma_k + \frac{(z_1 - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1 - 1)} (z_1)^k - \frac{(z_1^* - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1^* - 1)} (z_1^*)^k \right) b_1 e_0$$

On utilise la carte des pôles et des zéros afin d'obtenir une expression plus conviviale de la réponse indicielle.



On note :

$$z_1 = \rho e^{j\theta}, \quad z_1 - z_0 = |z_1 z_0| e^{j\phi}, \quad z_1 - 1 = |z_1| e^{j\psi}, \quad z_1 - z_1^* = 2j |z_1 z_1^*|$$

L'expression de  $s(k)$  peut aussi s'écrire :

$$s(k) = \left( \left( \frac{1 - z_0}{(1 - z_1)(1 - z_1^*)} \right) \Gamma_k + \frac{(z_1 - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1 - 1)} (z_1)^k - \frac{(z_1^* - z_0)}{(z_1 - z_1^*)(z_1^* - 1)} (z_1^*)^k \right) b_1 e_0$$

$$s(k) = \left( \frac{(1 - z_0)}{|z_1|^2} \Gamma_k + \frac{|z_1 z_0| e^{j(\phi - \psi)}}{2j |z_1 z_1^*| |z_1|} \rho^k e^{jk\theta} - \frac{|z_1 z_0| e^{-j(\phi - \psi)}}{2j |z_1 z_1^*| |z_1|} \rho^k e^{-jk\theta} \right) b_1 e_0$$

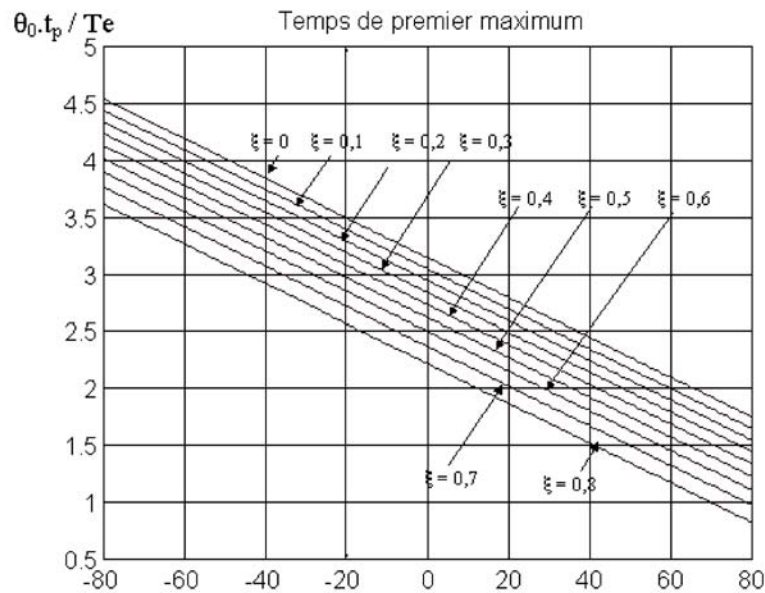
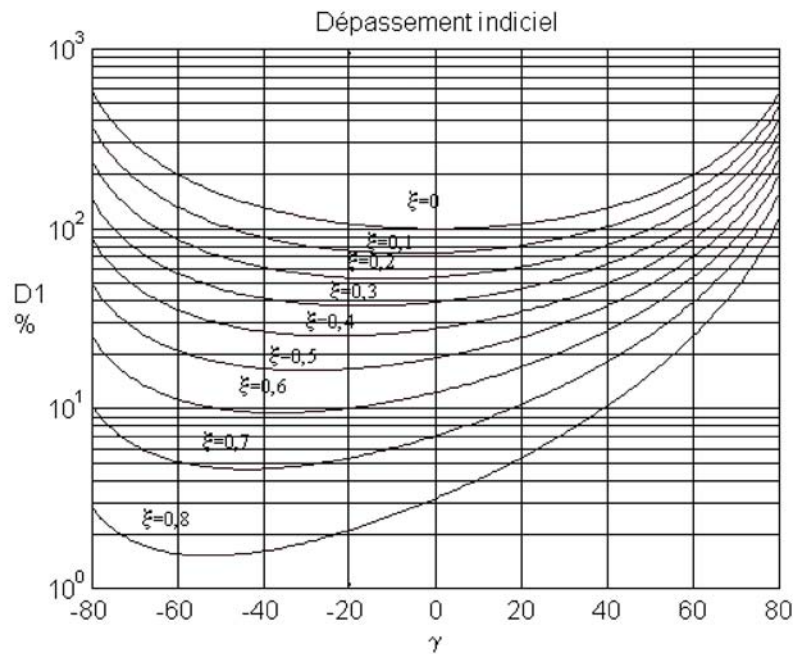
$$s(k) = b_1 \frac{(1 - z_0)}{|z_1|^2} e_0 \Gamma_k + b_1 e_0 \frac{|z_1 z_0|}{|z_1 z_1^*| |z_1|} \rho^k \cos(k\theta + \phi - \psi)$$

$$\frac{\pi}{2} - (\phi - \psi) + \psi = \pi \Leftrightarrow \gamma + \frac{\pi}{2} = \phi - \psi$$

d'après la figure précédente :

$$s(k) = b_1 \frac{(1 - z_0)}{|z_1|^2} e_0 \Gamma_k + b_1 e_0 \frac{|z_1 z_0|}{|z_1 z_1^*| |z_1|} \rho^k \cos(k\theta + \gamma)$$

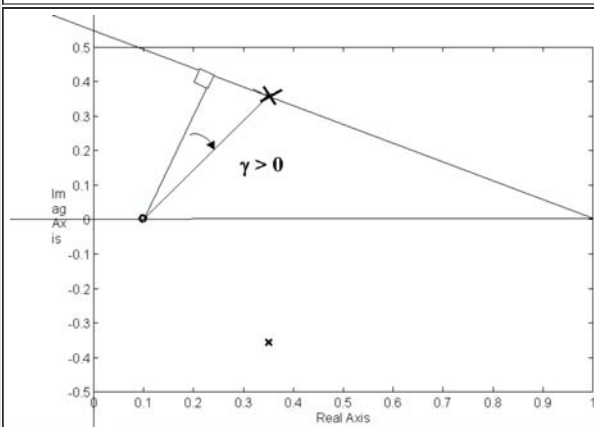
Les figures qui suivent permettent de déduire l'allure de la réponse



### 1. Exemple

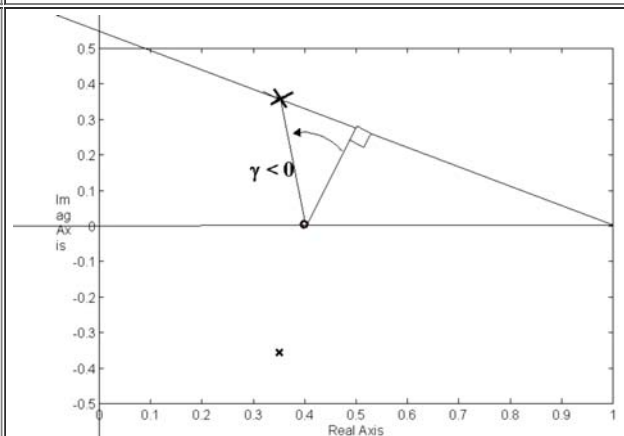
Pour les deux système définis par leur fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{z - 0,1}{(z - 0,35 + 0,35j)(z - 0,35 - 0,35j)}$$

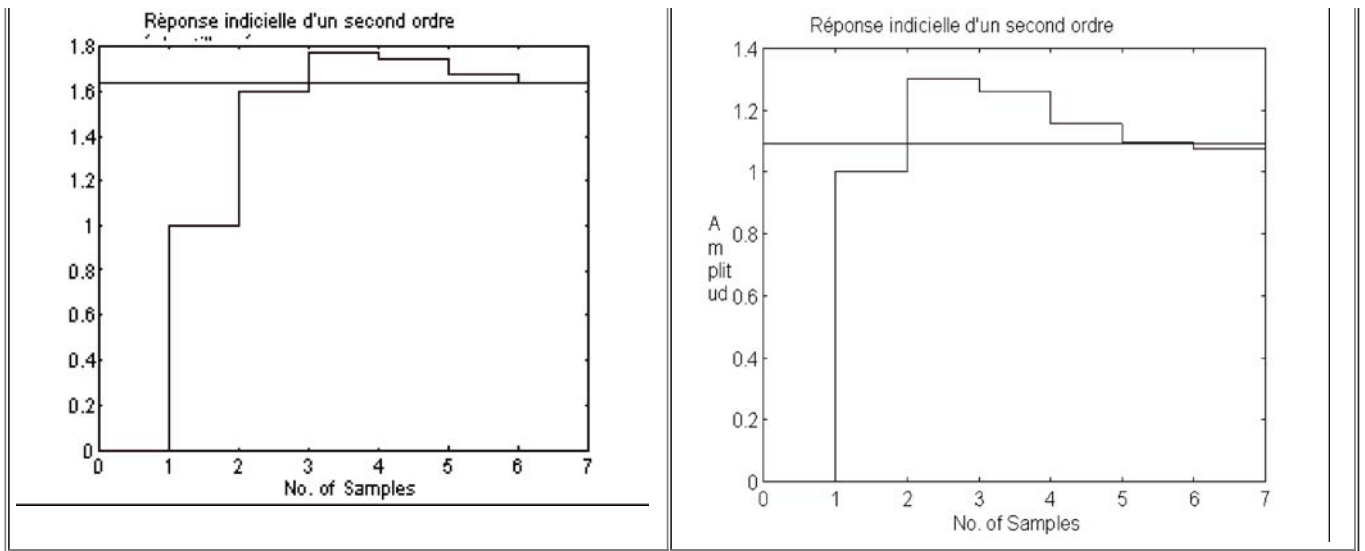


$$\gamma = D_1 \% = t_p =$$

$$H(z) = \frac{z - 0,4}{(z - 0,35 + 0,35j)(z - 0,35 - 0,35j)}$$



$$\gamma = D_1 \% = t_p =$$



Les figures précédentes illustrent l'influence de la position des zéros sur la réponse indicielle. Les abaques suivantes permettent d'établir les caractéristiques de la réponse indicielle : dépassement et temps de premier pic.

## 2. Systèmes d'ordre supérieur à deux

Un système d'ordre quelconque peut, après décomposition en éléments simples s'écrire comme la superposition de sous-systèmes du premier et du second ordre.

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + \dots b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0} = \sum_i \frac{k_i (1 - z_i)}{z - z_i} + \sum_j \frac{b_j (z - z_{0j})}{(z - z_j)(z - z_j^*)}$$

L'expression de la réponse indicielle :

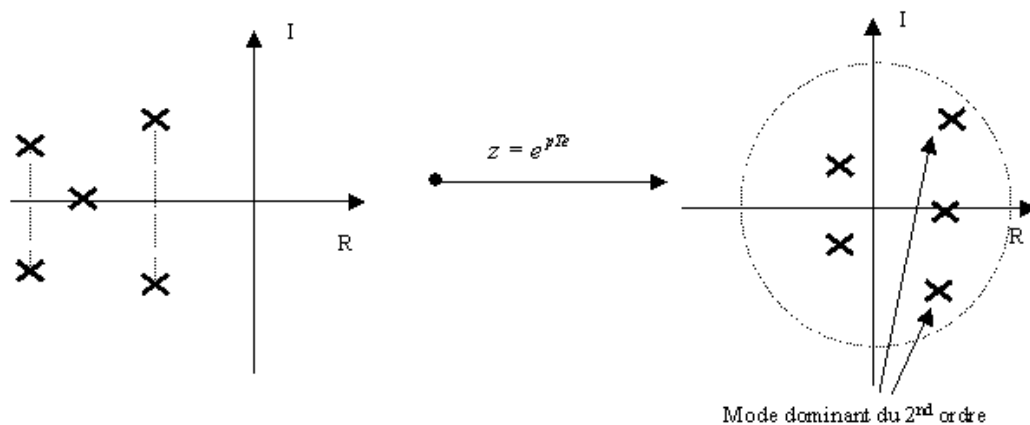
$$s(k) = \left[ \sum_i k_i (1 - z_i^k) + \sum_j b_j \frac{(1 - z_{0j}^k)}{|z_j|^2} \Gamma_k + b_j \frac{|z_j z_{j0}|}{|z_j z_j^*| |z_j|} \rho_j^k \cos(k\theta_j + \gamma_j) \right] e_0$$

Le régime transitoire est défini par  $z_i^k$  pour les sous-systèmes du premier ordre et  $\rho_j^k \cos(k\theta_j + \gamma_j)$  pour les sous-systèmes du second ordre. Il est d'autant plus long que le module des pôles est grand. Il est d'autant plus bref que ce module tend vers zéro.

**Remarque :** L'expression de la réponse indicielle montre que le système est stable si la réponse ne diverge pas ; ce qui est le cas lorsque les modules des pôles module des pôles est inférieur à l'unité.

### 1. Notion de mode dominant

On appelle mode dominant le mode associé au pôle dont le module est le plus grand i.e. celui qui impose le régime transitoire le plus long.



### 1. Exemple