

Chapitre 1

Processus d'échantillonnage

1.1. Définition

- 1.1.1. Signal discret
- 1.1.2. Signal échantillonné
- 1.1.3. Systèmes discrets et échantillonnés

1.2. Transformée de Laplace du signal échantillonné

- 1.2.1. Méthode directe
- 1.2.2. Méthode de convolution complexe

1.3. Analyse spectrale du signal échantillonné

- 1.3.1. Propriétés de $X^*(p)$
- 1.3.2. Pôles et zéros de $X^*(p)$
- 1.3.3. Spectre de $x^*(t)$

1.1. DEFINITION

1.1.1. SIGNAL DISCRET

Un signal discret est une suite ordonnée de nombres $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qui constitue une *séquence numérique*. Chaque nombre x_n est caractérisé par sa valeur et son rang n dans la suite. Ce signal est en général indépendant du temps. Cependant les valeurs x_n peuvent être lues ou restituées selon la cadence d'une horloge.

On peut généralement définir un signal discret par une *équation récurrente*. Par exemple :

$$x_{n+1} - ax_n = 0 \quad \text{avec} \quad x_0 = C$$

On vérifie que la solution est $x_n = Ca^n$

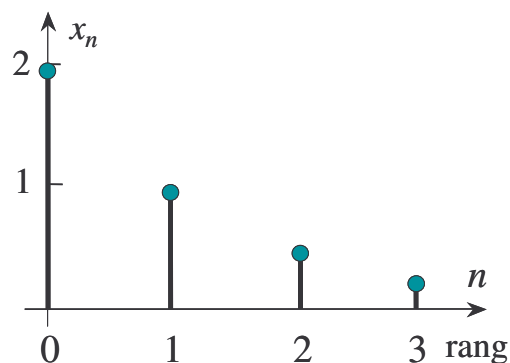


Figure 1 : Signal discret

Un signal discret peut être obtenu par le prélèvement régulier d'échantillons d'un signal continu $x(t)$. La valeur de $x(t)$ à l'instant de prélèvement $t = nT$ est notée $x(nT)$. La période de prélèvement T est la *période d'échantillonnage*.

1.1.2. SIGNAL ECHANTILLONNE

On obtient un signal échantillonné en convertissant un signal continu $x(t)$ en un signal discret noté $x^*(t) = x(nT)$ obtenu par **prélèvement** toutes les T secondes de l'amplitude de $x(t)$. Cette opération est réalisée à partir d'un échantillonneur qui se ferme à la cadence T .

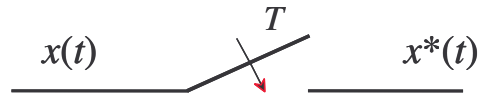


Figure 2 : Échantillonneur idéal

On obtient le signal suivant :

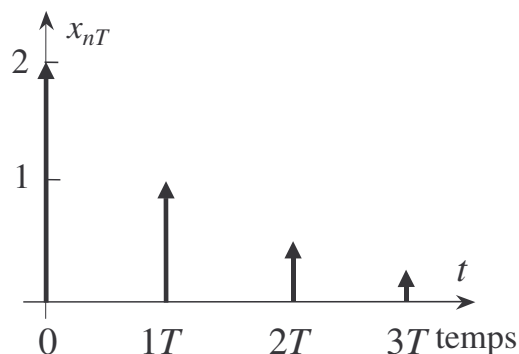


Figure 3 : Modèle du signal échantillonné

Un signal échantillonné peut être modélisé par une suite d'impulsions de DIRAC.

Le signal échantillonné est représenté par l'expression :

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots + x(nT)\delta(t-nT) + \dots$$

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \\ x^*(t) &= x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \end{aligned}$$

Cette expression décrit le signal échantillonné dans le domaine temporel (variable réelle t). Pour décrire le signal échantillonné dans le domaine fréquentiel nous aurons recours à la transformation de LAPLACE (variable complexe p).

Pratiquement l'acquisition d'un échantillon n'est pas instantanée. Cette opération dure un temps fonction des performances des composants de la chaîne numérique. Nous le négligerons car il est généralement très petit devant la période d'échantillonnage. En commande numérique nous ne traitons pas directement d'impulsions puisque l'information est échantillonnée, numérisée et mémorisée par un **convertisseur analogique numérique** (CAN). Signalons qu'en télécommunications on traite parfois des signaux échantillonnés caractérisés par des **impulsions de largeur donnée**. Il convient alors de tenir compte de ce paramètre.

1.1.3. SYSTEMES DISCRETS ET ECHANTILLONNES

Un système discret est un système qui reçoit un signal d'entrée discret et fournit après traitement un signal de sortie discret.

Un système échantillonné reçoit en entrée un signal discret (issu périodiquement d'un calculateur numérique par exemple) et fournit en sortie un signal continu.

1.2. TRANSFORMEE DE LAPLACE DU SIGNAL ECHANTILLONNE

1.2.1. METHODE DIRECTE

Par définition la transformée de LAPLACE du signal échantillonné est donnée par :

$$\mathbf{L}x^*(t) = X^*(p) = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt$$

$$X^*(p) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-pt} dt$$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT) e^{-pt} dt$$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp}$$

Exemple n° 1 : Soit $x(t) = u(t)$ avec
$$\begin{cases} u(t) = 0 ; \forall t < 0 \\ \text{et} \\ u(t) = 1 ; \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp} = 1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots + e^{-nTp} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \quad \text{avec} \quad |e^{-Tp}| < 1$$

Exemple n° 2 : Soit $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-nTp} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(a+p)nT}$$

$$X^*(p) = 1 + e^{-T(p+a)} + e^{-2T(p+a)} + \dots + e^{-nT(p+a)} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-T(p+a)}} \quad \text{avec} \quad |e^{-T(p+a)}| < 1$$

1.2.2. METHODE DE CONVOLUTION COMPLEXE

Dans la suite du cours nous serons amenés à considérer *des signaux* $x(t)$ admettant une transformée de LAPLACE de la forme :

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\prod_{i=1}^n (p - p_{Z_i})}{\prod_{j=1}^d (p - p_{P_j})} \quad \text{avec} \quad n \leq d - 1$$

Cette hypothèse n'a rien de restrictif. En effet elle est toujours vérifiée dès lors que le signal est issu d'une transmittance physiquement réalisable excitée en entrée par un signal de type polynomial.

Pour tenir compte des éventuelles discontinuités de première espèce qui affecteraient $x(t)$ on écrit :

$$x(t) = \frac{1}{2} x(t^-) + \frac{1}{2} x(t^+)$$

Appliquons la relation de MELLIN-FOURIER

$$x(t) = \frac{1}{2} x(t^-) + \frac{1}{2} x(t^+) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp$$

$$\text{En particulier comme } x(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} x(0^+) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) dp$$

Avec $c > \sigma_2$ = abscisse de convergence de $F(p)$

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp} = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{2} x(0^+) + \sum_{n=1}^{\infty} x(nT) e^{-nTp}$$

$$\text{Par ailleurs } x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) e^{nTv} dv$$

Aussi peut-on écrire :

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) dv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) e^{nT(v-p)} dv$$

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) e^{nT(v-p)} dv$$

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \sum_{n=0}^{\infty} e^{nT(v-p)} dv$$

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} |e^{-T(p-v)}| < 1 \Rightarrow \text{Ré}(p-v) > 0 \\ \text{soit} \\ \text{Ré}(p) = \sigma_1 > \text{Ré}(v) = c > \sigma_2 \end{cases}$$

Traçons dans le plan complexe les pôles de $X(v)$. Ils sont en nombre limité et à partie réelle négative.

Les singularités de $\Delta_T(p-v) = \frac{1}{1-e^{-T(p-v)}}$ sont données par :

$$1-e^{-T(p-v)}=0 \quad e^{-T(p-v)}=e^{j2k\pi} \Rightarrow -T(p-v)=j2k\pi \Rightarrow v=p+jk\frac{2\pi}{T}$$

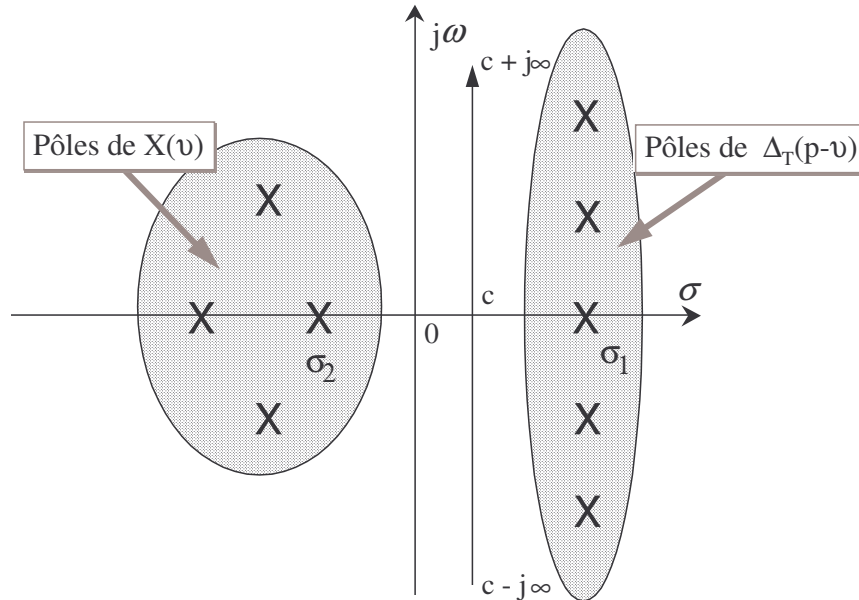


Figure 4 : Carte des pôles des $X^*(p)$

a . Calcul de $X^*(p)$ par la méthode des résidus sur le contour Γ_1

$$\text{Calculons } X^*(p) = \frac{1}{2}x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1-e^{-T(p-v)}} = \frac{x(0^+)}{2} + \mathbf{I}$$

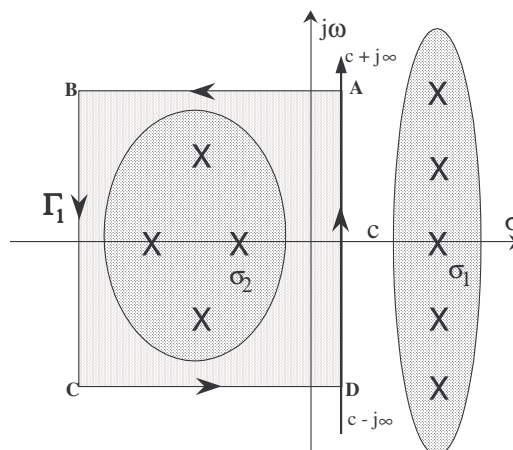


Figure 5 : Intégration selon le contour Γ_1

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(v) \cdot \frac{dv}{1-e^{-T(p-v)}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1-e^{-T(p-v)}} + \frac{1}{2\pi j} \int_{\text{Contour ABCD}} X(v) \cdot \frac{dv}{1-e^{-T(p-v)}}$$

Sur les segments (AB) et (CD) les valeurs des intégrales sont opposées.

Sur le segment (BC) on a :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} vX(v) = x(0^+) \quad \text{et} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} e^{Tv} = 0 \quad \text{car} \quad \text{Ré}(v) < 0.$$

Ainsi il vient :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\text{Contour ABCD}} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{BC} \frac{x(0^+)}{v} dv$$

Posons :

$$v = \rho.e^{j\theta} \Rightarrow dv = j\rho.e^{j\theta}.d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\text{Contour ABCD}} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{x(0^+)}{2\pi j} \int_{BC} \frac{dv}{v} = \frac{x(0^+)}{2\pi j} \int_{+\pi/2}^{+3\pi/2} j d\theta = \frac{x(0^+)}{2}$$

En conséquence :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \sum_{\text{pôles de } X(v)} \text{Résidus} \frac{X(v)}{1 - e^{-T(p-v)}} = \mathbf{I} + \frac{x(0^+)}{2} = X^*(p)$$

En définitive :

$$X^*(p) = \sum_{\text{pôles de } X(v)} \text{Résidus} \frac{X(v)}{1 - e^{-T(p-v)}}$$

b. Calcul de $X^(p)$ par la méthode des résidus sur le contour Γ_2*

$$\text{Calculons} \quad X^*(p) = \frac{1}{2}x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{x(0^+)}{2} + \mathbf{I}$$

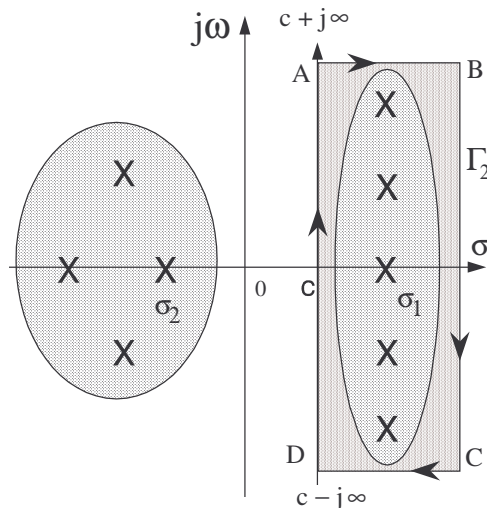


Figure 6 : Intégration selon le contour Γ_2

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} + \frac{1}{2\pi j} \int_{\text{Contour ABCD}} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}}$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v \cdot X(v) = x(0^+) \quad \text{et} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} e^{Tv} = \infty \quad \text{car} \quad \text{Ré}(v) > 0 \quad \text{aussi}$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{X(v)}{1 - e^{-T(p-v)}} = 0 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x(0^+)}{v(1 - e^{-T(p-v)})} = 0$$

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{x(0^+)}{2} + \mathbf{I}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(v) \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = \mathbf{I}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(v) \cdot \frac{dv}{1 - e^{-T(p-v)}} = - \sum_{\substack{\text{p\^oles de} \\ \Delta_T(p-v)}} \text{R\'esidus} \frac{X(v)}{1 - e^{-T(p-v)}} = \mathbf{I}$$

Les p\^oles de $\Delta_T(p-v) = \frac{1}{1 - e^{-T(p-v)}}$ sont simples et en nombre infini.

Si $X(v) = \frac{N(v)}{D(v)}$ il vient :

$$\text{R\'esidu } R_k = \frac{N(v_k)}{\left\{ \frac{d}{dv} [D(v)(1 - e^{-T(p-v)})] \right\}_{v=v_k}} \quad \text{avec} \quad v_k = p + jk \frac{2\pi}{T}$$

$$R_k = \frac{N(v_k)}{D(v) \left\{ \frac{d}{dv} (1 - e^{-T(p-v)}) \right\}_{v=v_k}} = -\frac{1}{T} \frac{N(v_k)}{D(v_k)} = -\frac{1}{T} X(v_k) = -\frac{1}{T} X(p + jk \frac{2\pi}{T})$$

Soit en d\'efinitive :

$$X^*(p) = \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(p + jk \frac{2\pi}{T})$$

1.3. ANALYSE SPECTRALE DU SIGNAL ECHANTILLONNE

1.3.1. PROPRIETES DE $X^*(p)$

Connaissant $X^*(p)$ calculons $X^*(p + jk\omega_e)$ avec $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$

$$X^*(p + jk\omega_e) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nT(p + jk\omega_e)}$$

$$X^*(p + jk\omega_e) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp} e^{-jnkT\omega_e}$$

$$X^*(p + jk\omega_e) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp}$$

$$X^*(p + jk\omega_e) = X^*(p)$$

$X^*(p)$ est une fonction périodique de période ω_e . Le spectre de $x^*(t)$ est donné par :

$$X^*(j\omega) = [X^*(p)]_{p=j\omega}$$

Celui de $x(t)$ est donné par :

$$X(j\omega) = [\mathcal{L}x(t)]_{p=j\omega}$$

1.3.2. POLES ET ZEROS DE $X^*(p)$

Considérons l'expression :

$$X^*(p) = \frac{1}{2}x(0^+) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(p + jk\frac{2\pi}{T}) \text{ dans laquelle } x(0^+) = 0$$

et traçons dans le plan complexe la constellation des pôles et des zéros de $X^*(p)$ à partir de celle de $X(p)$.

On observe que si tous les pôles P_j et zéros Z_i de $X(p)$ appartiennent à la bande de largeur ω_e la constellation des pôles et des zéros de $X^*(p)$ s'obtient par une infinité de translation $k\omega_e$ de cette bande. On vérifie aussi qu'il n'y a pas interférence d'une bande sur l'autre à la condition que :

$$\frac{\omega_e}{2} > \text{Max}\{\text{Im}(Z_i), \text{Im}(P_j)\}$$

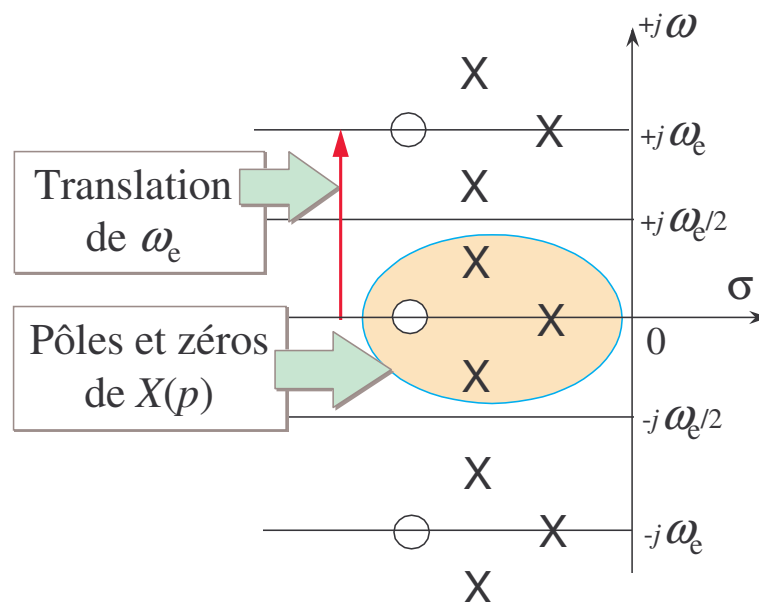


Figure 7 : Carte des pôles et des zéros de $X^*(p)$

1.3.3. SPECTRE DE $x^*(t)$

Considérons le spectre de $x(t)$ et plus particulièrement son module $|X(j\omega)|$. On admettra qu'il est borné par la pulsation ω_{\max} . La relation $X^*(p + jk\omega_e) = X^*(p)$ permet de réaliser sans ambiguïté les tracés suivants.

a. Soit $\omega_e > 2\omega_{\max}$

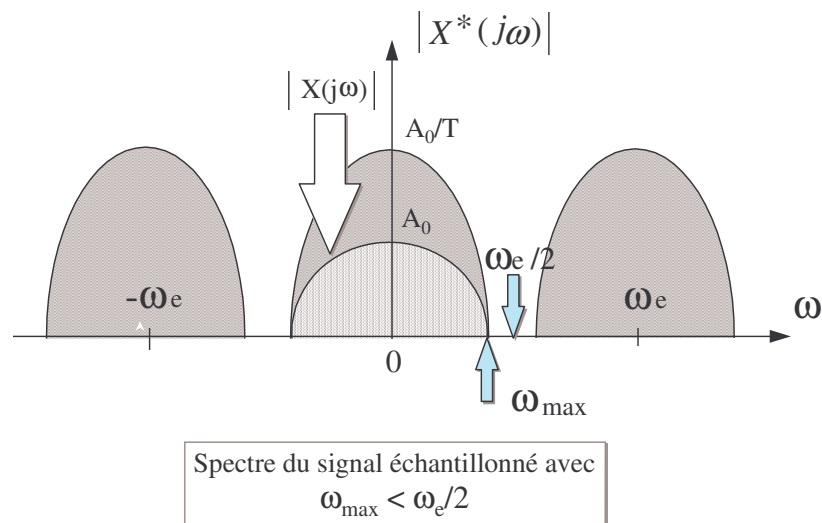


Figure 8 : Spectre sans recouvrement du signal échantillonné

Il n'y a pas de recouvrement de spectre car l'hypothèse $\omega_e > 2\omega_{\max}$ est vérifiée. On observe aussi que le spectre de $x^*(t)$ contient le spectre de $x(t)$. Il est donc possible d'extraire $x(t)$ de $x^*(t)$ par un filtrage approprié.

b. Soit $\omega_e < 2\omega_{\max}$

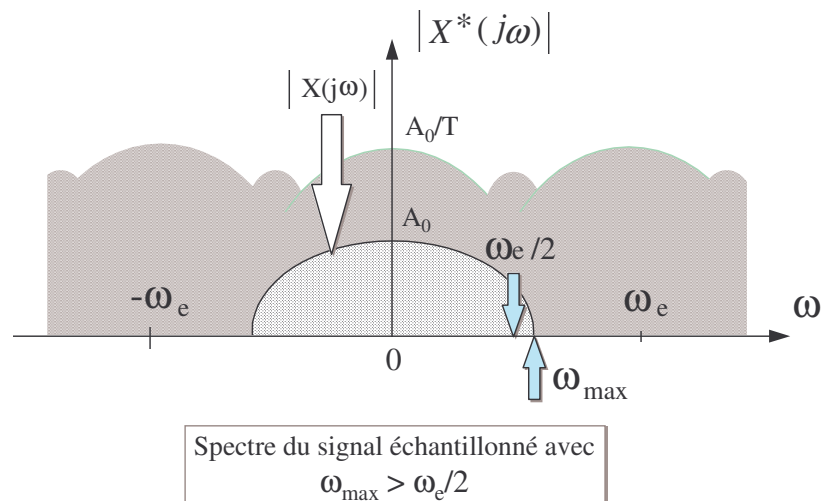


Figure 9 : Spectre avec recouvrement du signal échantillonné

On observe un **repliement du spectre** qui favorise la recombinaison de diverses composantes et provoque des distorsions de $X^*(j\omega)$. Il n'est pas possible de reconstruire correctement le signal $x(t)$ à partir d'un filtrage réalisé sur $x^*(t)$.

c. Conclusions

Il est important de choisir convenablement la période d'échantillonnage. Le théorème établi par SHANNON (1949) énonce *qu'un signal continu à bande de fréquence limitée ne contenant aucune pulsation supérieure à ω_{\max} peut être complètement reconstruit à partir d'une suite de prélèvements effectués à la période $T \leq \pi / \omega_{\max}$.*

Ce théorème a une portée pratique fondamentale puisqu'il permet d'estimer la période d'échantillonnage maximum à adopter si l'on veut recueillir toute l'information contenue dans le signal échantillonné. T ne doit pas être trop petit car le calculateur est en permanence sollicité pour commander le processus et il ne dispose de pas assez de temps pour effectuer les autres traitements. T ne doit pas être trop grand car entre deux commandes les écarts peuvent devenir importants auquel cas le signal de commande $m(t)$ peut être supérieur au seuil de saturation de l'électronique de commande. Pour des applications relevant de l'Automatique il est recommandé de choisir :

$$\frac{\pi}{12,5\omega_{\max}} \leq T \leq \frac{\pi}{2,5\omega_{\max}} \Rightarrow 5F_{\max} \leq F_{\text{éch.}} \leq 25F_{\max}$$

Remarque pratique importante :

Un signal analogique est souvent altéré par des bruits et perturbations de fréquences élevés. Aussi *avant d'échantillonner* un tel signal convient-il de le filtrer afin d'éliminer les bruits de pulsation supérieure à $\omega_e / 2$. Pour cela on insère un filtre passe bas dit *filtre de garde* ou filtre antirepliement.

En effet le phénomène de repliement de spectre explique que, si cette précaution n'est pas prise, la densité spectrale du bruit augmente, notamment dans la bande utile $-\omega_{\max} < \omega < +\omega_{\max}$.

On vérifie que si la condition de SHANNON est réalisée, les bandes évoquées ci-dessus à propos de l'étude de la constellation des pôles et des zéros du signal échantillonné, n'interfèrent pas entre elles.