

Chapitre 9

Analyse fréquentielle des systèmes asservis linéaires continus

9.1. Introduction

9.2. Tracé approximatif de la $FTBF(j\omega)$

9.3. Abaque de Hall

9.3.1. Principes de la méthode

9.3.2. Détermination de l'abaque de Hall

9.4. Abaque de Black-Nichols

9.4.1. Principe

9.4.2. Utilisation

9.4.3. Emploi de MATLAB

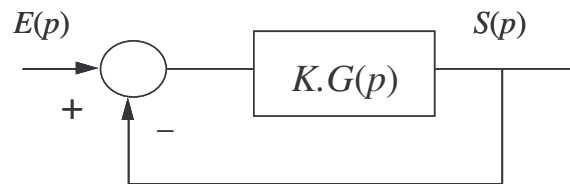
9.5. Exemples d'utilisation de MATLAB

9.5.1. Etude d'une boucle de commande complexe

9.5.2. Prise en compte des retards

9.1. INTRODUCTION

Considérons un système bouclé à retour unitaire.

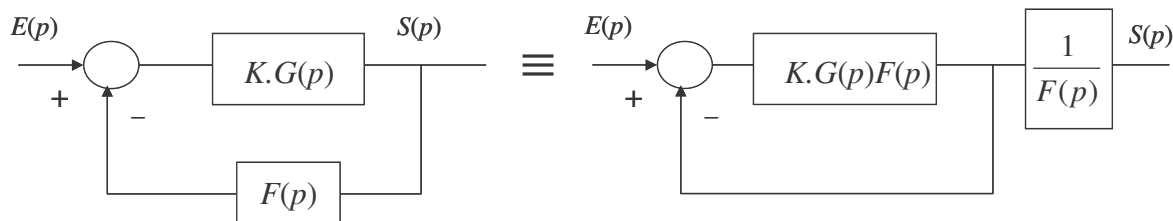


Nous connaissons le lieu de transfert isochrone de $KG(j\omega) = FTBO(j\omega)$ et nous nous proposons de déterminer celui de :

$$FTBF(j\omega) = \frac{FTBO(j\omega)}{1 + FTBO(j\omega)}$$

La méthode de BODE nous indique une voie pour accéder à la représentation de ce lieu, mais elle nous conduit inévitablement à de fastidieux calculs pour factoriser le numérateur et le dénominateur de $FTBF(j\omega)$. Les méthodes que nous allons examiner permettent de déterminer, sans calcul, les principales caractéristiques de la $FTBF(j\omega)$ à partir du tracé de la $FTBO(j\omega)$.

Si le système n'est pas à retour unitaire nous transformons son schéma fonctionnel conformément à la règle suivante :

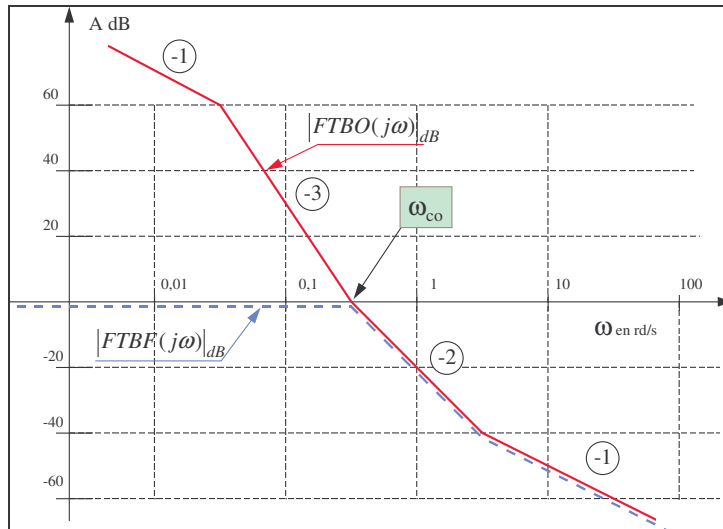


9.2. TRACE APPROXIMATIF DE LA FTBF(jω)

La pulsation ω_{co} telle que $|FTBO(j\omega_{co})|_{dB} = 0dB$ est appelée **pulsation de coupure** de la fonction de transfert en boucle ouverte. Soit :

$$FTBF(j\omega) = \frac{FTBO(j\omega)}{1 + FTBO(j\omega)}$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_{co} \Rightarrow |FTBO(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow |FTBF(j\omega)|_{dB} \approx 0dB \\ \omega \gg \omega_{co} \Rightarrow |FTBO(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow |FTBF(j\omega)|_{dB} \approx |FTBO(j\omega)|_{dB} \end{cases}$$



On remarque que ω_{co} donne une information sur la bande passante du système en boucle fermée.

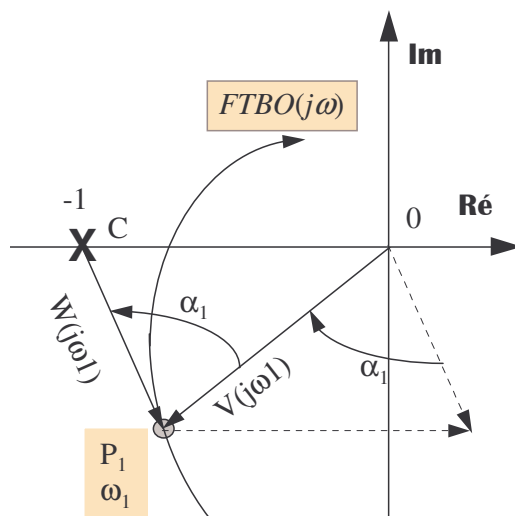
Comme nous l'expliquerons au prochain chapitre la bande passante est un paramètre qui conditionne la précision dynamique du système bouclé.

9.3. ABAQUE DE HALL

9.3.1. PRINCIPES DE LA METHODE

Plaçons-nous dans le plan de NYQUIST et considérons un système bouclé à retour unitaire.

$$FTBF(j\omega) = \frac{FTBO(j\omega)}{1 + FTBO(j\omega)} = \frac{X + jY}{1 + X + jY} = \frac{V(j\omega)}{W(j\omega)} = M e^{j\alpha} \quad \begin{cases} M = |FTBF(j\omega)| \\ \alpha = \arg FTBF(j\omega) \end{cases}$$



Soit P_1 le point d'affixe $FTBO(j\omega_1) = V(j\omega_1)$.

On définit les 2 vecteurs

- $V(j\omega_1)$
- $W(j\omega_1) = 1 + V(j\omega_1)$.

$$FTBF(j\omega_1) = M_1 e^{j\alpha_1} \quad \begin{cases} M_1 = OP_1 / CP_1 \\ \alpha_1 = \arg OP_1 - \arg CP_1 \end{cases}$$

Par de simples mesures de longueurs et d'angles il est possible de déterminer complètement la FTBF pour la pulsation ω_1 et d'appliquer cette méthode aux points P_2, P_3, \dots correspondant à $\omega_2, \omega_3, \dots$

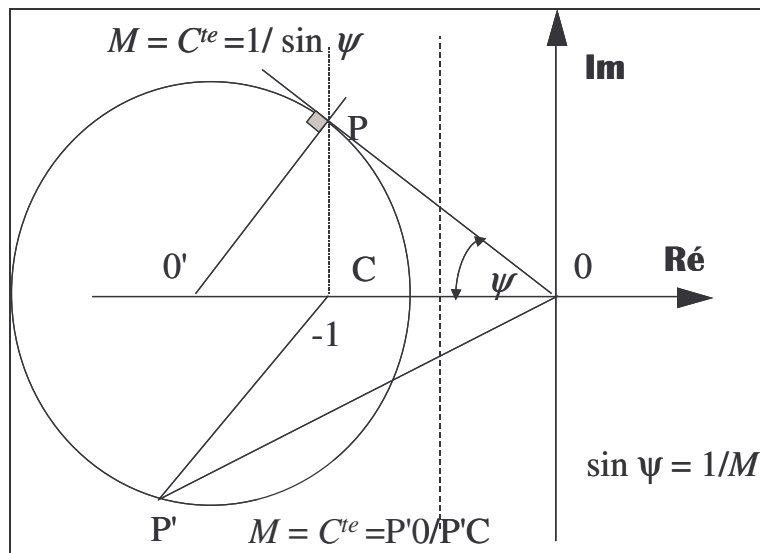
En fait l'utilisation d'un abaque sur lequel sont tracés les points à $M = \text{constante}$ et $\alpha = \text{constante}$, simplifie la détermination de $FTBF(j\omega)$.

9.3.2. DETERMINATION DE L'ABaque DE HALL

a. Détermination du lieu des points P tels que $PO/OC = \text{constante} = M$

Le lieu des points P du plan complexe, dont le rapport des distances à deux points fixes P et O est une constante M , est un cercle (Cf. cours de géométrie). Ce résultat s'obtient analytiquement en posant :

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|} \Rightarrow M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$



Soit :

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1}\right)^2 \Rightarrow \text{cercle} \begin{cases} \text{rayon} = \left|\frac{M}{M^2 - 1}\right| \\ \text{centre} \begin{cases} x = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Si on change M en $1/M$ on trouve un cercle de même rayon symétrique par rapport à la droite $x = -0,5$. Cette droite constitue le cas limite pour $M = 1$.

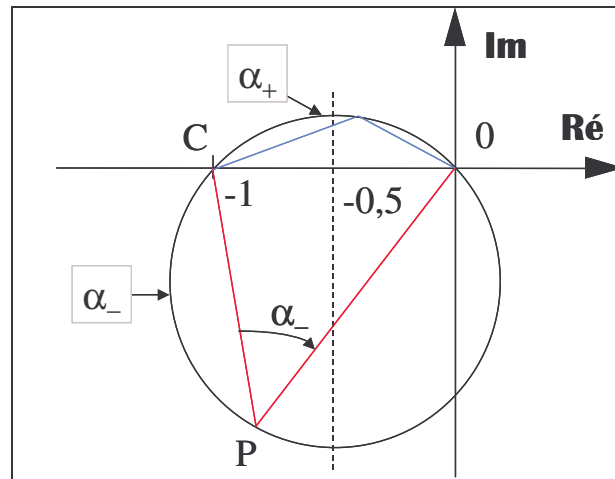
b. Détermination du lieu des points P tels que $\alpha = \text{constante}$

Le lieu des points sous lequel on voit le segment OC sous un angle constant α est un cercle à points de base O et C (Cf. cours de géométrie - arc capable).

Ce résultat s'obtient analytiquement en posant :

$$FTBF(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY} \Rightarrow \alpha = \arg FTBF(j\omega) = \arctg \frac{Y}{X} - \arctg \frac{Y}{1 + X}$$

$$\alpha = \arctg \left[\frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1 + X}}{1 + \frac{Y^2}{X(1 + X)}} \right] = \arctg \left[\frac{Y}{X^2 + X + Y^2} \right] \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2} = N$$



Soit :

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2} \Rightarrow \text{cercle} \begin{cases} \text{rayon} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}} \\ \text{centre} \begin{cases} x = -0,5 \\ y = \frac{1}{2N} \end{cases} \end{cases}$$

Les deux familles de courbes, $M = \text{constante}$ et $\alpha = \text{constante}$, constituent l'abaque de HALL dont le modèle est donné en annexe A.9.1.

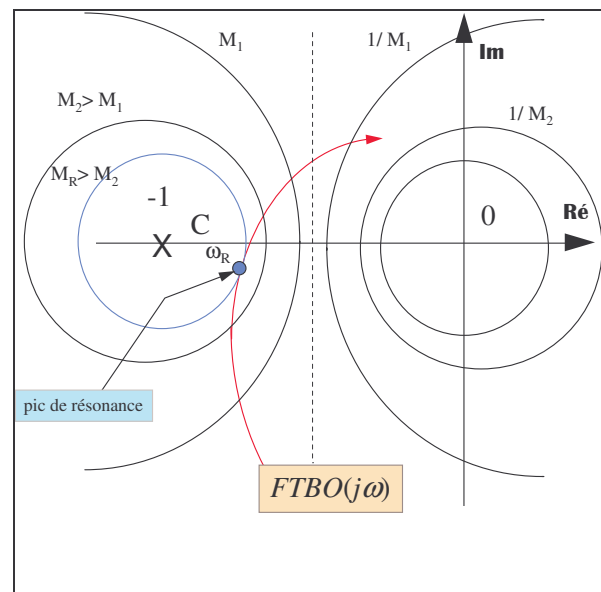
c. Utilisation de l'abaque de HALL

Le principe consiste à tracer $FTBO(j\omega)$ dans le plan de NYQUIST et à paramétrer cette courbe en pulsation ω (en rad/s). On lit ensuite, le module et la phase de la $FTBF(j\omega)$ pour chaque valeur de ω .

On lit aussi directement :

- le module du pic de résonance au point où $FTBO(j\omega)$ est tangent au cercle de rapport M (M_R) le plus élevé,
- la pulsation de résonance ω_R au point de tangence.

Nous n'avons pas tracé les courbes $\alpha = C^{\text{te}}$ afin de ne pas surcharger le dessin.



9.4. ABAQUE DE BLACK-NICHOLS

9.4.1. PRINCIPE

A l'évidence cet abaque n'est pas d'un emploi facile. Aussi préfère-t-on utiliser un abaque reprenant le tracé des lieux à M et α constants reportés dans le plan de BLACK-NICHOLS. Les contours à $M = \text{constante}$ sont gradués en M_{dB} . Le contour $M = 1,3$ (2,3 dB) est en général mis en évidence pour des raisons que nous précisons plus tard. Cet abaque est donné en annexe A.9.2.

9.4.2. UTILISATION

L'utilisation de cet abaque implique que $FTBO(j\omega)$ soit tracé dans le plan de BLACK-NICHOLS. Cette courbe étant paramétrée en pulsation ω , pour chaque valeur de ω on peut lire le module et la phase de la $FTBF(j\omega)$ et plus précisément :

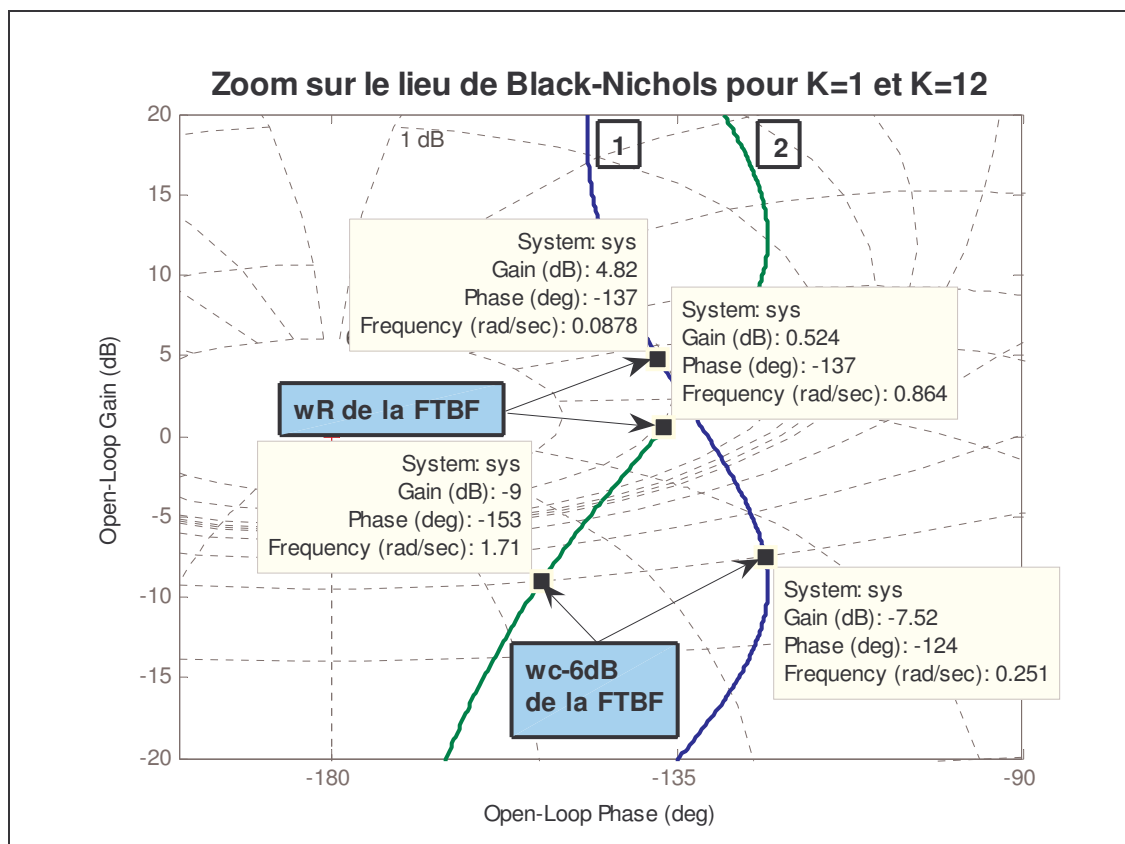
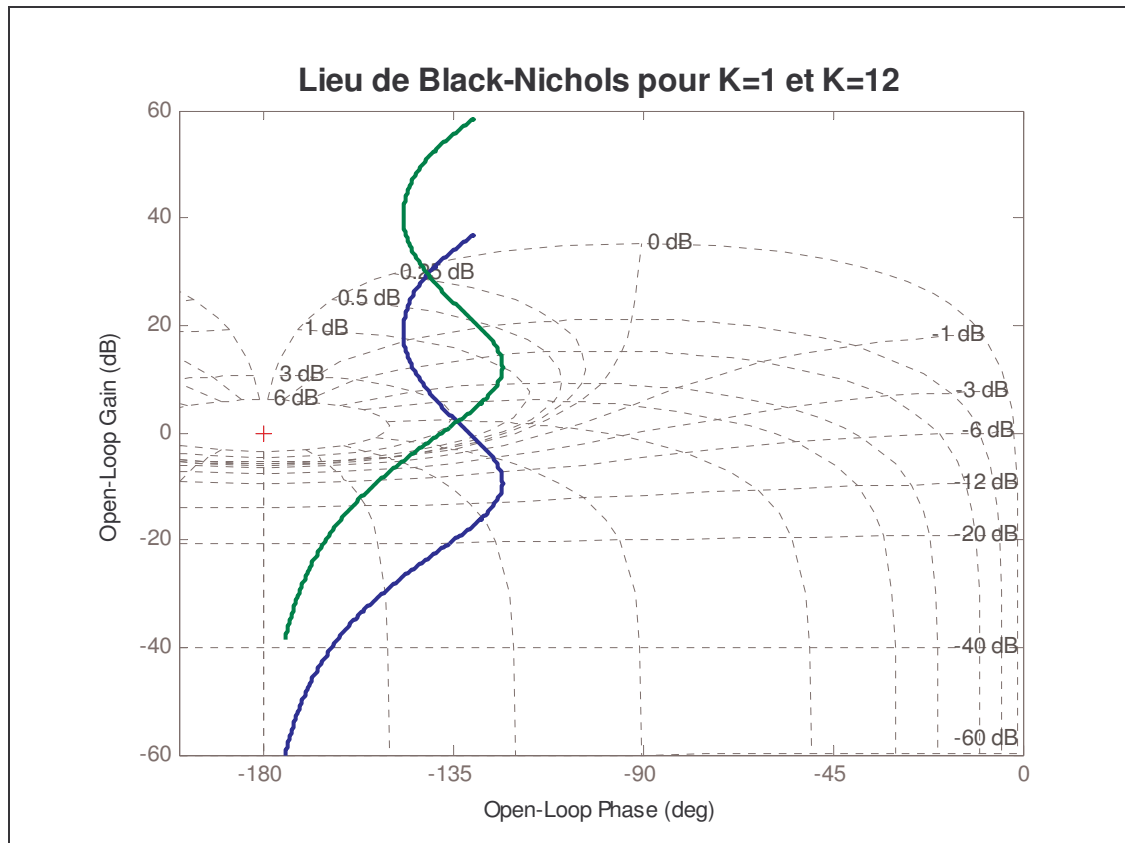
- le module du pic de résonance au point où $FTBO(j\omega)$ est tangent au contour de rapport M_{dB} le plus élevé,
- la pulsation de résonance ω_R au point de tangence,
- la pulsation de coupure à -6 dB (notion qui sera précisée plus tard).

9.4.3. EMPLOI DE MATLAB

Soit la fonction de transfert $H(p) = \frac{K(1+10p)}{p(1+p)(1+100p)}$

Traçons le diagramme de BLACK-NICHOLS correspondant pour $K=1$ et $K=12$.

```
%
% Script Chap9_1.m
% ANALYSE FREQUENTIELLE DES SALC
% LIEU DE BLACK-NICHOLS
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 8 juin 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all;clc;
%
K=1;
num=K*[10 1];
den=[100 101 1 0];
w=logspace(-2,1,500);
figure(1);nichols(num,den,w);grid on;hold on
axis([-200 0 -60 60])
K=12;
num=K*[10 1];
nichols(num,den,w);
title('Lieu de Black-Nichols pour K=1 et K=12')
hold off
%
% Zoom sur le lieu de BN
K=1;
num=K*[10 1];
figure(2);nichols(num,den,w);grid on;hold on
axis([-200 -90 -20 20])
K=12;
num=K*[10 1];
nichols(num,den,w);
title('Zoom sur le lieu de Black-Nichols pour K=1 et K=12')
hold off
```



- Commentons ces résultats.

⇒ Si $K = 1$ (0 dB) on obtient la courbe n°1 qui :

- tangente le contour $M = 3\text{dB}$ (pic de résonance de la boucle fermée) pour la pulsation $\omega_{R1} = 0,09 \text{ rad/s}$ (pulsation de résonance de la boucle fermée),
- coupe la ligne -6dB à $\omega_{c1-6\text{dB}} = 0,25 \text{ rad/s}$ (pulsation de coupure de la boucle fermée).

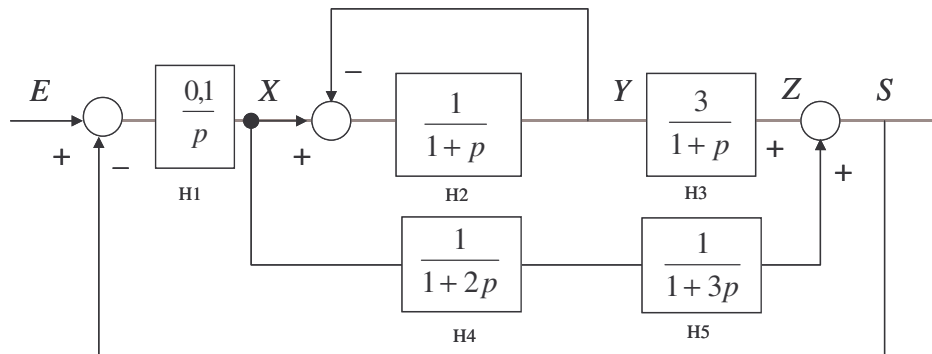
⇒ Si $K = 12$ (+21,6 dB) on obtient la courbe n°2 qui :

- tangente le contour $M = 3\text{dB}$ (pic de résonance de la boucle fermée) pour la pulsation $\omega_{R2} = 0,88 \text{ rad/s} > \omega_{R1}$ (pulsation de résonance de la boucle fermée).
- coupe la ligne -6dB à $\omega_{c2-6\text{dB}} = 1,73 \text{ rad/s}$ (pulsation de coupure de la boucle fermée).

L'augmentation de gain permet d'accroître la bande passante de la boucle fermée. Dans ce cas particulier le pic de surtension n'est pas modifié (3 dB).

9.5. EXEMPLES D'UTILISATION DE MATLAB

9.5.1. ETUDE D'UNE BOUCLE DE COMMANDE COMPLEXE

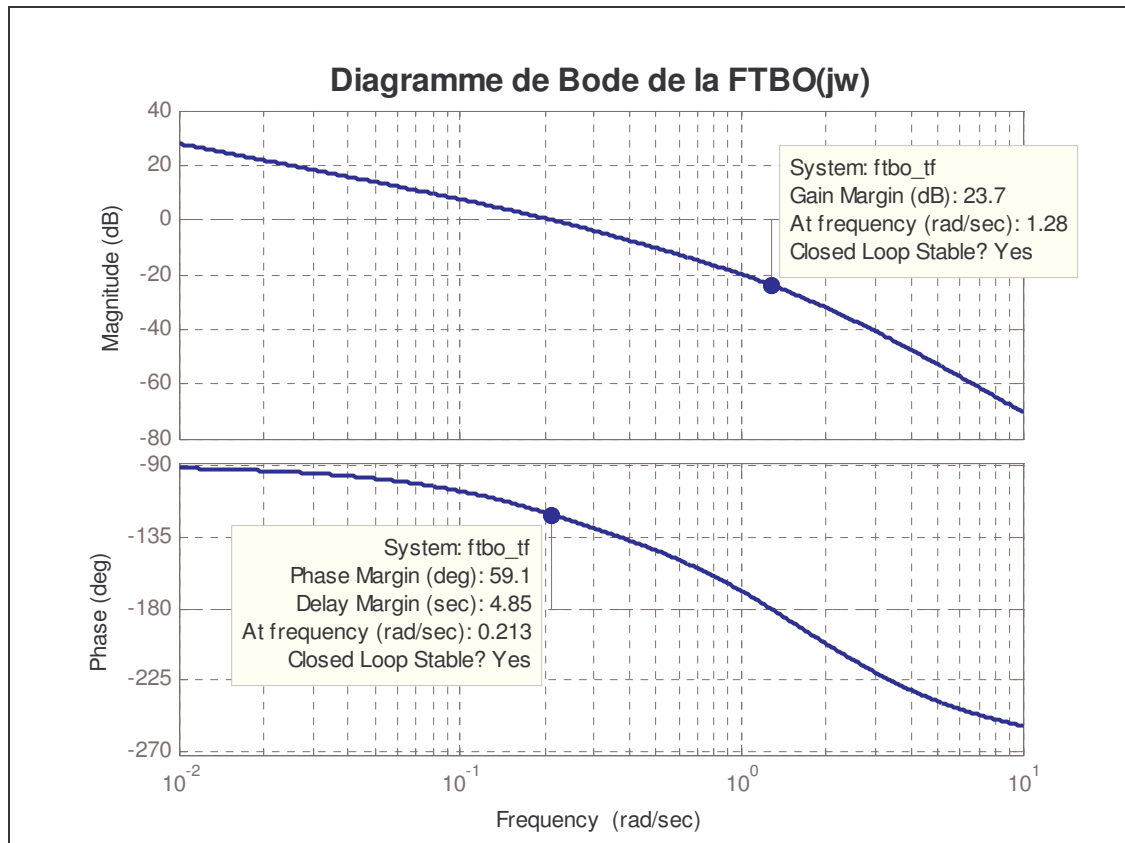


```
%
% Script Chap9_2.m
% ANALYSE FREQUENTIELLE DES SALC
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 9 juin 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ù
clear all;clc;
%
% FTBO DU SYSTEME
% Numérateurs des FT
n1=0.1;n2=1;n3=3;n4=1;n5=1;
% Dénominateurs des FT
d1=[1 0];d2=[1 1]; d3=[1 1];
d4=[2 1]; d5=[3 1];
ù
% REDUCTION DU SCHEMA
% Réduction de la petite boucle sur H2
[n2bf,d2bf]=cloop(n2,d2);
% Réduction de la chaîne 1 en série
[ns1,ds1]=series(n2bf,d2bf,n3,d3);
% Réduction de la chaîne 2 en série
[ns2,ds2]=series(n4,d4,n5,d5);
% Mise en parallèle des chaînes 1 et 2
[np,dp]=parallel(ns1,ds1,ns2,ds2);
[nftbo,dftbo]=series(n1,d1,np,dp);
```

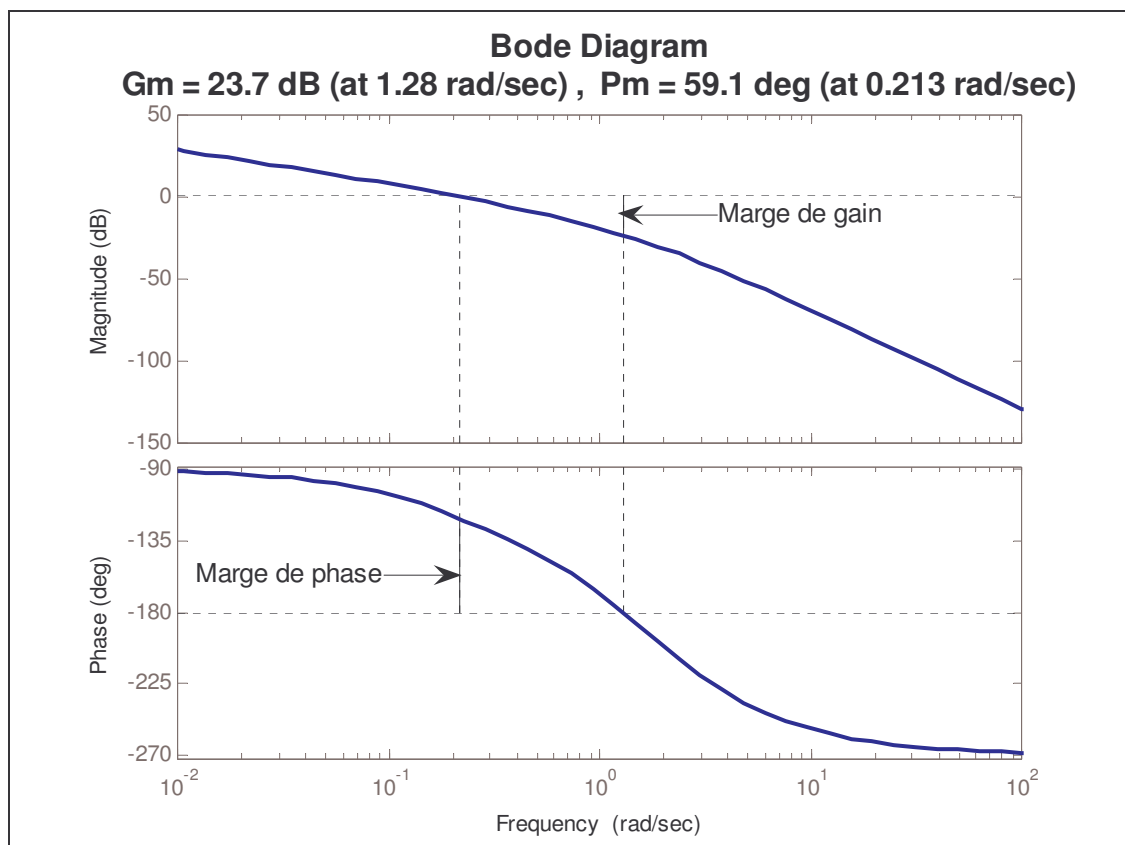
<pre>% % CARACTERISTIQUES DE LA FTBO % Forme "transfer function" ftbo_tf=tf(nftbo,dftbo) % Pour l'obtenir en "p" printsys(nftbo,dftbo,'p') % Calcul des zéros de la FTBO zeros=roots(nftbo) % Calcul des pôles de la FTBO poles=roots(dftbo) % Forme "zpk" de la FTBO ftbo_zpk=zpk(ftbo_tf) % Gain statique de la FTBO K=dcgain(tf([1 0],1)*ftbo_tf) % Caractéristiques des zéros % zeta = coefficient d'amortissement % wn = pulsation propre non amortie [wn,zeta]=damp(zeros) % Caractéristiques des poles damp(poles)</pre>	<p>Transfer function: $1.9 s^2 + 1.8 s + 0.5$ ----- $\frac{6 s^5 + 23 s^4 + 28 s^3 + 13 s^2 + 2 s}{1.9 p^2 + 1.8 p + 0.5}$ ----- $\frac{6 p^5 + 23 p^4 + 28 p^3 + 13 p^2 + 2 p}{}$</p> <p>zeros = -0.4737 + 0.1969i -0.4737 - 0.1969i</p> <p>poles = 0 -2.0000 -1.0000 -0.5000 -0.3333</p> <p>Zero/pole/gain: $0.31667 (s^2 + 0.9474s + 0.2632)$ ----- $s (s+2) (s+1) (s+0.5) (s+0.3333)$</p> <p>K = 0.2500</p> <p>wn = 0.5130 0.5130</p> <p>zeta = 0.9234 0.9234</p> <table><tr><th>Eigenvalue</th><th>Damping</th><th>Freq. (rad/s)</th></tr><tr><td>0.00e+000</td><td>-1.00e+000</td><td>0.00e+000</td></tr><tr><td>-2.00e+000</td><td>1.00e+000</td><td>2.00e+000</td></tr><tr><td>-1.00e+000</td><td>1.00e+000</td><td>1.00e+000</td></tr><tr><td>-5.00e-001</td><td>1.00e+000</td><td>5.00e-001</td></tr><tr><td>-3.33e-001</td><td>1.00e+000</td><td>3.33e-001</td></tr></table>	Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)	0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000	-2.00e+000	1.00e+000	2.00e+000	-1.00e+000	1.00e+000	1.00e+000	-5.00e-001	1.00e+000	5.00e-001	-3.33e-001	1.00e+000	3.33e-001
Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)																	
0.00e+000	-1.00e+000	0.00e+000																	
-2.00e+000	1.00e+000	2.00e+000																	
-1.00e+000	1.00e+000	1.00e+000																	
-5.00e-001	1.00e+000	5.00e-001																	
-3.33e-001	1.00e+000	3.33e-001																	

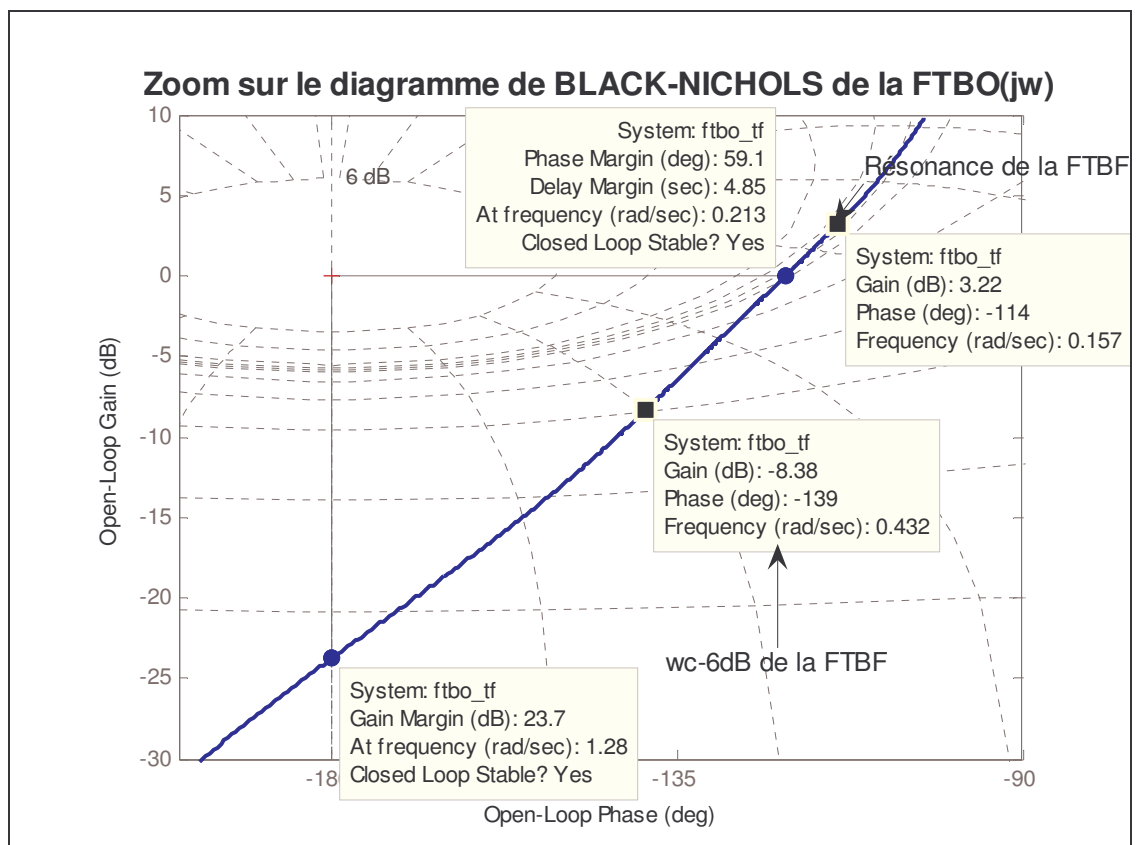
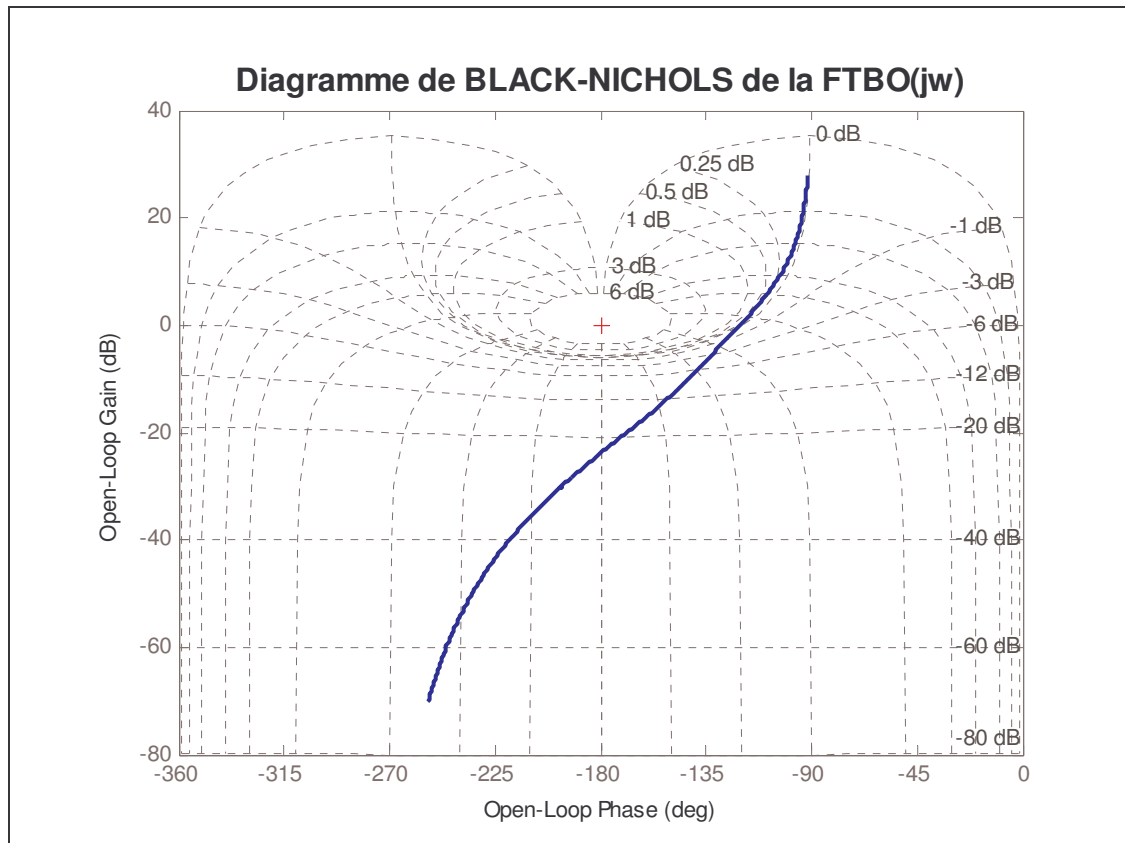
Traçons les diagrammes fréquentiels de BODE ET DE BLACK-NICHOLS.

<pre> % % DIAGRAMME DE BODE de la FTBO % On définit un domaine de pulsation % 1000 points entre 0,01 et 10 rad/s w=logspace(-2,1,1000); figure(1);bode(ftbo_tf,w);grid; title('Diagramme de Bode de la FTBO(jw)') % Marge de gain et marge de phase de la FTBO(jw) figure(2);margin(ftbo_tf) % % DIAGRAMME DE BLACK-NICHOLS DE LA FTBO figure(3);nichols(ftbo_tf,w);grid; title('Diagramme de BLACK-NICHOLS de la FTBO(jw)') figure(4);nichols(ftbo_tf,w);grid; axis([-200 -90 -30 10]) title('Zoom sur le diagramme de BLACK-NICHOLS de la FTBO(jw)') % </pre>	
---	--

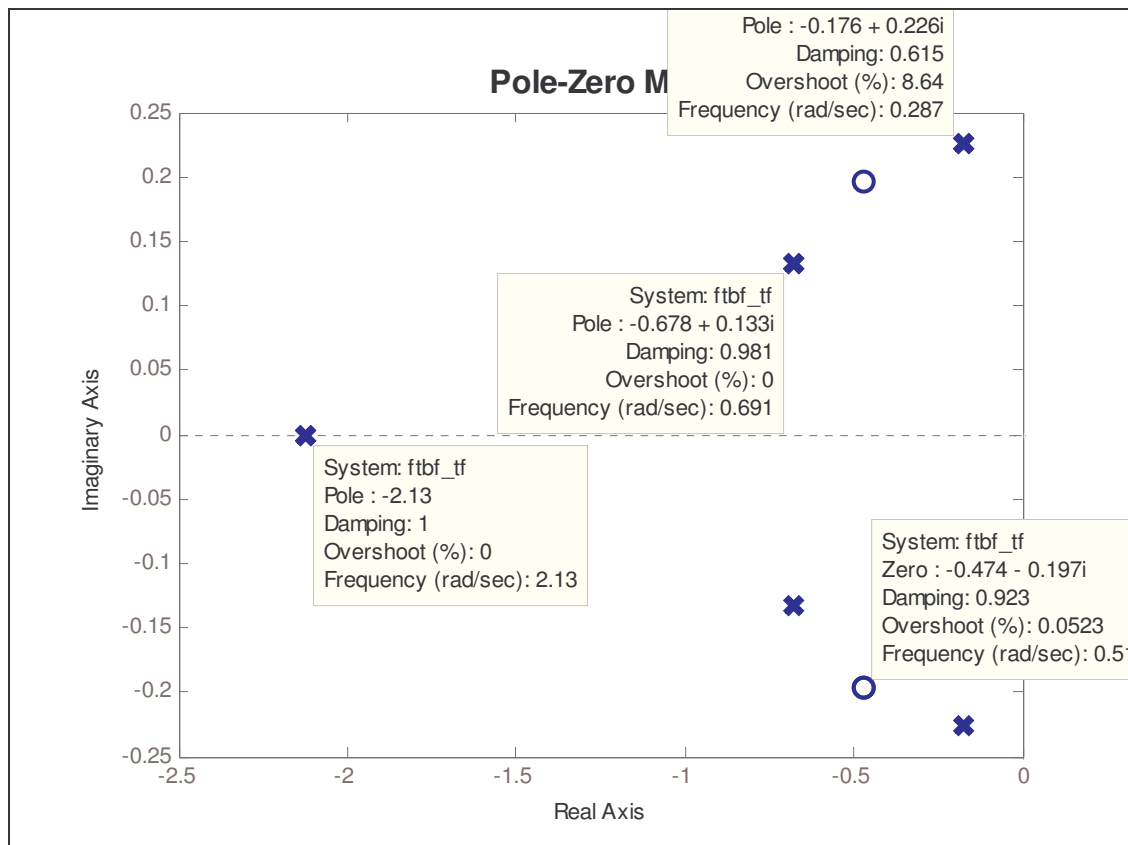


L'utilité et la définition des notions de marge de phase et de marge de gain sont explicitées au chapitre 10.





<pre> % % ETUDE GENERALE DE LA FTBF (jw) % Forme transfer function ftbf_tf=feedback(ftbo_tf,1) % Extraction des polynômes numérateur et dénominateur [nftbf,dftbf]=tfdata(ftbf_tf,'v') % Forme "zpk" ftbf_zpk=zpk(ftbf_tf) % Extraction des zéros, pôles et facteur de gain de la FTBF [z_bf,p_bf,k_bf]=zpkdata(ftbf_tf,'v') % Caractéristiques des pôles de la FTBF [wn,zeta]=damp(p_bf) % % Constellation des pôles et des zéros figure(5);pzmap(ftbf_tf) </pre>	<p>Transfer function:</p> $\frac{1.9 s^2 + 1.8 s + 0.5}{6 s^5 + 23 s^4 + 28 s^3 + 14.9 s^2 + 3.8 s + 0.5}$ <p>nftbf =</p> <pre>0 0 0 1.9000 1.8000 0.5000</pre> <p>dftbf =</p> <pre>6.0000 23.0000 28.0000 14.9000 3.8000 0.5000</pre> <p>Zero/pole/gain:</p> $\frac{0.31667 (s^2 + 0.9474s + 0.2632)}{(s+2.126) (s^2+1.355s+0.4769)(s^2+0.3525s + 0.08221)}$ <p>z_bf =</p> <pre>-0.4737 + 0.1969i -0.4737 - 0.1969i</pre> <p>p_bf =</p> <pre>-2.1257 -0.6776 + 0.1333i -0.6776 - 0.1333i -0.1762 + 0.2262i -0.1762 - 0.2262i</pre> <p>k_bf =</p> <pre>0.3167</pre> <p>wn =</p> <pre>2.1257 0.6906 0.6906 0.2867 0.2867</pre> <p>zeta =</p> <pre>1.0000 0.9812 0.9812 0.6147 0.6147</pre>
---	---



Cette transmittance comporte 5 pôles, 1 pôle réel et 2 paires de pôles complexes conjugués, et une paire de zéros complexes. La paire de pôles complexes :

$$p_{bf_{1,2}} = -0,176 \pm 0,226i = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

constitue le mode dominant de cette fonction de transfert. C'est ce que nous allons vérifier.

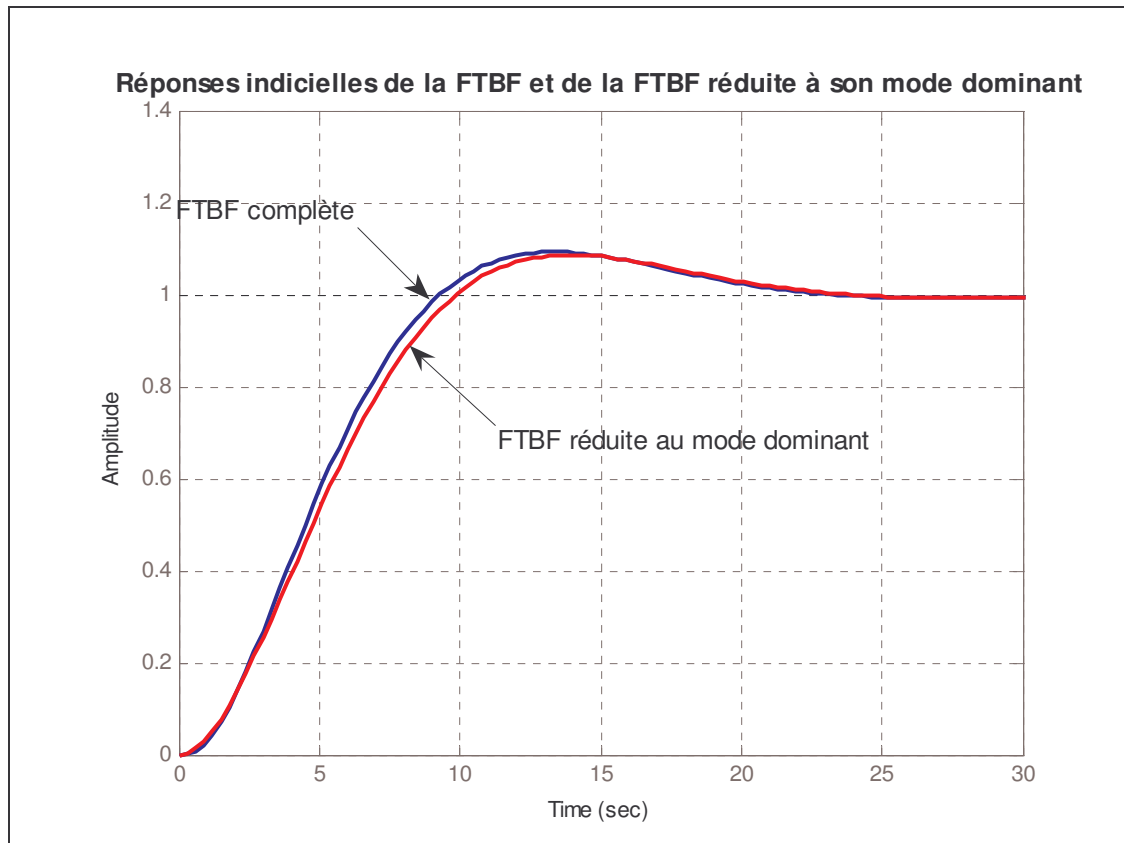
$$ftbf_dom = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

```
%
% Formons le 2d ordre du mode dominant
[n_dom,d_dom]=ord2(wn(5),zeta(5));
% On ajuste le gain statique à 1
ftbf_dom=wn(5)^2*tf(n_dom,d_dom)

% Traçons les réponses indicielles
figure(6);step(ftbf_tf,ftbf_dom,30);grid
title('Réponses indicielles de la FTBF
et de la FTBF réduite à son mode
dominant')
% Analyse de la réponse indicielle
figure(7);step(ftbf_tf,30);grid
title('Réponse indicielle de la FTBF')
```

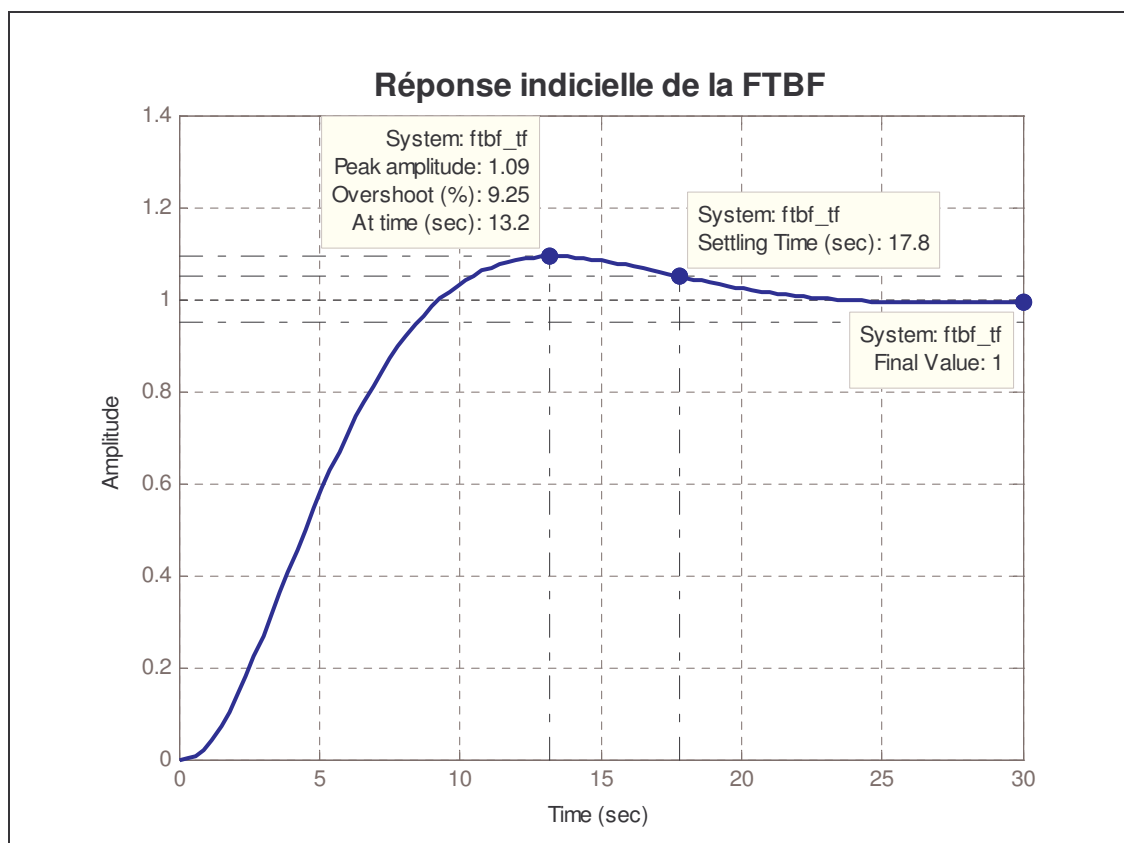
Transfer function:
0.08221

 $s^2 + 0.3525 s + 0.08221$



Ainsi on peut écrire que :

$$FTBF(p) = \frac{1.9p^2 + 1.8p + 0.5}{6p^5 + 23p^4 + 28p^3 + 14.9p^2 + 3.8p + 0.5} \cong \frac{1}{12.17p^2 + 4.29p + 1}$$

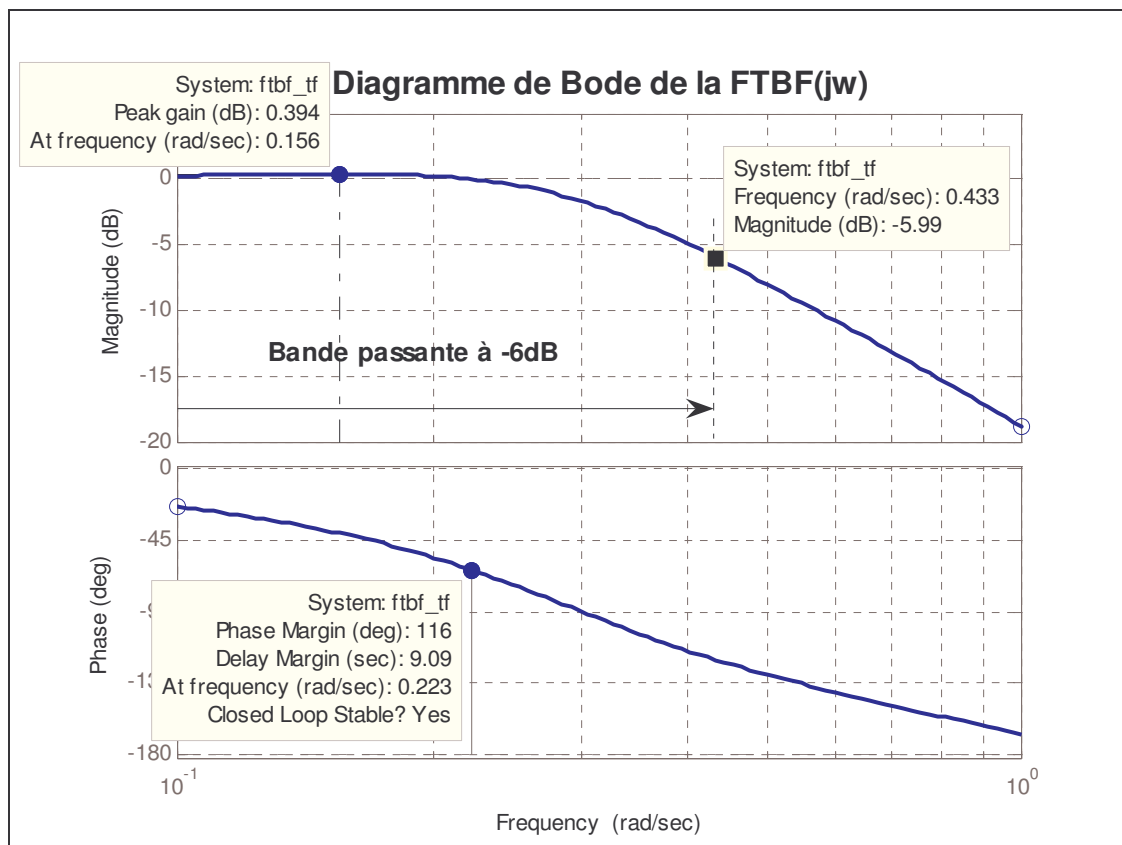


Ainsi la FTBF du système étudié en boucle fermée, peut être assimilée à la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre. Cette démarche simplificatrice est évidemment de nature à faciliter les divers calculs auxquels est confronté le concepteur du système.

Les performances sont les suivantes :

- la pulsation propre non amortie est de 0,287 rad/s.
- le coefficient d'amortissement est égal à 0,615.
- le dépassement D1% est de l'ordre de 9%.
- le temps de réponse à 5% est d'environ 18 s.
- le temps de pic est de l'ordre de 13 s.

```
%
% ANALYSE FREQUENTIELLE de la FTBF
w=logspace(-1,0,100);
figure(8);bode(ftbf_tf,w);grid;
title('Diagramme de Bode de la FTBF(jw)')
%
```

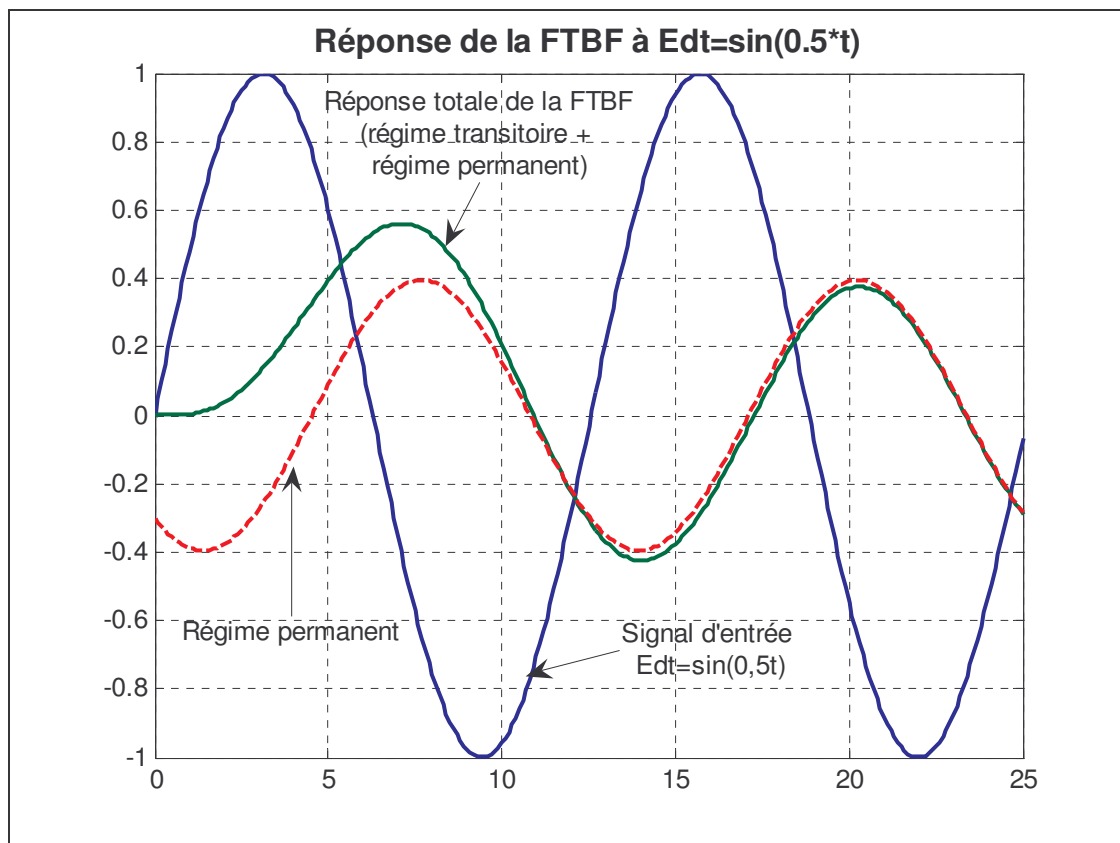


Les performances sont les suivantes :

- la pulsation de coupure à -6dB est 0,52 rad/s.
- la bande passante à -6dB est de 0,52 rad/s
- le pulsation de résonance est de 0,156 rad/s
- le coefficient de surtension est de 0,394 dB

```

%
% ETUDE HARMONIQUE DE LA FTBF
t=[0:0.1:25]';w0=0.5;
Edt=sin(w0*t);
Sdtt=lsim(ftbf_tf,Edt,t);
[A,phi]=bode(ftbf_tf,w0);
Sdtp=A*sin(w0*t+phi*pi/180);
figure(9);plot(t,Edt,t,Sdtt,t,Sdtp,'--');grid
title('Réponse de la FTBF à Edt=sin(0.5*t)')
figure(10);plot(Edt,Sdtt,Edt,Sdtp);grid
title('Figures de Lissajous')
%
```



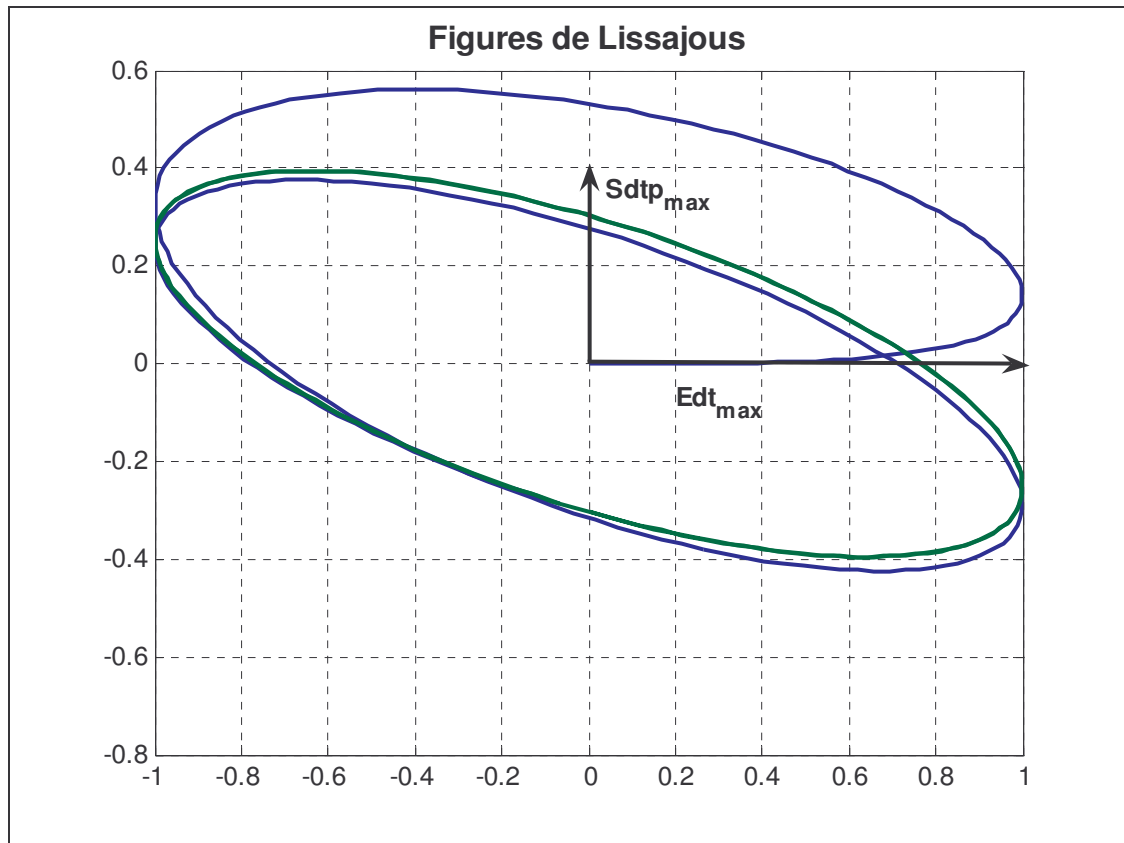
Il s'agit dans cet exemple d'illustrer une utilisation de l'instruction « lsim ».

On a représenté :

- la réponse complète (régime transitoire + régime permanent) de la FTBF à une entrée sinusoïdale $e(t) = \sin(0,5 \cdot t)$;
- le régime permanent de la FTBF à cette même entrée.

Le régime transitoire est évidemment la différence de ces deux signaux. On observe que le régime transitoire s'annule (s'éteint) au bout d'une vingtaine de secondes. On rappelle qu'en analyse harmonique on suppose que le régime transitoire est éteint.

Traçons les figures de Lissajous (Cf. chapitre 8.2.2.)



9.5.2. PRISE EN COMPTE DES RETARDS

Soit une boucle de commande à retour unitaire admettant pour transmittance de la chaîne directe l'expression :

$$FTBO(p) = \frac{1,5p^3 + 1,9p^2 + 1,8p + 0,5}{6p^5 + 23p^4 + 28p^3 + 13p^2 + 2p} e^{-\tau p}$$

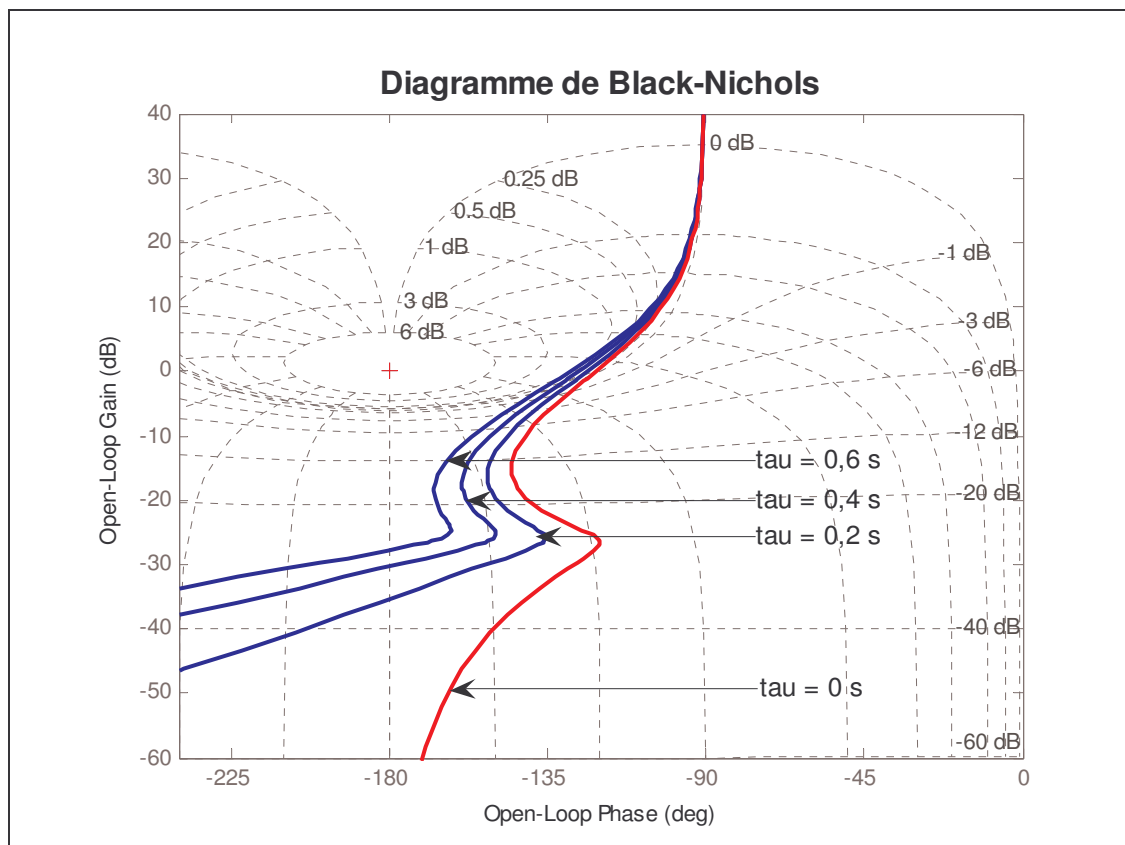
On désire tracer le lieu de BLACK-NICHOLS pour différentes valeurs du retard pur $\tau = 0$ s, 0.2 s, 0.4 s, et 0.6 s).

```
%
% Script Chap9_3.m
% ANALYSE FREQUENTIELLE DES SALC
% EFFET D'UN RETARD PUR DANS LA FTBO
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 10 juin 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
%
% FTBO sans retard
ftbo=tf([1.5 1.9 1.8 0.5],[6 23 28 13 2 0]);
```



```

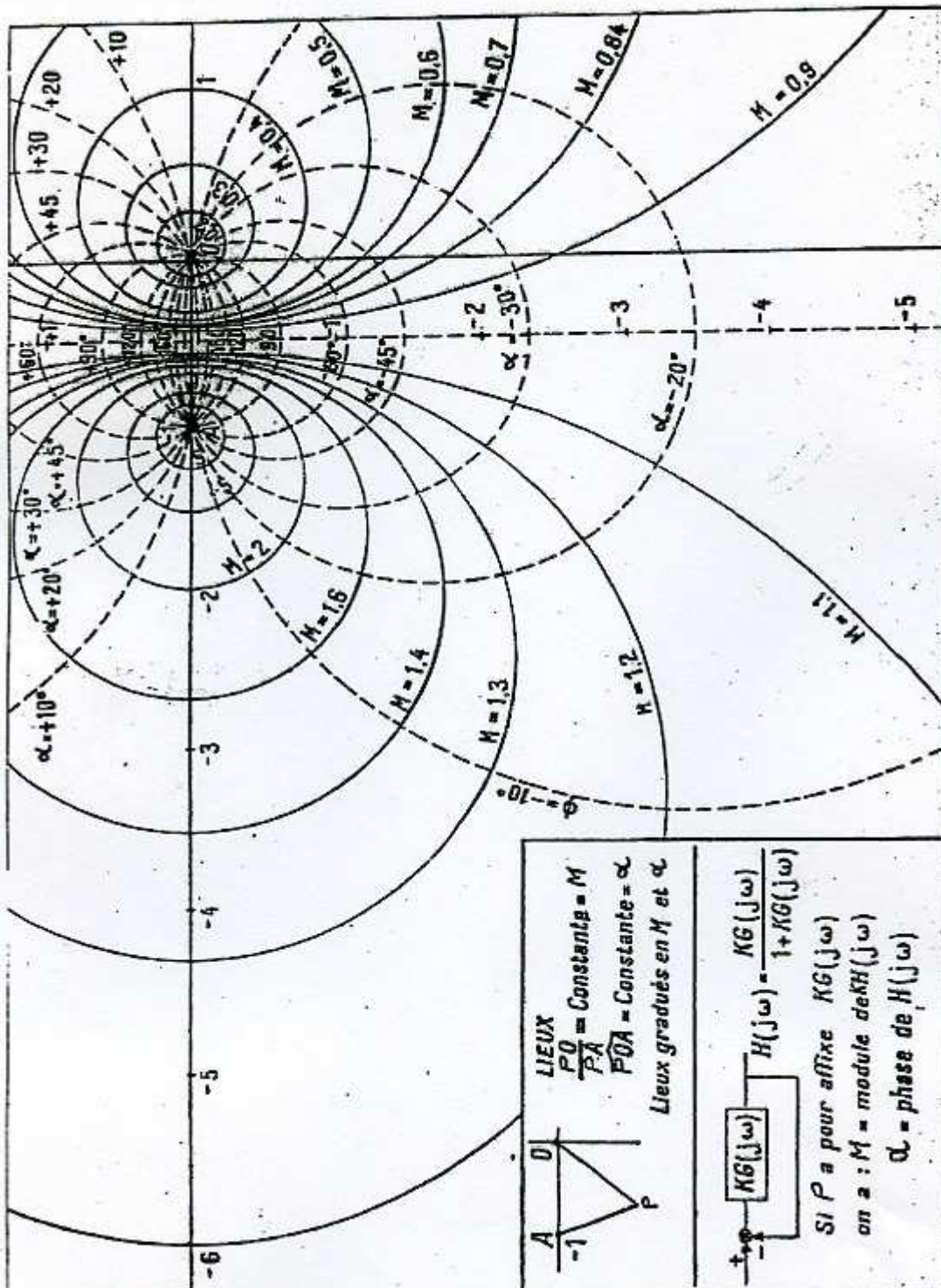
%
% Soit un retard pur de « tau » secondes en série avec ftbo
for jj=1:3
    tau=0.2*jj;
    [amp,phi,w]=nichols(ftbo);
    amp=squeeze(amp);
    phi=squeeze(phi);
    n=max(size(w));
    for ii=1:n
        phiret(ii)=phi(ii)-tau*w(ii)*180/pi;
    end
nichols(ftbo,'r');hold on;
plot(phiret,20*log10(amp),'b');grid
axis([-240 0 -60 40])
end
title('Diagramme de Black-Nichols')
hold off
%
```



Nous verrons qu'inséré dans la FTBO, un retard pur déstabilise la FTBF car il diminue la marge de phase et la marge de gain.

ANNEXE A.9.1.

ABaque DE HALL



ANNEXE A.9.2.

ABAQUE DE BLACK-NICHOLS

