

## CHAPITRE 9

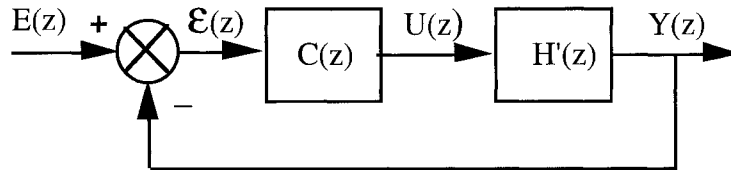
### LE REGULATEUR RST

#### 9.1. STRUCTURE DU REGULATEUR RST

##### 9.1.1. Conception

Les régulateurs numériques standard, en particulier le régulateur P.I.D, peuvent être considérés comme une transposition dans le domaine du numérique de fonctions relativement simples d'essence analogique. ***Le régulateur RST***, dont le nom reflète les trois polynômes en  $z$  qu'il fait intervenir, *est un algorithme plus sophistiqué exploitant à fond les ressources numériques dont on dispose et dont la synthèse est purement algébrique.*

Reprenons le schéma classique d'un système asservi numérique avec élément-correcteur.



où  $H'(z)$  représente le processus  $F(p)$  associé à un bloqueur d'ordre zéro :

$$H'(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{F(p)}{p} \right]$$

Les fonctions de transfert du correcteur et du processus peuvent se mettre sous la forme de fonctions rationnelles propres :

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)} \quad \text{et} \quad H'(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

où le degré du polynôme  $A(z)$  est strictement plus grand que celui du polynôme-numérateur  $B(z)$  (conditions de causalité à respecter).

L'algorithme de réglage peut s'exprimer par :

$$S(z) U(z) = R(z) E(z) - R(z) Y(z) \quad (1)$$

et la fonction de transfert en boucle fermée est donc :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{B(z) R(z)}{A(z) S(z) + B(z) R(z)} \quad (2)$$

Le régulateur RST respecte cette structure classique, mais généralise son application en introduisant dans l'expression de l'algorithme de réglage deux polynômes  $S(z)$  et  $T(z)$  distincts :

$$S(z) U(z) = T(z) E(z) - R(z) Y(z) \quad (3)$$

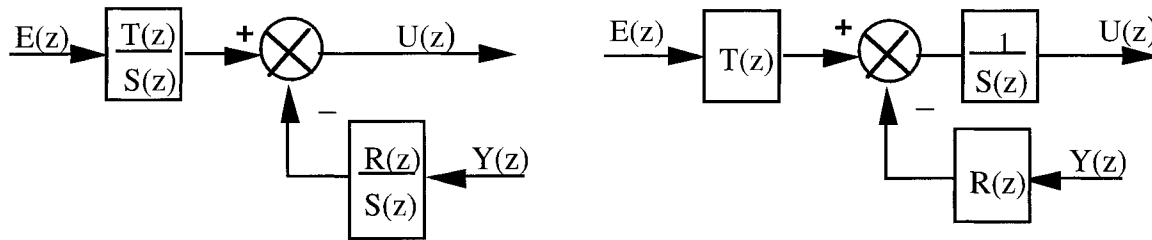
*Il n'y a donc plus de comparaison directe entre  $Y(z)$  et  $E(z)$ .*

La fonction de transfert de l'ensemble s'écrit maintenant :

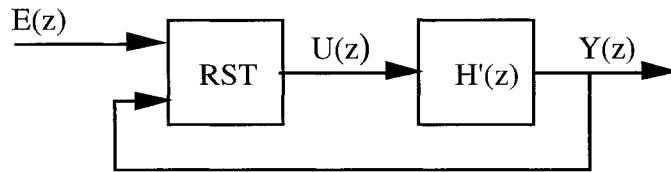
$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{B(z) T(z)}{A(z) S(z) + B(z) R(z)} \quad (4)$$

Une comparaison entre la forme précédente (2) et celle-ci (4) fait ressortir une différence importante entre les deux systèmes : le numérateur de la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée contient le polynôme  $T(z)$ , absent des termes du dénominateur. Un degré de liberté supplémentaire est ainsi introduit dans la synthèse du régulateur ; **le régulateur RST est dit à deux degrés de liberté** pour refléter ce potentiel étendu.

Le régulateur peut être illustré par un schéma fonctionnel à trois branches :



Symboliquement, on représente également le processus complété par le régulateur RST par le diagramme fonctionnel simplifié suivant :



Les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  sont respectivement choisis de degrés :  $\rho$ ,  $\sigma$  et  $\tau$  :

$$R(z) = r_0 z^\rho + r_1 z^{\rho-1} + \dots + r_\rho$$

$$S(z) = z^\sigma + s_1 z^{\sigma-1} + \dots + s_\sigma$$

$$T(z) = t_0 z^\tau + t_1 z^{\tau-1} + \dots + t_\tau$$

### 9.1.2. Codes de réalisation

Le respect des conditions de causalité impose que :

$$\begin{aligned} \sigma &\geq \tau \\ \sigma &\geq \rho \end{aligned}$$

**\* Première approche**

Dans le but de ne pas introduire de retard dans la commande et la réaction du système, on est souvent amené à prendre des polynômes de même degré :

$$\rho = \tau = \sigma$$

Ceci n'est réalisable que si les temps de calcul et de conversion AN et NA sont négligeables vis-à-vis de la période d'échantillonnage.

Dans ce cas, où tous les polynômes ont le même degré, l'algorithme de réglage (3) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_p z^{-p}) U(z) = & (t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_p z^{-p}) E(z) \\ & - (r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_p z^{-p}) Y(z) \end{aligned}$$

Ce qui conduit, dans le domaine temporel, à :

$$\begin{aligned} u_k = & -s_1 u_{k-1} - \dots - s_p u_{k-p} \\ & + t_0 e_k + t_1 e_{k-1} + \dots + t_p e_{k-p} \\ & - r_0 y_k - r_1 y_{k-1} - \dots - r_p y_{k-p} \end{aligned}$$

Le code réalisant le régulateur RST se fonde directement sur cette relation.

**Remarque** : On serait tenté d'implanter le régulateur directement à partir de sa représentation fonctionnelle à trois branches et non à partir de l'équation précédente. Ceci est à éviter dans le cas où l'un des trois polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$  serait, par exemple, un intégrateur qui ne respecte pas les conditions de stabilité BIBO (c.f. chapitre 5. §5.1.1.).

### \* Deuxième approche

Lorsqu'il n'est pas possible de considérer que les calculs et conversions NA et AN sont de durée négligeable par rapport à la période d'échantillonnage  $T$ , on est conduit à choisir les degrés des trois polynômes de telle sorte que :

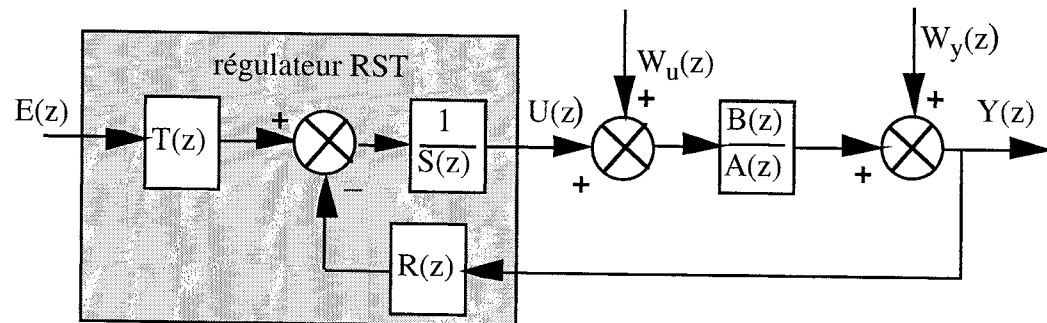
$$\sigma - 1 = \rho = \tau$$

Dans ce cas, on obtient le code du régulateur RST suivant :

$$\begin{aligned} u_{k+1} = & -s_1 u_k - s_2 u_{k-1} - \dots - s_p u_{k-p+1} \\ & + t_0 e_k + t_1 e_{k-1} + \dots + t_{p-1} e_{k-p+1} \\ & - r_0 y_k - r_1 y_{k-1} - \dots - r_{p-1} y_{k-p+1} \end{aligned}$$

### 9.1.3. Effet vis-à-vis des perturbations

Considérons l'effet du régulateur RST sur un système fonctionnant en régulation (consigne  $E$  constante) et soumis à des perturbations analogiques en amont et en aval du processus à régler :



Dans ce cas :

$$Y(z) = \frac{1}{A(z) S(z) + B(z) R(z)} [B(z) T(z) E(z) + B(z) S(z) W_u(z) + A(z) S(z) W_y(z)]$$

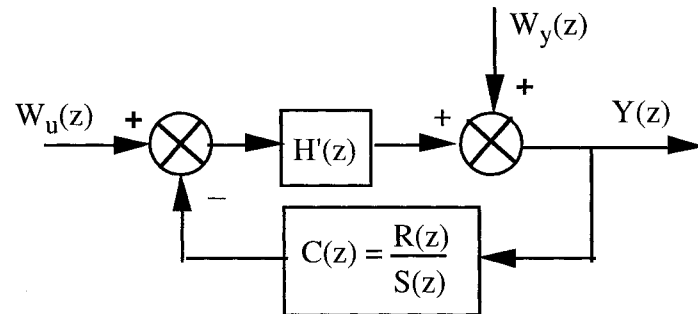
La consigne étant constante, on peut ne s'intéresser qu'aux termes de  $Y(z)$  dépendant des perturbations :

$$Y_u(z) = \frac{B(z) S(z)}{A(z) S(z) + B(z) R(z)} W_u(z) = \frac{H'(z)}{1 + \frac{R(z)}{S(z)} H'(z)} W_u(z)$$

et

$$Y_y(z) = \frac{A(z) S(z)}{A(z) S(z) + B(z) R(z)} W_y(z) = \frac{1}{1 + \frac{R(z)}{S(z)} H'(z)} W_y(z)$$

Ceci montre que vis-à-vis des perturbations  $w_u(t)$  et  $w_y(t)$  le système équipé d'un régulateur RST se comporte comme un ensemble classique, avec un correcteur  $C(z)$  placé dans la chaîne de retour :



Pour rejeter les effets des perturbations, il est nécessaire de prévoir la présence de  $l$  intégrateurs, obtenus en remplaçant le polynôme  $S(z)$  par  $(z - 1)^l S(z)$ , où  $l$  est le nombre d'intégrations nécessaires pour annuler la perturbation considérée ;  $l$  est aussi appelé le *type* ou la *classe du compensateur*.

Les conditions de causalité imposent maintenant :

$$\sigma + l - \rho \geq 0$$

$$\sigma + l - \tau \geq 0$$



## 9.2. SYNTHÈSE DU RÉGULATEUR RST

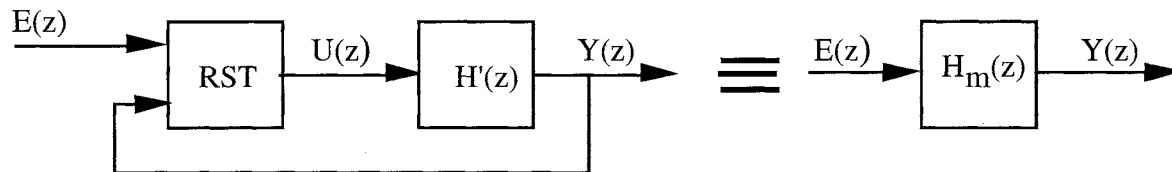
### 9.2.1. Principe

L'ensemble du processus, compensé par le régulateur RST, a pour fonction de transfert en boucle fermée la forme (4) :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{B(z) T(z)}{A(z) S(z) + B(z) R(z)}$$

Les trois polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  doivent être choisis et dimensionnés afin que cette fonction de transfert en boucle fermée réponde à un **modèle de référence**, ou **modèle à poursuivre**, préconisé par l'utilisateur :

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$



Il est évident que, pour assurer la stabilité de l'installation, le polynôme  $A_m(z)$  sera choisi pour ne présenter que des racines [pôles de  $H_m(z)$ ] dont les points représentatifs sont tous contenus à l'intérieur du cercle de rayon-unité.

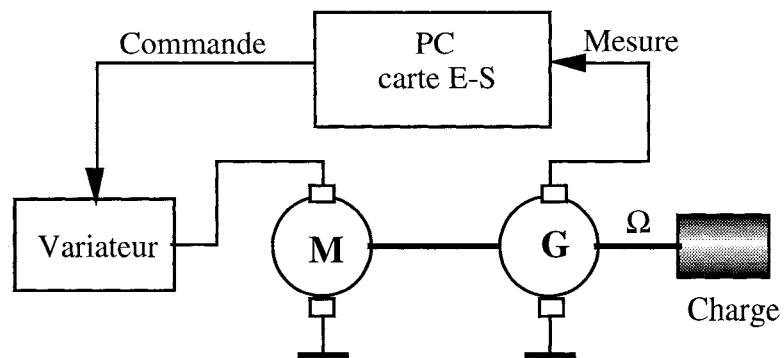
Le degré du polynôme  $A_m(z)$  n'est pas forcément égal à celui de :

$A(z)R(z) + B(z)S(z)$  ; En fait, un modèle à poursuivre très simple, avec un polynôme  $A_m(z)$  de degré nettement inférieur est généralement requis.

**Remarque** : Le régulateur RST étant à deux degrés de liberté, les zéros en boucle fermée [i.e. les zéros de  $B_m(z)$ ] peuvent eux aussi être positionnés dans le plan complexe, selon les désirs du concepteur.

### 9.2.2. Exemple de synthèse d'un régulateur RST

Afin de montrer l'efficacité de la méthodologie RST, nous nous appuyons sur un exemple de commande en vitesse d'un moteur à courant continu alimenté au travers d'un hâcheur commandé par MLI (c.f. *cours de Mécatronique, 1ère partie, chapitre 5*). Cet exemple est emprunté à un travail présenté aux JTEA '97 par J.M. RETIF, X. LIN-SHI et al. du CEGELY-INSAL.



La vitesse de rotation est mesurée par une génératrice tachymétrique G. Sur le banc d'essais utilisé, un frein électromagnétique permet d'appliquer des perturbations sur la sortie. Dans ce cas (*en se référant au § 9.1.3*), on peut écrire :

$$Y(z) = \frac{1}{P(z)} [B(z) T(z) E(z) + A(z) S(z) W_y(z)]$$

où :  $P(z) = A(z) S(z) + B(z) R(z)$

Le processus a été identifié, pour une période d'échantillonnage  $T = 0,2s$ , par une fonction de transfert du second ordre :

$$H'(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0,9259 z^{-1} - 0,8194 z^{-2}}{1 - 1,026 z^{-1} + 0,1393 z^{-2}}$$

Ce système possède un zéro inférieur à l'unité ( $z = 0,885$ ) et deux pôles réels stables ( $z = 0,865$  et  $z = 0,161$ ). *Notons que le modèle continu correspondant présente une pulsation propre non-amortie de  $6,48 \text{ rad.s}^{-1}$  et un coefficient d'amortissement réduit de  $0,76$ .*

On peut décrire le processus sous la forme :

$$H'(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0,9259 z^{-1} (1 - 0,885 z^{-1})}{(1 - 0,865 z^{-1})(1 - 0,161 z^{-1})}$$

Afin d'améliorer les performances de cet ensemble de commande, on désire effectuer la synthèse d'un correcteur RST en imposant au processus :

- une erreur statique nulle en sortie,

- un abaissement de son ordre (en  $z^{-1}$ ),
- un comportement en régulation du type premier ordre, avec un pôle de 0,8.

Pour satisfaire les deux premières conditions, on peut proposer que le terme  $S(z)$  du correcteur, placé en cascade avec le procédé  $H'(z)$ , soit :

$$S(z) = (1 - z^{-1}) (1 - 0,885 z^{-1})$$

de telle façon qu'il introduise une intégration (qui permet d'annuler l'erreur statique à une commande en échelon de position) et une compensation totale du zéro du polynôme  $B(z)$ .

La troisième condition peut être satisfaite en proposant que le polynôme  $P(z)$ , dénominateur des fonctions de transfert *Asservissement* et *Régulation*, soit :

$$P(z) = (1 - 0,8 z^{-1}) A(z)$$

En effet, le processus n'ayant pas de zéro supérieur à l'unité on peut, sans risque de provoquer une instabilité, simplifier sa fonction de transfert en boucle fermée par celui-ci.

D'une façon générale, l'équation :

$$A(z) S(z) + B(z) R(z) = P(z)$$

où :  $A(z)$ ,  $B(z)$  sont connus,

$P(z)$  est choisi au regard des performances à atteindre,

$S(z)$ ,  $R(z)$  sont inconnus,

est appelée *équation de Diophante* ou *identité de Bezout*.

Les divers polynômes de cette équation doivent être tels que l'on puisse, en regroupant les termes de même degré, identifier les coefficients inhérents à chacun d'eux de telle façon que l'égalité de Diophante soit satisfaite.

Dans notre exemple, on a :

$$A(z) = (1 - 0,865 z^{-1}) (1 - 0,161 z^{-1})$$

$$B(z) = 0,9259 z^{-1} (1 - 0,885 z^{-1})$$

$$P(z) = (1 - 0,8 z^{-1}) (1 - 0,865 z^{-1}) (1 - 0,161 z^{-1})$$

$$S(z) = (1 - z^{-1}) (1 - 0,885 z^{-1})$$

$R(z)$  reste inconnu.

Pour que l'égalité régissant l'équation de Diophante soit convenablement respectée, il faut que le polynôme  $R(z)$  soit de degré 2 et que le terme en  $z^{-4}$  de  $B(z) R(z)$  soit égal et opposé à celui équivalent de  $A(z) S(z)$ .

On posera donc : 
$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$

La résolution de l'équation de Diophante conduit par identification à :

$$R(z) = 1,1718 - 1,1211 z^{-1} + 0,1504 z^{-2}$$

$$R(z) = 1,1718 (1 - 0,9567 z^{-1} + 0,1283 z^{-2})$$

Pour compléter le régulateur RST, on pourra choisir par exemple le polynôme  $T(z)$  égal au polynôme  $P(z)$  :

$$T(z) = P(z) = (1 - 0,8 z^{-1}) A(z)$$

Dans ce cas la fonction de transfert en asservissement du procédé [vis-à-vis de la commande  $E(z)$ ] se réduit à  $B(z)$ , soit :

$$B(z) = 0,9259 z^{-1} - 0,8194 z^{-2}$$

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h^*(t) = b^*(t) = 0,9259 \delta(t-T) - 0,8194 \delta(t-2T)$$

