

Chapitre 10

Synthèse des correcteurs à temps de réponse minimal

10.1. Correcteurs à temps de réponse minimal

- 10.1.1. Présentation du problème
- 10.1.2. Résolution du problème
- 10.1.3. Exemples

10.2. Correcteurs à réponse « pile » ou « plate »

- 10.2.1. Problème à résoudre
- 10.2.2. Détermination du correcteur
- 10.2.3. Exemples

10.3. Synthèse des résultats

- 10.3.1. Tableau de synthèse
- 10.3.2. Aspects pratiques

10.1. CORRECTEURS A TEMPS DE REPONSE MINIMAL

10.1.1. PRESENTATION DU PROBLEME

On s'intéresse au système de commande bouclé classique représenté ci-dessous¹.

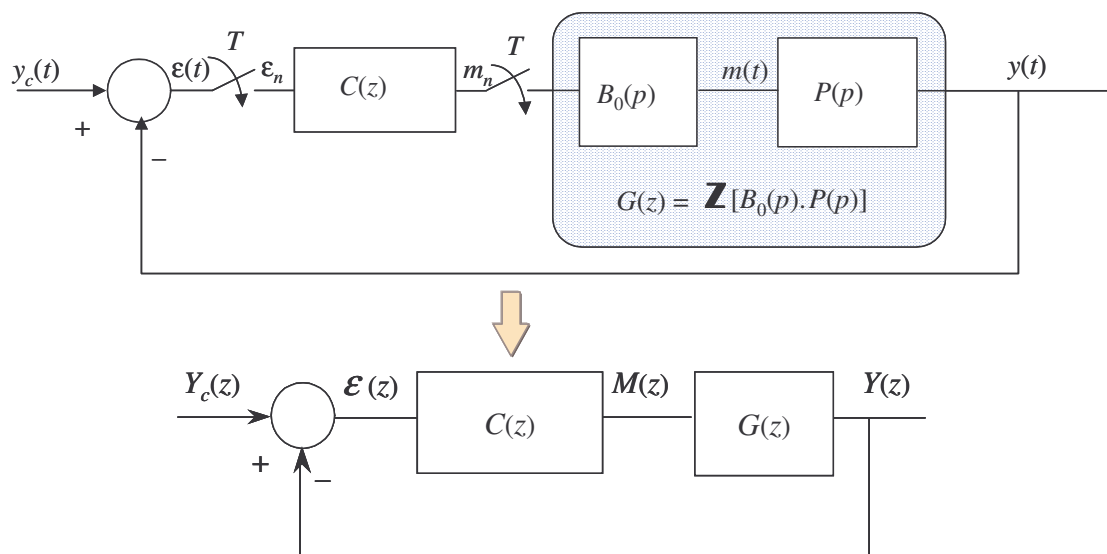


Figure 1 : Modèle numérisé de la boucle de commande

Il s'agit de déterminer le *correcteur stable et physiquement réalisable (causal)* $C(z)$ tel que *pour une entrée de référence* $y_c(t)$ donnée, l'erreur séquentielle, $\varepsilon(nT)$, *s'annule en temps minimum*. L'entrée de référence est un **polynôme en t** , nul pour $t < 0$, et tel que :

$$y_c(t) = \left[Y_{p0} + Y_{v0}t + Y_{a0} \frac{t^2}{2!} + \dots + Y_{n0} \frac{t^n}{n!} \right] u(t)$$

¹ On adopte dans les chapitres qui suivent une nouvelle notation. On appelle $y(t)$ la sortie du processus et $y_c(t)$ le signal d'entrée de la boucle de commande.

Ainsi :

$$\mathbf{Z}[y_c(t)] = Y_c(x) = \frac{V(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_nx^n}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{avec } x = z^{-1}$$

Par ailleurs :

$$FTBF(x) = \frac{Y}{Y_c}(x) = \frac{C(x)G(x)}{1 + C(x)G(x)}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{Y_c(x)}{1 + C(x)G(x)} = Y_c(x)[1 - FTBF(x)] \quad \text{et} \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\varepsilon(x)$$

L'erreur séquentielle s'annulant en un temps fini minimal, $\varepsilon(x)$ **est un polynôme en x de degré m fini et minimal** comportant $(m+1)$ termes.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1x + \varepsilon_2x^2 + \dots + \varepsilon_mx^m$$

Le temps de réponse t_r du système compensé est égal à $(m+1)T$.

10.1.2. RESOLUTION DU PROBLEME

$$\text{Soit } G(x) = \frac{Ng(x)}{Dg(x)} = \frac{Ng^+(x)Ng^-(x)}{Dg^+(x)Dg^-(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Ng^+(x) = \text{partie compensable de } Ng(x) \\ Ng^-(x) = \text{partie non compensable de } Ng(x) \end{cases}$$

$$\text{mise en facteurs telle que} \quad \begin{cases} Ng^+ \text{ a des racines } |x_i| > 1 \text{ (soit } |z_i| < 1) \text{ et } x_i = z_i = 1 \\ Ng^- \text{ a des racines } |x_i| \leq 1 \text{ soit } |z_i| \geq 1 \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le correcteur $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ qui minimise la durée du régime transitoire pour une entrée polynomiale. Dans cette hypothèse le degré m du **polynôme** $\varepsilon(x)$ est minimal et comporte donc un minimum de termes.

$$Y_c(x) = \frac{R(x)}{L^+(x)} = \frac{V(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_nx^n}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow \varepsilon(x) = \frac{R}{L^+ + \frac{L^+ A Ng^+ Ng^-}{B Dg^+ Dg^-}}$$

Le correcteur $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ compense les parties compensables de $G(x)$. Ainsi :

$$\boxed{C(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A' Dg^+}{B' L^+ Ng^+}}$$

L'erreur séquentielle $\varepsilon(x) = \frac{R B' Dg^-}{L^+ B' Dg^- + A' Ng^-}$ est un polynôme en x de degré fini minimal si son polynôme dénominateur vérifie l'égalité :

$$\boxed{L^+ Dg^- B' + Ng^- A' \equiv 1}$$

On détermine A' et B' par résolution de cette équation polynomiale selon la méthode présentée au § 9.2. L'équation est régulière aussi il existe une solution de degré minimal :

$$\begin{cases} \|B'_0\| = \|Ng^-\| - 1 \\ \|A'_0\| = \|L^+\| + \|Dg^-\| - 1 \end{cases}$$

On vérifie que le correcteur ainsi obtenu est stable et physiquement réalisable. Sinon on recherche une solution selon la démarche présentée au § 9.2.4.

L'erreur séquentielle est égale à :

$$\varepsilon(x) = R B' Dg^-$$

Le temps de réponse minimum (cas où $B' = B'_0$) du système compensé est donné par :

$$t_r = \{\|\varepsilon\| + 1\}T = \{\|R\| + \|Ng^-\| + \|Dg^-\|\}T$$

10.1.3. EXEMPLES

On considère l'asservissement de position (Cf. chapitre 8) :

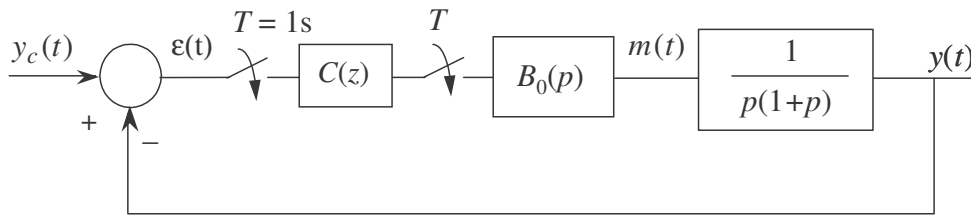


Figure 2 : Asservissement élémentaire de position

a. Calcul du correcteur $C_1(x)$

On désire déterminer le correcteur $C_1(x)$ permettant *d'annuler l'erreur séquentielle de position en temps minimal*.

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} = \frac{0,37(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} \Rightarrow G(x) = \frac{0,37x(1+0,7x)}{(1-x)(1-0,37x)} = \frac{Ng^+ Ng^-}{Dg^+ Dg^-}$$

$$Y_c(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y_c(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{R}{L^+}$$

$$R=1 \quad Ng^+ = 1+0,7x \quad Dg^+ = (1-x)(1-0,37x)$$

$$L^+ = 1-x \quad Ng^- = 0,37x \quad Dg^- = 1$$

Nous devons résoudre l'équation polynomiale $L^+ Dg^- B' + Ng^- A' \equiv 1$.

$$(1-x)B' + (0,37x)A' = 1$$

Cette équation est régulière aussi $\begin{cases} \|B'_0\| = \|Ng^-\| - 1 = 0 \\ \|A'_0\| = \|L^+\| + \|Dg^-\| - 1 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} B'_0 = b_0 = 1 \\ A'_0 = a_0 = 2,7 \end{cases}$

Ainsi :

$$C_1(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'_0 Dg^+}{B'_0 L^+ Ng^+} = \frac{2,7(1-0,37x)}{(1+0,7x)} = \frac{2,7-x}{1+0,7x}$$

Ce correcteur est stable et réalisable².

$$\varepsilon(x) = RB'_0 Dg^- = 1$$

$$t_r = \{\|\varepsilon\| + 1\}T = T = 1 \text{ s}$$

Procédons à la simulation du système compensé avec $C_1(x)$ en exploitant SIMULINK.

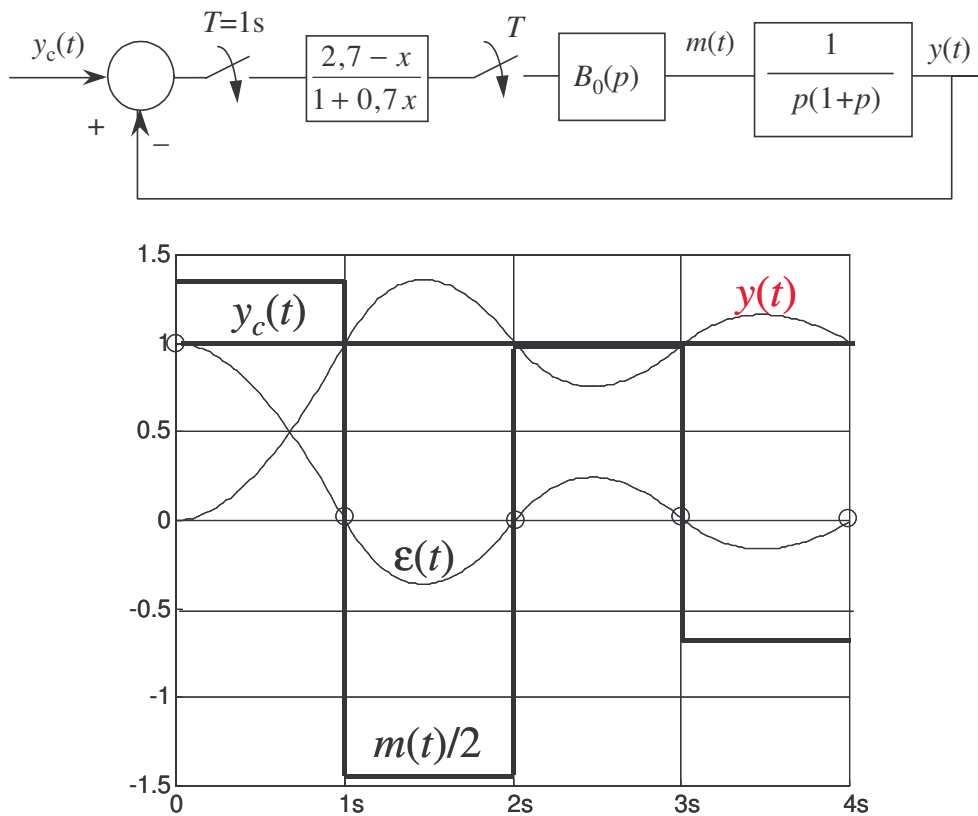


Figure 3 : Simulation du processus corrigé par $C_1(z)$

On observe qu'effectivement l'erreur aux instants d'échantillonnage s'annule en **une commande**. Cependant il existe des oscillations « cachées » qui peuvent se révéler gênantes.

On peut calculer :

$$M(x) = \varepsilon(x)C_1(x) = \frac{2,7-x}{1+0,7x} = 2,7 - 2,9x + 2x^2 - 1,4x^3 + \dots$$

² Si le correcteur est instable on recherche une nouvelle solution selon les principes exposés au § 9.2.4.

b. Calcul du correcteur $C_2(x)$

On désire calculer le correcteur $C_2(x)$ permettant **d'annuler l'erreur séquentielle de vitesse en temps minimal**.

$$Y_c(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow Y_c(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{R}{L^+}$$

$$R = x \quad Ng^+ = 1 + 0,7x \quad Dg^+ = (1-x)(1-0,37x)$$

$$L^+ = (1-x)^2 \quad Ng^- = 0,37x \quad Dg^- = 1$$

Nous devons résoudre l'équation polynomiale $L^+ Dg^- B' + Ng^- A' \equiv 1$ soit :

$$(1-x)^2 B' + 0,37x A' = 1$$

Cette équation est régulière aussi $\begin{cases} \|B'_0\| = \|Ng^-\| - 1 = 0 \\ \|A'_0\| = \|L^+\| + \|Dg^-\| - 1 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} B'_0 = b_0 = 1 \\ A'_0 = a_0 + a_1 x = 5,4 - 2,7x \end{cases}$

Ainsi :
$$C_2(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'_0 Dg^+}{B'_0 L^+ Ng^+} = \frac{(5,4 - 2,7x)(1 - 0,37x)}{(1-x)(1 + 0,7x)} = \frac{5,4 - 4,7x + x^2}{1 - 0,3x - 0,7x^2}$$

Ce correcteur est stable et réalisable.

$$\varepsilon(x) = RB'_0 Dg^- = x$$

$$t_r = \{\|\varepsilon\| + 1\}T = 2T = 2 \text{ s}$$

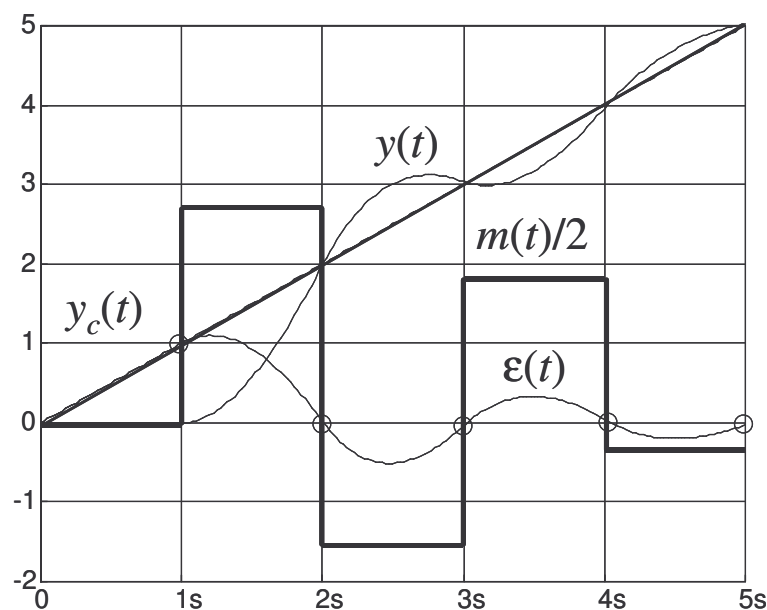
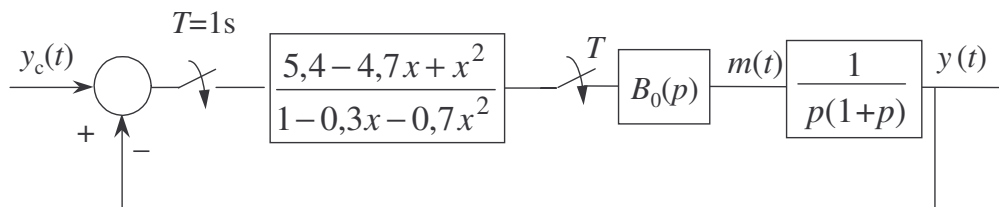


Figure 4 : Réponse en vitesse du processus corrigé par $C_2(z)$

L'erreur aux instants d'échantillonnage s'annule en 2 secondes ($2T$). On observe des oscillations « cachées ».

c. Calcul du correcteur $C_3(x)$

On désire calculer le correcteur $C_3(x)$ permettant **d'annuler l'erreur séquentielle de position en temps minimal tout en garantissant que l'erreur de vitesse $\varepsilon_v(\infty) < \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5$** (nouvelle contrainte).

Le correcteur est conçu pour annuler l'erreur séquentielle de position. Selon le résultat établi au § 10.1.2. sa transmittance est donnée par :

$$C_3(x) = \frac{A'D_g^+}{B'(1+x)N_g^+}$$

L'erreur de vitesse est donnée par :

$$\varepsilon_v(x) = \frac{Tx}{(1-x)^2} \frac{1}{1 + \frac{A'Ng^-}{B'Dg^-(1-x)}} \Rightarrow \varepsilon_v(x) = \frac{Tx B' Dg^-}{(1-x)(B' Dg^-(1-x) + A' Ng^-)}$$

A' et B' sont tels que $(1-x)Dg^- B' + Ng^- A' \equiv 1$. Ainsi :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \varepsilon_v(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-]$$

Avec le correcteur $C_1(x)$:

$$B' = B'_0 = 1 \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-] = 1 > \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5$$

Le correcteur $C_1(x)$ **ne convient pas**. Cherchons une solution $B' = B'_0 - PNg^-$ telle que :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-] \leq \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5$$

Les racines de $B' = B'_0 - PNg^-$ sont en z de module < 1 .

Soit $P = p_0$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx (B'_0 - p_0 Ng^-) Dg^-] = 1 - 0,37 p_0 < \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5 \Rightarrow p_0 \geq 1,35$$

$C_3(x)$ **doit être stable**. La racine de $(1 - 0,37 p_0 x)$ sera telle que $|0,37 p_0| < 1 \Rightarrow p_0 < 2,7$

Ainsi $1,35 \leq p_0 < 2,7$. On choisira par exemple $p_0 = 1,35$

$$\text{Dans ces conditions } \begin{cases} B' = 1 - 0,5x \\ A' = 2,7 + 1,35(1-x) \cdot Dg^- = 4,05 - 1,35x \end{cases}$$

$$C_3(x) = \frac{(4,05 - 1,35x)(1 - 0,37x)}{(1 - 0,5x)(1 + 0,7x)} = \frac{4,05 - 2,85x + 0,5x^2}{1 + 0,2x - 0,35x^2}$$

Ce correcteur est stable et physiquement réalisable.

L'erreur de position s'annule en 2 commandes car $\varepsilon(x) = 1 - 0,5x$. **Le fait d'augmenter le nombre de contraintes à un coût en temps de réponse.**

Simulons le processus :

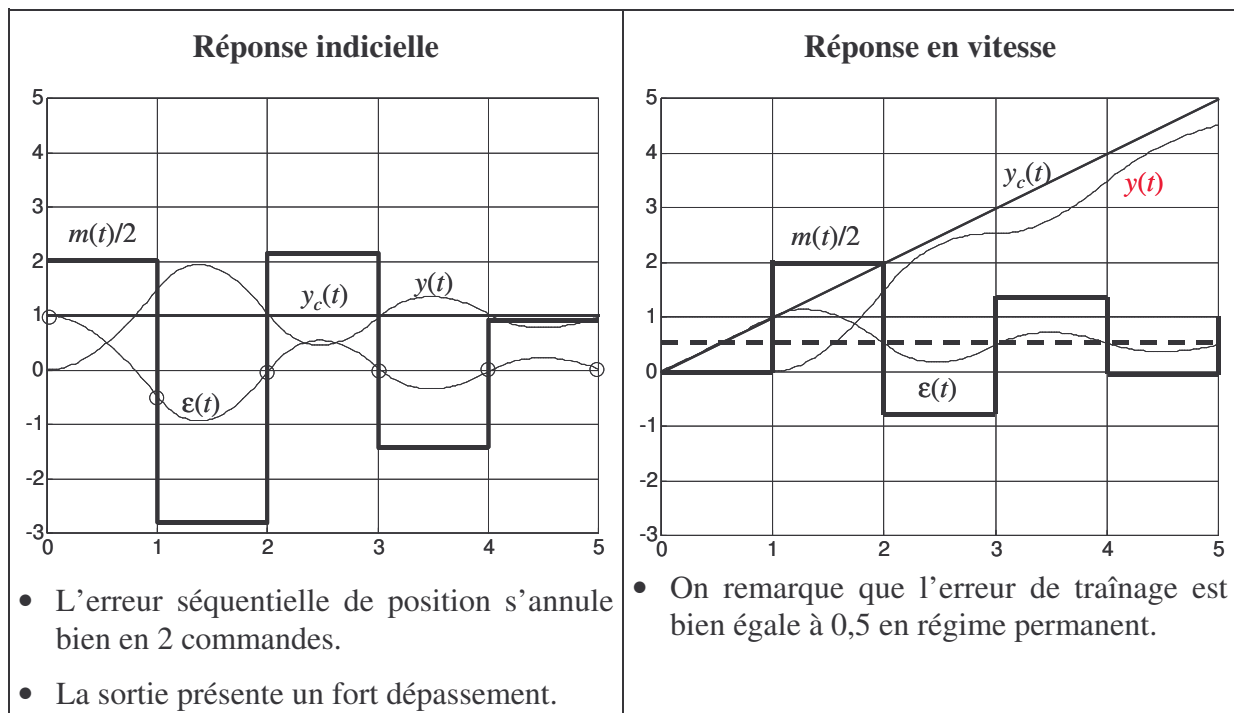
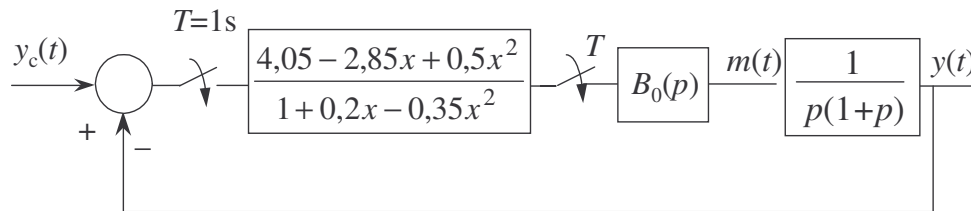


Figure 5 : Simulation du processus corrigé par $C_3(z)$

Si cette solution n'était pas acceptable, nous aurions recherché une solution $P = p_0 + p_1x$.

10.2. CORRECTEURS A REPONSE « PILE » OU « PLATE »

10.2.1. PROBLEME A RESOUDRE

Comme nous pouvons l'observer sur les exemples de simulation proposés en 9.3.3 la recherche d'une réponse en temps minimal conduit en général à des régimes transitoires très oscillants. Les oscillations qui apparaissent entre les instants d'échantillonnage sont dues aux discontinuités qui affectent le signal de commande $m(t)$. Bien souvent il est nécessaire de limiter ou de supprimer ces oscillations.

L'objet de ce paragraphe est de déterminer les conditions à respecter par le correcteur $C(x)$ afin que **l'erreur continue** $\varepsilon(t)$ soit annulée en temps minimal. Dans ce qui suit on considère que les bloqueurs (CNA) sont d'ordre zéro et que l'entrée est polynôme en t de degré n .

Ainsi :

$$y_c(t) = \left[Y_{p0} + Y_{v0}t + Y_{a0} \frac{t^2}{2!} + \dots + Y_{n0} \frac{t^n}{n!} \right] u(t)$$

$$\mathbf{Z}[y_c(t)] = Y_c(x) = \frac{V(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_nx^n}{(1-x)^{n+1}}$$

Le processus continu à commander comporte en général α intégrations et sa transmittance peut s'écrire :

$$P(p) = K \frac{P_1(p)}{p^\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \text{gain statique} \\ P_1(0) = 1 \end{cases}$$

Le correcteur est calculé pour annuler l'erreur continue $\varepsilon(t)$. Aussi la sortie $s(t)$, en régime permanent, doit-elle être un polynôme en t de même degré n que le signal $y_c(t)$. Ce résultat est acquis si le signal $m(t)$ ne présente **aucune discontinuité**. Le bloqueur étant d'ordre zéro, dire que le signal $m(t)$ est continu impose que **$m(t)$ soit constant**. Dans ce cas, lorsque le régime transitoire est éteint, la séquence $\{m_n\}$ issue du calculateur est une suite de nombres constants.

Admettons que le régime transitoire s'éteigne au bout de Δ périodes d'échantillonnage. La transformée en z de la séquence est alors égale à :

$$M(x) = \mathbf{Z}[m_n] = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_\Delta x^\Delta + m_\Delta x^{\Delta+1} + m_\Delta x^{\Delta+2} + \dots$$

$$M(x) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_\Delta x^\Delta (1 + x + x^2 + \dots) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + \frac{m_\Delta x^\Delta}{(1-x)}$$

Plus généralement on peut dire que $M(x)$ répond au problème si sa transformée en z est de la forme :

$$M(x) = \frac{w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots + w_mx^m}{(1-x)^q} = \frac{W(x)}{(1-x)^q} \quad \text{avec} \quad q \leq 1$$

Le processus analogique $P(p)$, excité par un signal $m(t)$ constant et continu, est capable de restituer un signal de sortie $y(t)$ qui soit un polynôme en t d'ordre n identique à l'ordre de $y_c(t)$, s'il possède un nombre α d'intégration égal à n . Ainsi une condition nécessaire pour que la sortie du processus analogique ne soit pas affectée par des oscillations cachées est que :

$$\boxed{n \leq \alpha}$$

10.2.2. DETERMINATION DU CORRECTEUR

Calculons le signal $M(x)$ le correcteur étant calculé selon la méthode de VOLGUINE exposée au § 9.3.

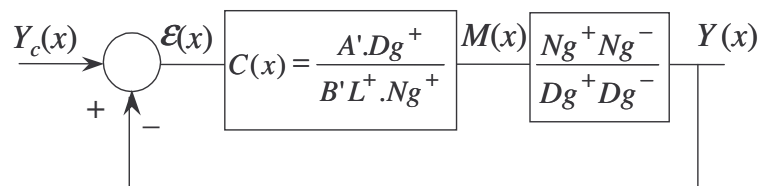


Figure 6 ; Boucle de commande numérisée

$$M(x) = \varepsilon(x)C(x) = \frac{Y_c(x)}{1 + \frac{A'Ng^-}{B'L^+Dg^-}} \frac{A'Dg^+}{B'L^+Ng^+} = Y_c(x) \frac{A'Dg^+Dg^-}{(B'L^+Dg^- + A'Ng^-)Ng^+}$$

Comme $L^+Dg^-B' + Ng^-A' \equiv 1$ il vient :

$$M(x) = Y_c(x) \frac{A'Dg^+Dg^-}{Ng^+}$$

Avec les conventions précédentes la fonction de transfert du bloqueur associée au processus $P(p)$ s'écrit :

$$G(x) = \frac{Ng^+Ng^-}{(1-x)^\alpha Dg_1^+Dg^-}$$

Aussi :

$$M(x) = \frac{V(x)}{(1-x)^{n-\alpha+1}} \frac{A'Dg_1^+Dg^-}{Ng^+}$$

Pour que la condition $M(x) = \frac{W(x)}{(1-x)^q}$, avec $q \leq 1$, soit vérifiée, il faut nécessairement que :

- $n - \alpha + 1 \leq 1 \Rightarrow n \leq \alpha$ (condition démontrée par ailleurs)
- le terme Ng^+ n'apparaît pas au dénominateur de $M(x)$.

On obtient ce dernier résultat dès lors que le correcteur $C(x)$ **ne compense pas** Ng^+ . On adopte donc :

$$C(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'Dg^+}{B'L^+}$$

tel que :

$$L^+Dg^-B' + Ng^+Ng^-A' \equiv 1$$

Evidemment le degré de B' du correcteur à réponse « pile » est supérieur à la valeur obtenue pour la synthèse du correcteur à temps de réponse minimum.

$$\|B'\| = \|Ng^+\| + \|Ng^-\| - 1$$

L'erreur séquentielle est égale à $\varepsilon(x) = RB'Dg^-$

Le temps de réponse est donné par $t_r = \{\|\varepsilon\| + 1\}T = \{\|R\| + \|Ng^+\| + \|Ng^-\| + \|Dg^-\|\}T$

Ainsi en imposant une contrainte supplémentaire au système de commande on augmente son temps de réponse.

Le correcteur doit être stable et physiquement réalisable.

10.2.3. EXEMPLES

Reprenons le système de commande étudié en 9.3.3.

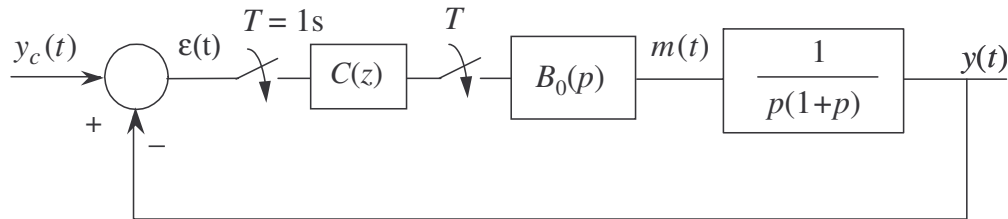


Figure 7 : Asservissement élémentaire de position

a. Calcul du correcteur $C_4(x)$

On désire calculer le correcteur $C_4(x)$ permettant **d'annuler l'erreur continue $\varepsilon(t)$ de position en temps minimal**. On dit que le correcteur donne une réponse « plate » ou « pile ».

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} = \frac{0,37(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} \Rightarrow G(x) = \frac{0,37x(1+0,7x)}{(1-x)(1-0,37x)} = \frac{Ng^+ Ng^-}{Dg^+ Dg^-}$$

$$Y_c(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y_c(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{R}{L^+}$$

$$\begin{array}{lll} R=1 & Ng^+ = 1+0,7x & Dg^+ = (1-x)(1-0,37x) \\ L^+ = 1-x & Ng^- = 0,37x & Dg^- = 1 \end{array}$$

Nous devons résoudre l'équation polynomiale $L^+ Dg^- B' + Ng^+ Ng^- A' \equiv 1$.

$$(1-x)B' + 0,37x(1+0,7x)A' = 1$$

Cette équation est régulière aussi $\begin{cases} \|B_0'\| = \|Ng^+\| + \|Ng^-\| - 1 = 1 \\ \|A_0'\| = \|L^+\| + \|Dg^-\| - 1 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} B_0' = b_0 + b_1x = 1+0,42x \\ A_0' = a_0 = 1,59 \end{cases}$

Le correcteur recherché est égal à :

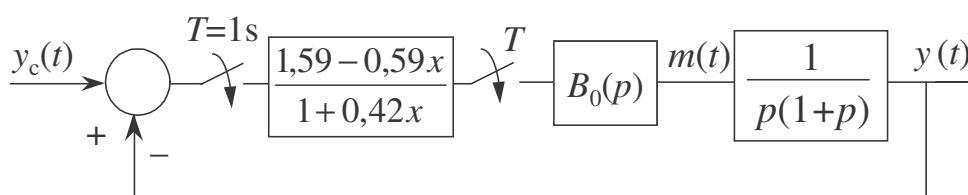
$$C_4(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_0' Dg^+}{B_0' L^+} = \frac{1,59(1-0,37x)}{(1+0,42x)} = \frac{1,59-0,59x}{1+0,42x}$$

Ce correcteur est stable et réalisable.

$$\varepsilon(x) = RB_0' Dg^- = (1+0,42x)$$

$$t_r = \lceil \|\varepsilon\| + 1 \rceil T = 2T = 2 \text{ s}$$

Procédons à la simulation du système compensé avec $C_4(x)$ en exploitant SIMULINK.



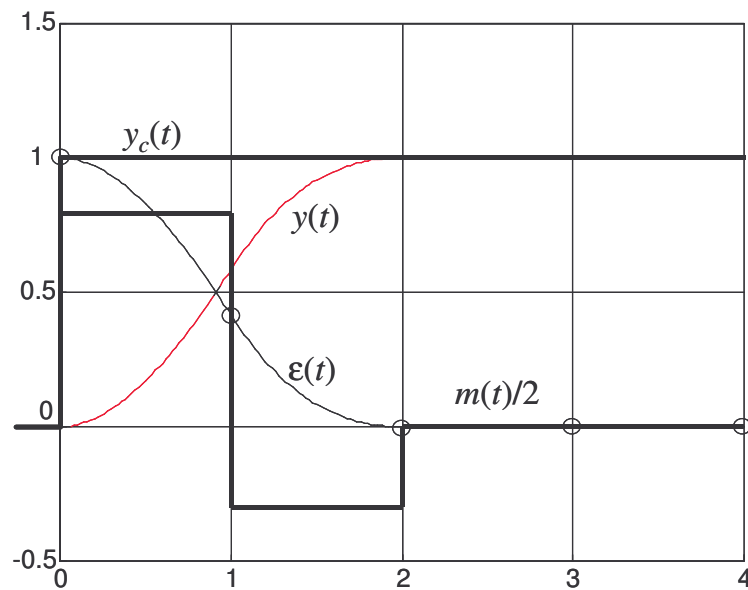


Figure 8 : Réponse en position du processus corrigé par $C_4(z)$

On vérifie que $\varepsilon(x) = (1 + 0,42x)$

De plus on vérifie sur l'enregistrement ci-dessus que :

$$M(x) = \varepsilon(x)C_4(x) = 1,59 - 0,59x$$

Enregistrons la réponse en vitesse du système bouclé.

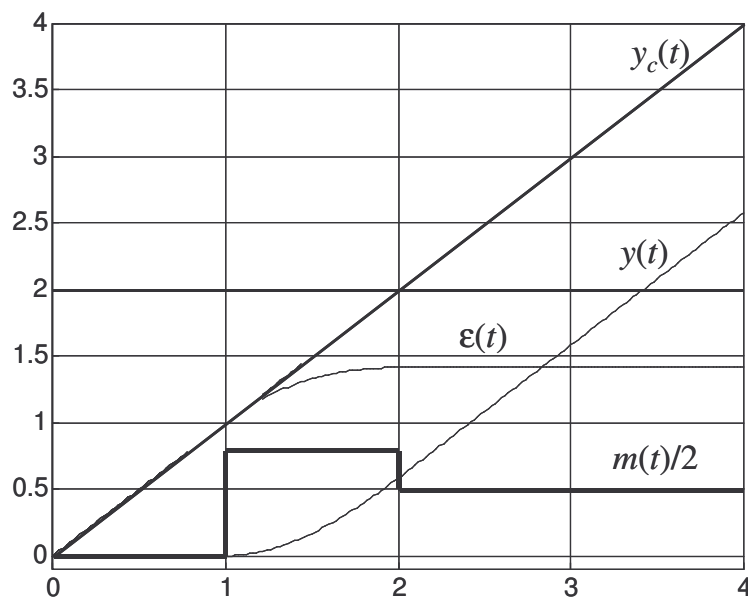


Figure 9 : Réponse en vitesse du processus corrigé par $C_1(z)$

L'erreur de vitesse en régime permanent est $\varepsilon_v(\infty) \approx 1,4$.

b. Calcul du correcteur $C_5(x)$

On désire réaliser la synthèse du correcteur $C_5(x)$ permettant **d'annuler l'erreur continue de position en temps minimal tout en garantissant que l'erreur de vitesse $\varepsilon_v(\infty) < \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5$** .
Calculons l'erreur de vitesse avec le correcteur $C_4(x)$.

$$\varepsilon_v(x) = \frac{Tx}{(1-x)^2} \frac{1}{1 + \frac{A'Ng^-Ng^+}{B'Dg^-(1-x)}} \Rightarrow \varepsilon_v(x) = \frac{Tx B' Dg^-}{(1-x)(B' Dg^-(1-x) + A' Ng^- Ng^+)}$$

A' et B' sont tels que $(1-x)Dg^-B' + Ng^-Ng^+A' \equiv 1$. Ainsi $\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-]$

Si $B' = B'_0 = 1 + 0,42x \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-] = 1,42 > \varepsilon_{v\max}(\infty)$

Le correcteur $C_4(x)$ ne convient pas. Cherchons une solution $C_5(x)$.

Partant de la solution minimale $\begin{cases} B'_0 = 1 + 0,42x \\ A'_0 = 1,59 \end{cases}$ calculons $\begin{cases} B' = B'_0 - PNg^+Ng^- \\ A' = A'_0 + P(1-x)Dg^- \end{cases}$

$B' = B'_0 - PNg^+Ng^- = 1 + 0,42x - 0,37x(1 + 0,7x)P$ telle que :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx B' Dg^-] < \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5$$

Choisissons $P = p_0$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} [Tx(B'_0 - p_0 Ng^+ Ng^-) Dg^-] = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + 0,42x - 0,37x(1 + 0,7x)p_0]$$

$$\varepsilon_v(\infty) = [1,42 - 0,63p_0] < \varepsilon_{v\max}(\infty) = 0,5 \Rightarrow 1,46 < p_0$$

$C_5(x)$ **doit être stable**. Les racines de $(1 + (0,42 - 0,37p_0)x - 0,26p_0x^2)$ doivent être situées hors du cercle unité. On applique le critère de JURY au polynôme $B'(x)$ (cf. § 6.2.1).

$$\begin{cases} B'(1) = 1,42 - 0,63p_0 > 0 \Rightarrow p_0 < 2,254 \\ B'(-1) = 0,58 + 0,11p_0 > 0 \Rightarrow p_0 > -5,27 \Rightarrow -3,84 < p_0 < 2,254 \\ |-0,26p_0| < 1 \Rightarrow -3,84 < p_0 < 3,84 \end{cases}$$

En tenant compte des différentes équations $1,46 < p_0 < 2,254$. Choisissons par exemple $p_0 = 1,5$

Dans ces conditions $\begin{cases} B' = 1 - 0,135x - 0,39x^2 \\ A' = 3,09 - 1,5x \end{cases}$

$$C_5(x) = \frac{(3,09 - 1,5x)(1 - 0,37x)}{(1 - 0,135x - 0,39x^2)} = \frac{3,09 - 2,643x + 0,555x^2}{1 - 0,135x - 0,39x^2}$$

Ce correcteur est stable et physiquement réalisable.

L'erreur de position s'annule en 3 commandes car $\varepsilon(x) = 1 - 0,135x - 0,39x^2$.

On confirme que l'augmentation du nombre de contraintes accroît le temps de réponse du système. Simulons le processus avec SIMULINK :

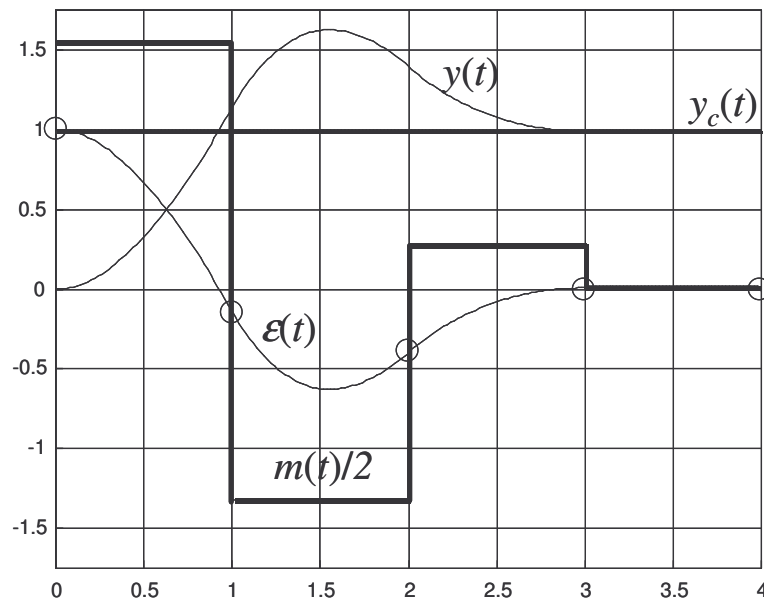
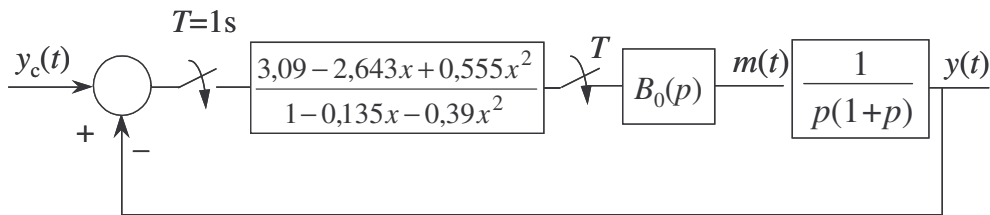


Figure 10 : Réponse indicielle du processus corrigé par $C_5(z)$

Cet enregistrement montre que la sortie ne présente pas d'oscillations cachées et que l'erreur s'annule en 3 secondes. Enregistrons la réponse en vitesse.

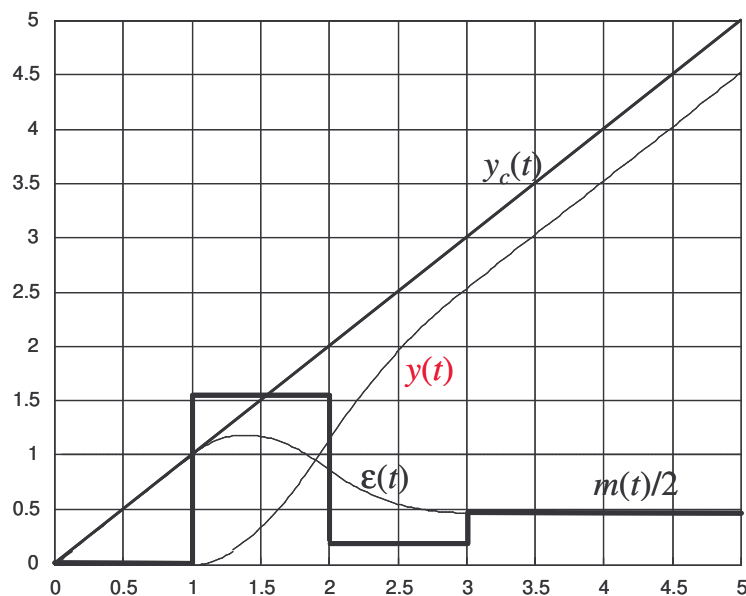


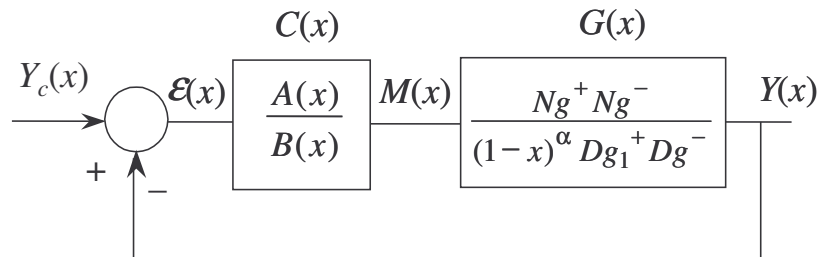
Figure 11 : Réponse en vitesse du processus corrigé par $C_5(z)$

L'erreur de vitesse en régime permanent est $\varepsilon_v(\infty) \approx 0,5$. Le système est recalé en 3 secondes.

10.3. SYNTHESE DES RESULTATS

10.3.1. TABLEAU DE SYNTHESE

Résumons dans un tableau les principaux résultats concernant les correcteurs dont la synthèse est réalisée par la méthode de VOLGUINE.



	<i>Système à temps de réponse minimal</i>	<i>Système à réponse plate</i>
Correcteur $C(x)$	$A = A'(1-x)^\alpha Dg_1^+$ $B = B' Ng^+ L^+$ $L^+ Dg^- B' + Ng^- A' = 1$	$A = A'(1-x)^\alpha Dg_1^+$ $B = B' L^+$ $L^+ Dg^- B' + Ng^+ Ng^- A' = 1$
$FTBF(x) = \frac{Y(x)}{Y_c(x)}$ Si $Y_c(x) =$ <ul style="list-style-type: none"> échelon de position échelon de vitesse échelon d'accélération 	$FTBF(x) = A' Ng^-$ $FTBF(x) = x$ $FTBF(x) = 2x - x^2$ $FTBF(x) = 3x - 3x^2 + x^3$	$FTBF(x) = A' Ng^- Ng^+$
Erreur $\mathcal{E}(x)$	$RDg^- B'$	$RDg^- B'$
Commande $M(x)$	$\frac{RA' Dg_1^+ Dg^-}{(1-x)^{n-\alpha+1} Ng^+}$	$\frac{RA' Dg_1^+ Dg^-}{(1-x)^{n-\alpha+1}}$
Autre solution si $C(x)$ est instable	$B' = B'_0 - PNg^-$ $A' = A'_0 + PL^+ Dg^-$	$B' = B'_0 - PNg^+ Ng^-$ $A' = A'_0 + PL^+ Dg^-$

10.3.2. ASPECTS PRATIQUES

Les méthodes de synthèse de correcteurs numériques développées aux paragraphes 9.3 et 9.4 doivent évidemment conduire à la conception de correcteurs stables et causaux. Par ailleurs le recours à des correcteurs à temps de réponse minimal n'est pas toujours satisfaisant notamment par les oscillations qui apparaissent entre les instants d'échantillonnage.

a. Obtention d'un correcteur stable

Si le correcteur obtenu est instable cela signifie que la solution minimale (A'_0, B'_0) de l'équation polynomiale $L^+ Dg^- B' + Ng^+ Ng^- A' \equiv 1$ ne convient pas.

Dans ce cas on recherche une solution de degré plus élevé telle que :

$$\begin{aligned} B' &= B'_0 - PNg^+ Ng^- \\ A' &= A'_0 + PL^+ Dg^- \end{aligned}$$

b. Correcteur réalisable

Comme nous l'avons monté au § 5.4.1.b, pour que le correcteur soit causal il faut que $B'(x) \neq 0$

c. Limitation des oscillations

Afin de garantir la stabilité de $C(x)$, on ajuste le polynôme P par application des critères algébriques étudiés au chapitre 6. Cependant on ne perdra pas de vue que **plus le degré de P est élevé et plus le temps de réponse du système est long.**

On peut introduire un facteur dit « d'adoucissement » qui, en allongeant le régime transitoire, permet de réduire les fortes oscillations et de diminuer la valeur crête de la commande $m(t)$. Choisissons un facteur d'adoucissement du premier ordre tel que :

$$FTBF'(x) = \frac{\alpha}{1 + \beta x} FTBF(x)$$

$$Y(x) = FTBF(x)Y_c(x) = M(x)G(x) \Rightarrow M(x) = Y_c(x) \frac{FTBF(x)}{G(x)}$$

Avec le facteur d'adoucissement il vient :

$$Y(x) = FTBF'(x)Y_c(x) = M'(x)G(x) \Rightarrow M'(x) = Y_c(x) \frac{FTBF(x)}{G(x)} \frac{\alpha}{1 + \beta x}$$

L'introduction de ce facteur doit conserver au système bouclé des performances de précision en régime permanent, identiques à celles obtenues avec le correcteur calculé initialement pour une entrée polynomiale donnée. Ainsi s'il s'agit d'un correcteur calculé afin d'assurer une erreur de position nulle :

$$\varepsilon_P(\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)Y_c(x) \left[1 - FTBF(x) \frac{\alpha}{1 + \beta x} \right] = 0 \Rightarrow \alpha = 1 + \beta$$

Le terme β est choisi selon l'effet recherché sur la commande $m(t)$ notamment. Ce choix étant fait, il est possible de calculer le correcteur correspondant. Ce correcteur est tel que :

$$C(x) = \frac{1}{G(x)} \frac{FTBF'(x)}{1 - FTBF'(x)}$$

Pour illustrer la méthode de synthèse reprenons l'exemple du système à réponse « pile » en position traité au § 9.4.3.a. Nous avons obtenu le correcteur :

$$C_4(x) = \frac{1,59 - 0,59x}{1 + 0,42x}$$

$G(x) = \frac{0,37x(1+0,7x)}{(1-x)(1-0,37x)} = \frac{Ng^+ Ng^-}{Dg^+ Dg^-}$	$Ng^+ = 1 + 0,7x$ $Ng^- = 0,37x$	$Dg^+ = (1-x)(1-0,37x)$ $Dg^- = 1$
$Y_c(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{R}{L^+}$	$R = 1$ $L^+ = 1 - x$	

$$FTBF(x) = A' Ng^- Ng^+ = 0,59x(1+0,7x) = 0,59x + 0,41x^2$$

Dans ce cas :

$$M(x) = Y_c(x) \frac{FTBF(x)}{G(x)} = \frac{x}{1-x} A' Dg^+ Dg^- = 1,59(1-0,37x)$$

On désire **réduire de moitié la valeur maximale de $m(t)$** par insertion d'un facteur d'adoucissement. Ce terme ne doit pas altérer les performances du système en précision. Aussi devons-nous vérifier que $\alpha = 1 + \beta$.

$$M(x) = 1,59 - 0,59x = m_0 + m_1 x$$

$$M'(x) = Y_c(x) \frac{FTBF(x)}{G(x)} \frac{\alpha}{1+\beta x} = \frac{1}{1-x} A' Dg^- Dg^+ \frac{\alpha}{1+\beta x}$$

$$M'(x) = \frac{1,59\alpha(1-0,37x)}{1+\beta x}$$

$$M'(x) = (1,59 - 0,59x) \frac{1+\beta}{1+\beta x} = m'_0 + m'_1 x + m'_2 x^2 + \dots$$

$$\text{On calcule } \beta \text{ de telle sorte que } m'_0 = \frac{m_0}{2} = 0,795 = 1,59(1+\beta) \Rightarrow \beta = -0,5$$

$$FTBF'(x) = A' Ng^- Ng^+ \frac{0,5}{1-0,5x} = \frac{0,295x(1+0,7x)}{1-0,5x} = \frac{0,295x + 0,205x^2}{1-0,5x}$$

$$C(x) = \frac{1}{G(x)} \frac{FTBF'(x)}{1-FTBF'(x)}$$

$$C_6(x) = \frac{Dg^+ Dg^-}{Ng^+ Ng^-} \frac{0,5 A' Ng^+ Ng^-}{(1-0,5x) - 0,5 A' Ng^+ Ng^-}$$

$$C_6(x) = \frac{0,5 A' Dg^+ Dg^-}{(1-0,5x) - 0,5 A' Ng^+ Ng^-}$$

$$C_6(x) = \frac{0,795(1-x)(1-0,37x)}{(1-x)(1+0,205x^2)}$$

$$C_6(x) = \frac{0,795 - 0,294x}{1 + 0,205x^2}$$

Procédons à la simulation du système compensé avec $C_6(x)$ en exploitant SIMULINK.

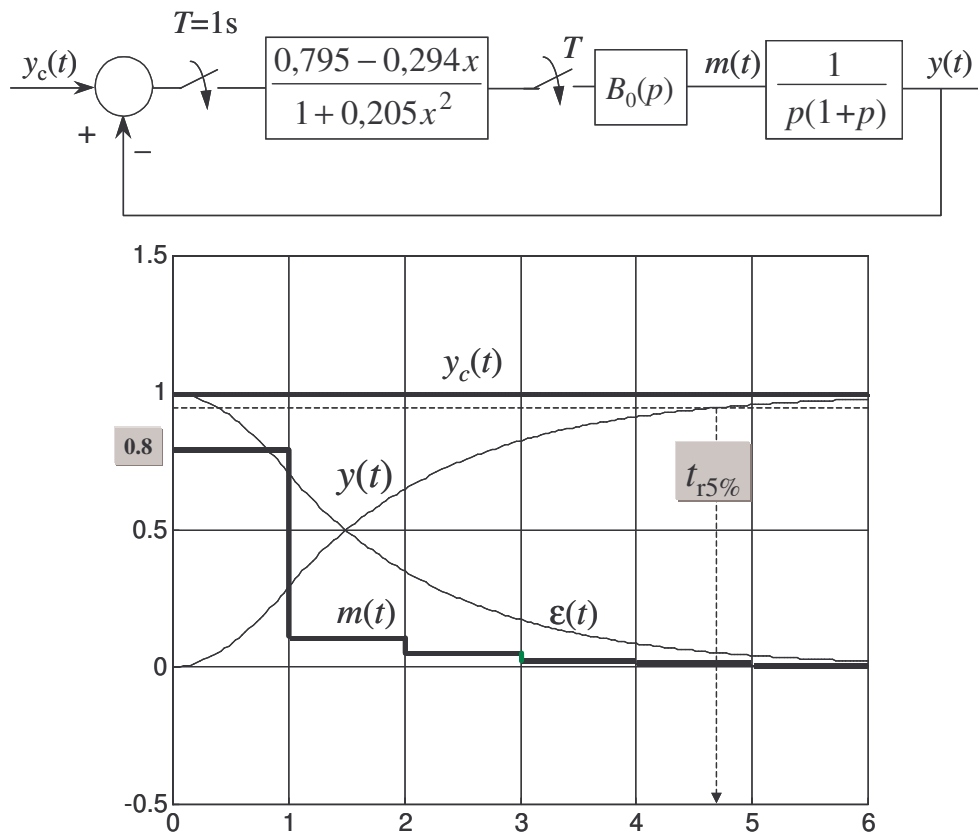


Figure 12 : Réponse indicielle Figure du processus corrigé par $C_6(z)$

Le temps de réponse à 5% est de 4,7s environ. La réponse n'est plus à temps minimal. Mais la commande $m(t)$ est bien limitée à 0,8.

Enregistrons la réponse en vitesse du système bouclé.

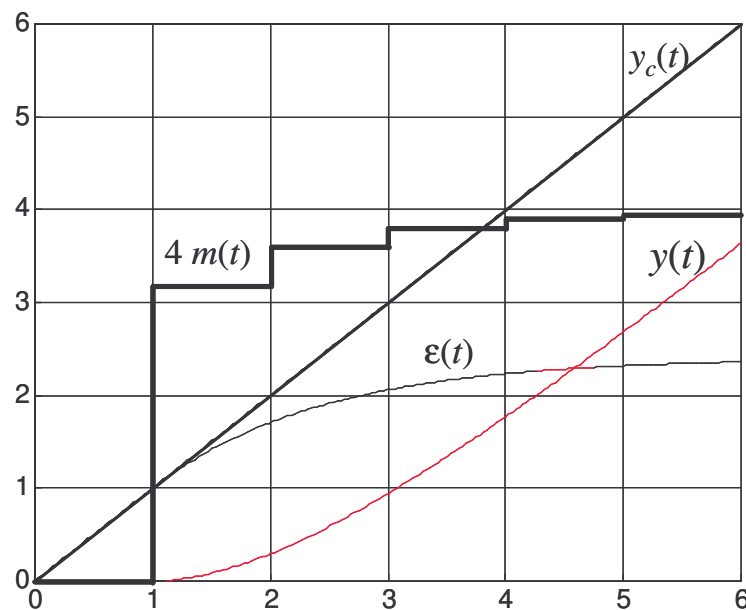


Figure 13 : Réponse en vitesse du processus corrigé par $C_6(z)$

L'erreur de vitesse en régime permanent (erreur de traînage) est $\varepsilon_v(\infty) \approx 2,4$.

On comparera ces résultats avec ceux obtenus lorsque la boucle est compensée par $C_4(x)$.