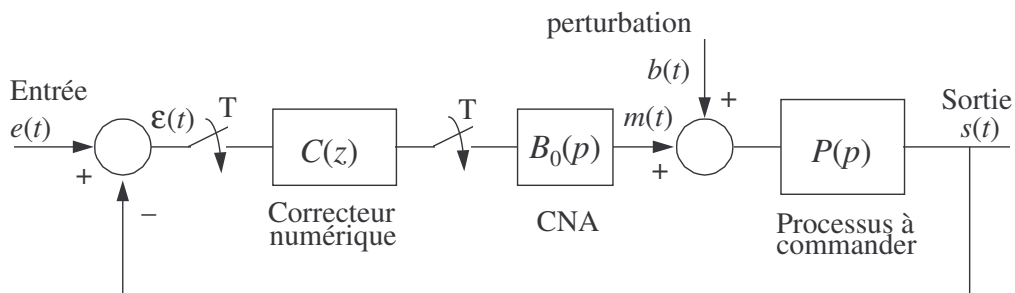


*Durée 3 heures – Calculatrice autorisée*

*1 feuille A4 manuscrite recto verso autorisée ; le nom de l'élève doit être marqué en lettre capitales en haut à droite sur les deux côté de la feuille.*

On considère la boucle asservie représentée par le schéma fonctionnel suivant :



## I. INTRODUCTION

1. Le système étant sollicité simultanément par l'entrée principale  $e(t)$  et la perturbation  $b(t)$ , calculer l'erreur échantillonnée  $\varepsilon(z)$ .
2. Calculer  $G(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)P(p)]$  sachant que
  - la transmittance du processus à commander est donnée par  $P(p) = \frac{1}{1+2p}$
  - la période d'échantillonnage  $T$  est égale à 1 seconde.

On pose  $e^{-0,5} = 0,607$

Pour la suite on adoptera  $G(z) = \frac{0,393}{z-0,607}$

## II. ETUDE DU SYSTEME EN MODE ASSERVISSEMENT

Dans ce mode de fonctionnement les perturbations ne sont pas prises en compte ( $b(t) = 0$ ).

3. En admettant que le correcteur numérique soit un simple gain  $C(z) = K$ , étudier, selon le critère de ROUTH modifié, la stabilité du système en fonction de  $K$ .
4. Tracer précisément le lieu d'EVANS et déterminer sur ce lieu :
  - la valeur  $K_{os}$  de  $K$  pour laquelle le système est juste oscillant,
  - la pulsation  $\omega_{os}$  des auto-oscillations.
5. Calculer la valeur  $K_1$  de  $K$  donnant un pôle à l'origine ( $z = 0$ ) en boucle fermée.

6. Pour cette valeur  $K = K_1$  :
  - déterminer la  $FTBF(z)$ ;
  - calculer l'erreur  $\varepsilon_v(x)$ , avec  $x = z^{-1}$ , lorsque l'entrée  $e(t)$  est égale à  $tu(t)$ ;
  - conclure sur la précision du système bouclé.
7. On se propose de corriger l'asservissement par un correcteur  $C_1(x)$  annulant l'erreur séquentielle de vitesse,  $\varepsilon_v(x)$ , en temps minimal.
  - Déterminer le correcteur  $C_1(x)$  par la méthode de VOLGUINE.
  - Donner l'équation récurrente à programmer pour réaliser le filtre numérique  $C_1(x)$ .
8. Déterminer alors les éléments suivants :
  - la  $FTBO(x)$  et la  $FTBF(x)$ ;
  - l'erreur séquentielle  $\varepsilon_v(x)$  ainsi que  $\varepsilon_a(\infty)$ ;
  - la séquence  $M(x)$  issue du calculateur ;
  - la sortie  $S(x)$  du processus  $P(p)$ .

Les expressions  $S(z)$  et  $M(z)$  seront données sous forme polynomiale :

$$S(z) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + s_3 z^{-3} + \dots$$

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + m_3 z^{-3} + \dots$$

9. A partir des expressions précédentes tracer le signal  $m(t)$  issu du convertisseur numérique analogique (CNA) et donner l'allure des signaux  $s(t)$  et  $\varepsilon_v(t)$ .

### III. ETUDE DU SYSTEME EN MODE REGULATION

Dans ce cas on considère que l'entrée principale est nulle [ i.e  $e(t) = 0$  ].

10. Déterminer le correcteur  $C_2(x)$  permettant d'annuler en temps minimal l'erreur séquentielle induite par un échelon de perturbation  $b(t)$  tel que :

$$B(p) = \frac{e^{-\mu T p}}{p} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \mu < 1$$

Cette notation indique que la perturbation  $b(t)$  est un échelon  $u(t)$  intervenant à un instant quelconque  $\mu T$  entre deux périodes d'échantillonnage (cas en pratique).

11. Dans le cas particulier ou  $\mu = 0,5$  tracer le signal  $m(t)$  en sortie du convertisseur numérique analogique ainsi que l'erreur et le signal  $s(t)$  obtenu en sortie du processus.

### 1. Calcul de l'erreur échantillonnée

On trouve :

$$\mathcal{E}(z) = \frac{E(z) - \mathbf{Z}[B(p)P(p)]}{1 + C(z)\mathbf{Z}[B_0(p)P(p)]}$$

### 2. Calcul de $G(z) = \mathbf{Z}\left[B_0(p)\frac{1}{1+2p}\right]$ .

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p(1+2p)}\right] = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z}\left[\frac{0,5}{p(p+0,5)}\right]$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[ \frac{(1-e^{-0,5})z}{(z-1)(z-e^{-0,5})} \right] = \frac{(1-a)}{(z-a)} \quad \text{avec} \quad a = e^{-0,5} = 0,607$$

### 3. Etude de la stabilité selon le critère de ROUTH modifié<sup>1</sup>.

$$FTBF(w) = \frac{FTBO(w)}{1 + FTBO(w)} = \frac{Nbf(w)}{Dbf(w)}$$

$$Dbf(w) = Nbo(w) + Dbo(w)$$

$$FTBO(w) = K \left[ \frac{1-a}{z-a} \right]_{z=\frac{1+w}{1-w}} = K \frac{(1-a)(1-w)}{(1+w)-a(1-w)} = \frac{Nbo(w)}{Dbo(w)}$$

$$Dbf(w) = (1+w) - a(1-w) + K(1-a)(1-w) = (1-a)(1+K) + w(1+a - K(1-a))$$

Le système est stable si :

$$\boxed{-1 < K < \frac{1+a}{1-a}} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_{os} = \frac{1+a}{1-a} = 4,083}$$

$$w_{os} = jv_{os} = j\infty$$

$$v_{os} = tg\left(\frac{\omega_{os}T}{2}\right) = \infty \Rightarrow \omega_{os} = \frac{\pi}{T} = \pi \text{ rd/s}$$

### 4. Tracé du lieu de EVANS.

$$FTBO(z) = K \frac{(1-a)}{(z-a)}$$

Le lieu de EVANS est le lieu des racines de l'équation  $Dbf(z) = Num(1 + FTBO(z)) = 0$ .

$$(z-a) + K(1-a) = 0 \Rightarrow K = \frac{z-a}{a-1}$$

---

<sup>1</sup> Pour mémoire  $w = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$

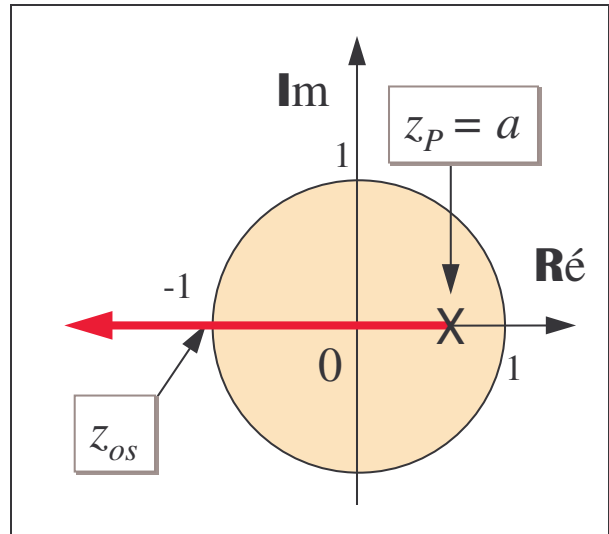
La  $FTBO(z)$  présente :

- 1 pôle  $z_{p1} = a \Rightarrow$  1 point de départ
- pas de zéro  $\Rightarrow$  1 point d'arrivée à l'infini  
 $\Rightarrow$  1 direction asymptotique  $(2\lambda + 1)\pi$

Il y a auto-oscillation pour  $z = -1$  soit :

- $K_{os} = \frac{1+a}{1-a}$
- $z_{os} = -1 = e^{jT\omega_{os}} = e^{j\pi}$   
 $\omega_{os} = \frac{\pi}{T} = \pi \text{ rd/s}$

$\Rightarrow$



### 5. Calcul de la valeur $K_1$ de $K$ donnant un pôle à l'origine en boucle fermée

$$FTBF(z) = \frac{FTBO(z)}{1 + FTBO(z)} = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)}$$

$$FTBF(z) = \frac{K(1-a)}{z + K(1-a) - a}$$

On obtient un pôle à l'origine pour :

$$K_1 = \frac{a}{1-a} = 1,54$$

### 6. Calcul de l'erreur de vitesse.

Il vient alors :

$$FTBF(z) = az^{-1}$$

Si  $e(t) = tu(t) \Rightarrow E(x) = \frac{Tx}{(1-x)^2}$  avec  $T = 1s$

$\varepsilon(x) = E(x)(1-ax) = \frac{x(1-ax)}{(1-x)^2}$  ; Par division selon les puissances croissantes de  $x$  on trouve :

$$\varepsilon(x) = x + (2-a)x^2 + (3-2a)x^3 + (4-3a)x^4 + \dots + (n-(n-1)a)x^n + \dots$$

Ainsi l'erreur ne cesse de croître et tend vers l'infini avec  $n$ . Ce système n'est pas précis puisque sa  $FTBO$  ne contient pas d'intégration.

### 7. Calcul du correcteur selon VOLGUINE.

$$G(x) = \frac{Ng(x)}{Dg(x)} = \frac{Ng^+(x)Ng^-(x)}{Dg^+(x)Dg^-(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Ng^+(x) = \text{partie compensable de } Ng(x) \\ Ng^-(x) = \text{partie non compensable de } Ng(x) \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{(1-a)x}{(1-ax)} = \frac{Ng^+Ng^-}{Dg^+Dg^-} \quad \text{et} \quad E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow E(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{R}{L^+}$$

$R = x$	$Ng^+ = 1$	$Dg^+ = (1 - ax)$
$L^+ = (1 - x)^2$	$Ng^- = (1 - a)x$	$Dg^- = 1$

Déterminons le correcteur  $C_1(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$  qui minimise la durée du régime transitoire.

$$\varepsilon(x) = \frac{E(x)}{1 + C_1(x)G(x)} = E(x)[1 - FTBF(x)] = \frac{R}{L^+ + \frac{L^+ A N g^+ N g^-}{B D g^+ D g^-}}$$

Le correcteur  $C_1(x)$  compense les parties compensables de  $G(x)$ . Ainsi :

$$C_1(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A' D g^+}{B' L^+ N g^+}$$

L'erreur séquentielle  $\varepsilon(x) = \frac{R B' D g^-}{L^+ B' D g^- + A' N g^-}$  est un polynôme en  $x$  de degré fini minimal si son polynôme dénominateur vérifie l'égalité :

$$L^+ D g^- B' + N g^- A' \equiv 1$$

On détermine  $A'$  et  $B'$  par résolution de cette équation polynomiale. L'équation est régulière aussi :

$$\begin{cases} \|B'\| = \|N g^-\| - 1 = 0 \\ \|A'\| = \|L^+\| + \|D g^-\| - 1 = 2 + 0 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B' = 1 \\ A' = a_0 + a_1 x \end{cases}$$

$$L^+ D g^- B' + N g^- A' \equiv 1 \Rightarrow (1 - x)^2 + (1 - a)x(a_0 + a_1 x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2/(1 - a) \\ a_1 = -1/(1 - a) \end{cases}$$

$$C_1(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A' D g^+}{B' L^+ N g^+} \Rightarrow \boxed{C_1(x) = \frac{2}{(1 - a)} \frac{(1 - 0,5x)(1 - ax)}{(1 - x)^2}}$$

Le correcteur insère deux intégrations dans la chaîne directe de l'asservissement. Cette action permet d'obtenir la précision désirée. Il ajuste le gain et compense les pôles et zéros compensables de telle sorte que la *FTBO* soit la plus simple.

$$\boxed{C_1(x) = 5,09 \frac{1 - 1,107x + 0,3035x^2}{1 - 2x + x^2}}$$

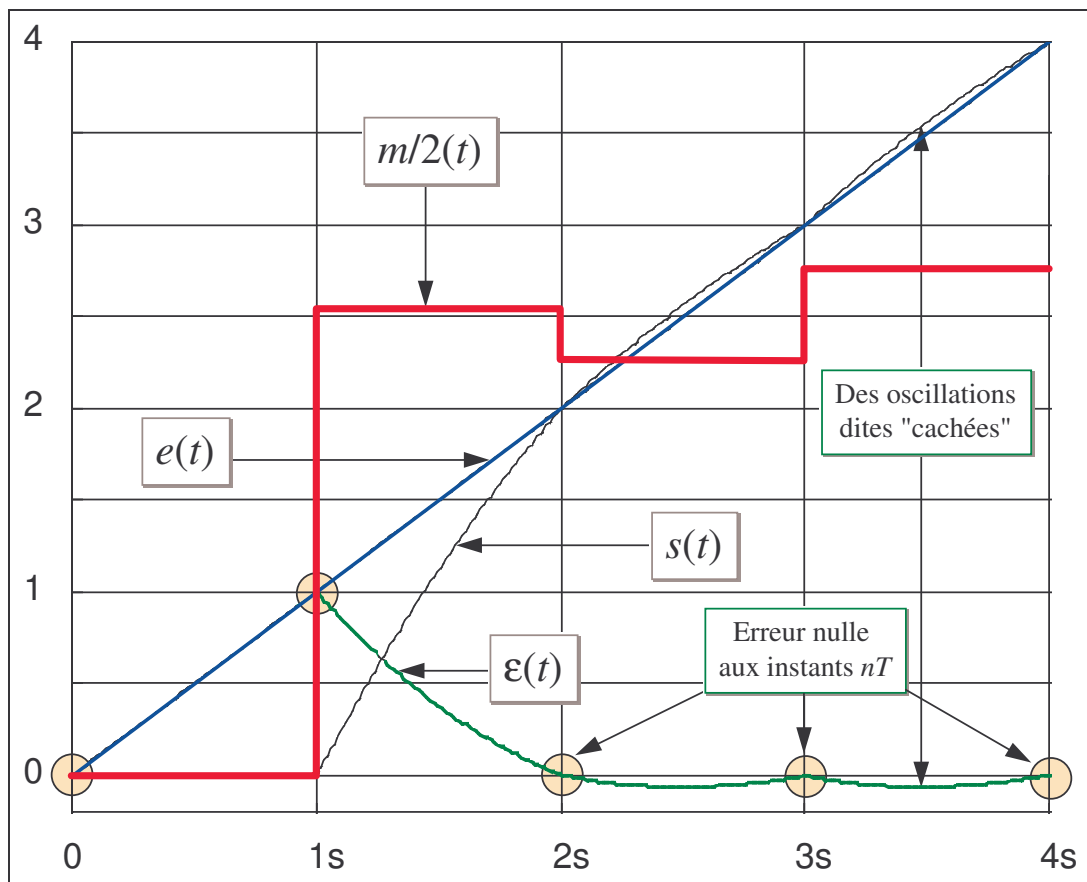
Ce correcteur est stable et physiquement réalisable. L'équation récurrente à programmer est la suivante :

$$\boxed{m_n = 2m_{n-1} - m_{n-2} + 5,09\varepsilon_n - 5,63\varepsilon_{n-1} + 1,54\varepsilon_{n-2}}$$

## 8. Calcul de signaux

	<i>Système à temps de réponse minimal</i>	<i>Résultats</i>
Correcteur $C(x)$	$A = A'(1-x)^{\alpha} Dg_1^{+}$ $B = B' Ng^{+} L^{+}$ $L^{+} Dg^{-} B' + Ng^{-} A' = 1$	$C_1(x) = \frac{2}{(1-a)} \frac{(1-0,5x)(1-ax)}{(1-x)^2}$
$FTBO(x)$	$C(x)G(x)$	$FTBO(x) = \frac{2x(1-0,5x)}{(1-x)^2}$
$FTBF(x) = \frac{S(x)}{E(x)}$ Si $e(t) = tu(t)$	$FTBF(x) = A' Ng^{-}$	$FTBF = 2x - x^2$
Erreur $\mathcal{E}(x)$	$\mathcal{E}(x) = RDg^{-} B'$	$\mathcal{E}(x) = x$
Commande $M(x)$	$M(x) = \frac{RA' Dg_1^{+} Dg^{-}}{(1-x)^{n-\alpha+1} Ng^{+}}$ $M(x) = \mathcal{E}(x)C_1(x)$	$M(x) = 5,09 \frac{x - 1,107x^2 + 0,3035x^3}{1 - 2x + x^2}$ $M(x) = 5,09[x + 0,9x^2 + 1,1x^3 + 1,4x^4 + \dots]$
Sortie $S(x)$	$S(x) = FTBF(x)E(x)$	$S(x) = \frac{2x^2 - x^3}{1 - 2x + x^2}$

## 9. Tracé des signaux



## 10. Calcul du régulateur

### • Calcul de l'erreur

L'entrée principale (celle qui fixe la consigne est nulle)  $\Rightarrow \mathcal{E}(z) = \frac{-\mathbf{Z}[B(p)P(p)]}{1 + C(z)\mathbf{Z}[B_0(p)P(p)]}$

Calculons le terme  $\mathbf{Z}[B(p)P(p)]$

$$\mathbf{Z}[B(p)P(p)] = \mathbf{Z}\left[\frac{e^{-\mu T p}}{p(1+2p)}\right] = \mathbf{Z}_m\left[\frac{0,5}{p(p+0,5)}\right]_{m=1-\mu} = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-0,5(1-\mu)}}{z - e^{-0,5}}$$

$$\mathbf{Z}[B(p)P(p)] = \frac{1}{z-1} - \frac{aa^{-\mu}}{z-a} = \frac{z(1-aa^{-\mu}) - (a-aa^{-\mu})}{(z-1)(z-a)} = \frac{(1-aa^{-\mu})x \left[1 - \frac{(a-aa^{-\mu})}{(1-aa^{-\mu})}x\right]}{(1-x)(1-ax)}$$

$$\mathbf{Z}[B(p)P(p)] = \frac{bx[1-cx]}{(1-x)(1-ax)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b = (1-aa^{-\mu}) \\ c = \frac{(a-aa^{-\mu})}{(1-aa^{-\mu})} \end{cases} \quad \text{et } a = 0,607$$

### • Calcul du correcteur

$$G(x) = \frac{(1-a)x}{(1-ax)} = \frac{Ng^+ Ng^-}{Dg^+ Dg^-} \quad \text{et} \quad -\mathbf{Z}[B(p)P(p)] = \frac{-bx[1-cx]}{(1-x)(1-ax)} = \frac{R}{L^+}$$

$R = -bx[1-cx]$	$Ng^+ = 1$	$Dg^+ = (1-ax)$
$L^+ = (1-x)(1-ax)$	$Ng^- = (1-a)x$	$Dg^- = 1$

Déterminons le correcteur  $C_2(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$  qui minimise la durée du régime transitoire.

$$\mathcal{E}(x) = \frac{-\mathbf{Z}[B(p)P(p)]}{1 + C_2(x)G(x)} = \frac{R}{L^+ + \frac{L^+ ANg^+ Ng^-}{BDg^+ Dg^-}}$$

Le correcteur  $C_2(x)$  compense les parties compensables de  $G(x)$ . Ainsi :

$$C_2(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'Dg^+}{B'L^+ Ng^+}$$

L'erreur séquentielle :

$$\mathcal{E}(x) = \frac{RB'Dg^-}{L^+ B'Dg^- + A'Ng^-}$$

est un polynôme en  $x$  de degré fini minimal si son polynôme dénominateur vérifie l'égalité :

$$L^+ Dg^- B' + Ng^- A' \equiv 1$$

On détermine  $A'$  et  $B'$  par résolution de cette équation polynomiale.

L'équation est régulière aussi :

$$\begin{cases} \|B'\| = \|Ng^-\| - 1 = 0 \\ \|A'\| = \|L^+\| + \|Dg^-\| - 1 = 2 + 0 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B' = 1 \\ A' = a_0 + a_1x \end{cases}$$

$$L^+Dg^-B' + Ng^-A' \equiv 1 \Rightarrow (1-x)(1-ax) + (1-a)x(a_0 + a_1x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+a)/(1-a) \\ a_1 = -a/(1-a) \end{cases}$$

$$C_1(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'Dg^+}{B'L^+Ng^+} \Rightarrow \boxed{C_2(x) = \frac{(1+a)}{(1-a)} \frac{(1 - \frac{a}{1+a}x)}{(1-x)}}$$

Le correcteur insère une intégration dans la chaîne directe de l'asservissement. Cette action permet d'obtenir la précision désirée. Il ajuste le gain et compense les pôles et zéros compensables de telle sorte que la *FTBO* soit la plus simple.

$$\boxed{C_2(x) = 4,09 \frac{1 - 0,378x}{1-x}}$$

## 11. Tracé des signaux dans le cas particulier où $\mu = 0,5$

$$\text{Si } \begin{cases} \mu = 0,5 \\ a = 0,607 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} b = (1 - aa^{-\mu}) = 0,221 \\ c = \frac{(a - aa^{-\mu})}{(1 - aa^{-\mu})} = -0,779 \end{cases}$$

L'erreur est égale à :

$$\varepsilon(x) = RB'Dg^- = -bx[1 - cx] = -0,221x - 0,172x^2 \text{ et}$$

$$M(x) = \varepsilon(x)C_2(x) = -0,904 \frac{(x + 0,778x^2)(1 - 0,378x)}{1-x} = -(0,904x + 1,266x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$

Sur l'enregistrement ci-dessous on retrouve les résultats théoriques.



