

# Commande numérique

Olivier Kermorgant

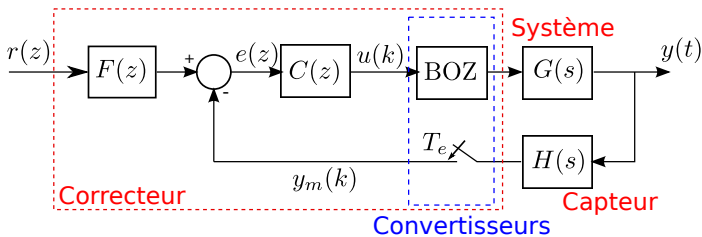
# Asservissement numérique d'un système continu

## Première partie : propriétés et analyse

- échantillonnage, transmittance, stabilité

## Deuxième partie : commande

- Synthèse des correcteurs numériques



# Correcteurs numériques - objectifs

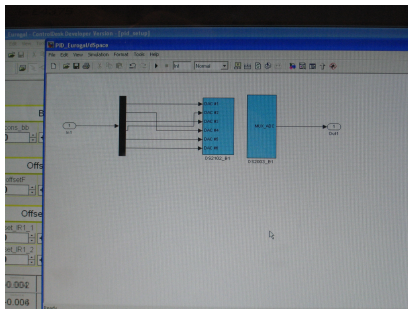
## Objectifs d'un correcteur

- Stabilité : le système en boucle fermée est stable
- Performance : conforme à un cahier des charges
- Robustesse : sensibilité aux incertitudes / perturbations

## Correcteurs numériques vs analogiques (continus)

- Intégrer des capteurs numériques
- Facilité de mise en œuvre
- Facilités de simulation et de modification
- Commande avancée
  - Commande optimale
  - Commande robuste
  - Commande prédictive
- Dépend de la période d'échantillonnage

# Facilité de modification ?



# Un exemple en robotique

---

## Asservissement visuel

- Positionner un robot à partir d'une caméra
- Deux étages de correcteurs : 25 Hz (caméra), 100 Hz (moteurs)
- Pas de critère particulier : correcteur PI (ici assez lent)

## Asservissement visuel

- Suivre la consigne de télé-opération (joystick)
- Maintenir une certaine force sur le patient
- Maintenir la visibilité

# Synthèse des correcteurs numériques

## Démarche usuelle

- Définir les objectifs du correcteur (cahier des charges)
- PI / PID en simulation puis sur le système
- Commande avancée si besoin

## Méthodes inspirées du continu

- PID numérique
- Transposition d'un correcteur continu
- Transformée en  $w$

## Méthodes propres au numérique

- Modèle interne
- RST
- Retour d'état numérique

# Cahier des charges

---

Comme en continu :



# Cahier des charges

---

Comme en continu :

- Stabilité : marge de phase  $M\phi \in [50, 70]$

Comme en continu :

- Stabilité : marge de phase  $M\phi \in [50, 70]$
- Précision : grand gain ou intégrateur, dépend de la consigne et des perturbations

Comme en continu :

- Stabilité : marge de phase  $M\phi \in [50, 70]$
- Précision : grand gain ou intégrateur, dépend de la consigne et des perturbations
- Rapidité : compromis avec la stabilité

Comme en continu :

- Stabilité : marge de phase  $M\phi \in [50, 70]$
- Précision : grand gain ou intégrateur, dépend de la consigne et des perturbations
- Rapidité : compromis avec la stabilité

Propre au numérique

- Définir la fonction de transfert souhaitée pour le système bouclé

# Cahier des charges

---

Comme en continu :

- Stabilité : marge de phase  $M\phi \in [50, 70]$
- Précision : grand gain ou intégrateur, dépend de la consigne et des perturbations
- Rapidité : compromis avec la stabilité

Propre au numérique

- Définir la fonction de transfert souhaitée pour le système bouclé

En pratique :

- Essayer d'être ambitieux (meilleure performance)
- Faire la part des choses entre la réalité et la science-fiction

## Rappel sur le PID analogique

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$\text{Correcteur } C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

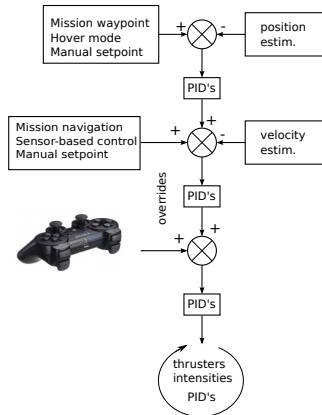
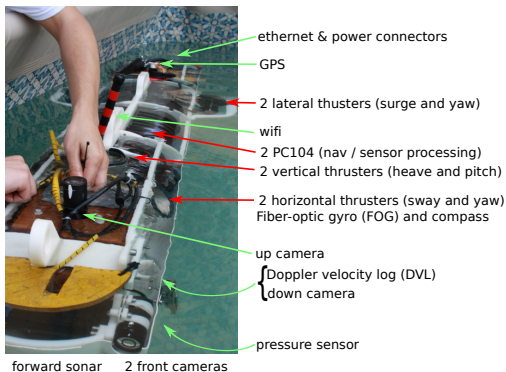
$$\text{Avec dérivée filtrée } C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_d s / N} \right) \quad (N \geq 5)$$

Réglage simple et adapté à la plupart des systèmes

- PI : 90%, PID : 95%
- Réglage souvent itératif (essai / erreur)

# Structure de PID en cascade

Utilisé pour les systèmes complexes (plusieurs entrées / sorties)



Différentes périodes d'échantillonnage

Préréglage sur modèle puis affinage sur le robot

Écriture discrète du PID

$$u_k = K_p \left( e_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_0^k e_i + \frac{T_d}{T_e} (e_k - e_{k-1}) \right) = p_k + i_k + d_k$$



# PID numérique

## Écriture discrète du PID

$$u_k = K_p \left( e_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_0^k e_i + \frac{T_d}{T_e} (e_k - e_{k-1}) \right) = p_k + i_k + d_k$$

Transformées en  $z$  :

$$\begin{cases} P(z) &= K_p E(z) \\ I(z) &= z^{-1} I(z) + K_p \frac{T_e}{T_i} E(z) \\ D(z) &= K_p \frac{T_d}{T_e} (1 - z^{-1}) E(z) \end{cases}$$

## Écriture discrète du PID

$$u_k = K_p \left( e_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_0^k e_i + \frac{T_d}{T_e} (e_k - e_{k-1}) \right) = p_k + i_k + d_k$$

Transformées en  $z$  :

$$\begin{cases} P(z) &= K_p E(z) \\ I(z) &= z^{-1} I(z) + K_p \frac{T_e}{T_i} E(z) \\ D(z) &= K_p \frac{T_d}{T_e} (1 - z^{-1}) E(z) \end{cases}$$

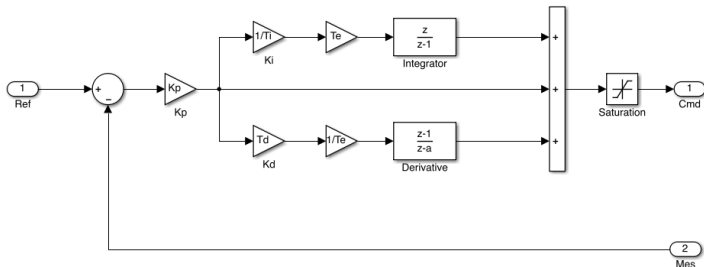
$$\text{Correcteur } C(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_e}{T_i(1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \right)$$

# PID numérique dans un code

```
# def Te, Ki, Kp, Kd, r
i = 0
e0 = e = 0
while running:
    # update measure
    y = ...
    e = r - y
    # update integral
    i += Ki*Te*e
    # compute command
    u = Kp * (e + i + Kd/Te*(e-e0))
    # save current error
    e0 = e
```

Idem pour les variantes qui suivent

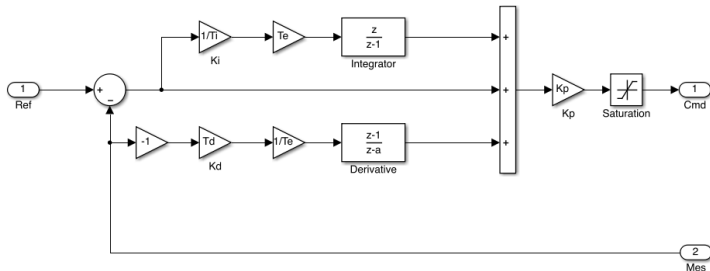
# Schéma-bloc du PID numérique



Calqué sur l'approche continue mais

- actionneurs saturés en pratique
- pic de commande en dérivant une consigne discontinue

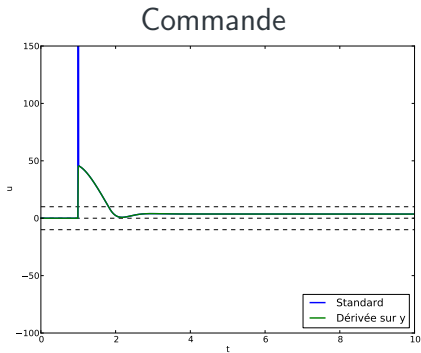
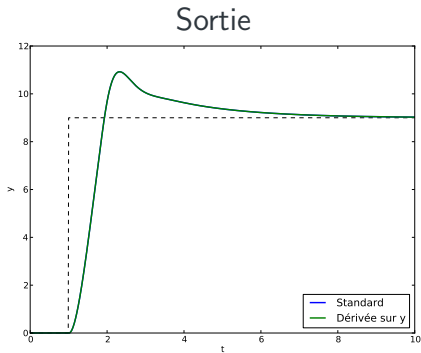
# Sans dérivation de la consigne



$$d_k = K_p \frac{T_d}{T_e} (y_k - y_{k-1})$$

L'action dérivée ne filtre que la mesure

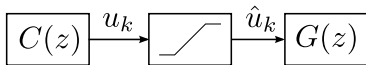
# Comportement sans dérivation de la consigne



Influence sur la commande lors du changement de consigne  
Pas d'influence sur la sortie (saturation)

# Gestion des saturations

Saturation de fait dans l'actionneur et le CNA



$$\hat{u}_k = \begin{cases} +u_{\max} & \text{si } u_k > u_{\max} \\ u_k & \text{si } -u_{\max} < u_k < u_{\max} \\ -u_{\max} & \text{si } u_k < -u_{\max} \end{cases}$$

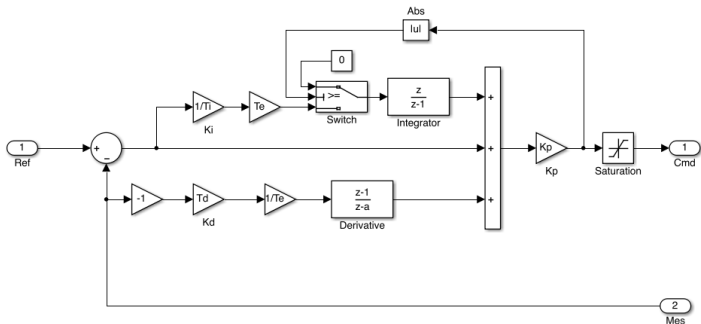
Risque d'emballlement du terme intégral

- Gel de l'intégration
- Rétroaction négative

# Intégration conditionnelle

N'intégrer que si la commande ne sature pas

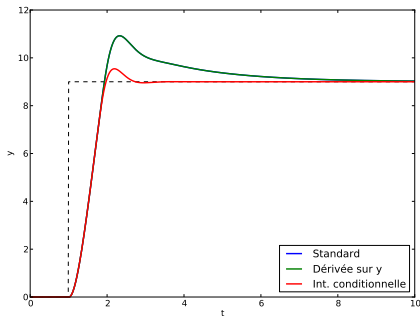
$$i_{k+1} = \begin{cases} i_k + \frac{T_e}{T_i} e_{k+1} & \text{si } |u_k| < u_{\max} \\ i_k & \text{sinon} \end{cases}$$



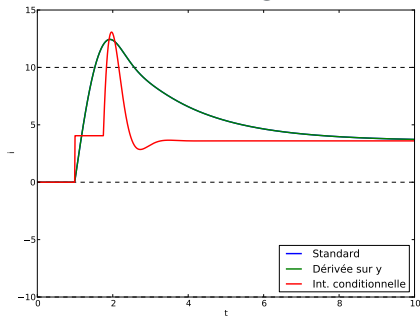


# Comportement avec intégration conditionnelle

## Sortie



## Terme intégral

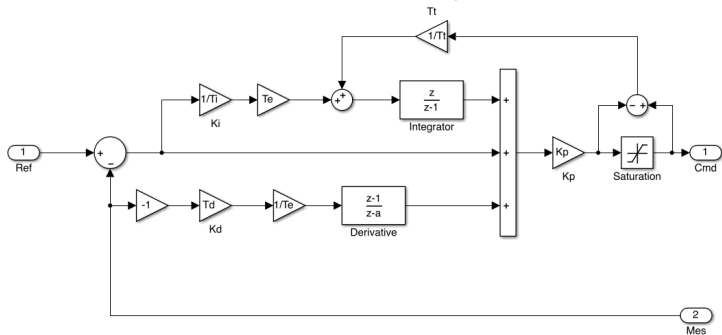


Le terme intégral est calmé beaucoup plus vite  
Convergence plus rapide, moins de dépassement

# Dispositif anti-emballement

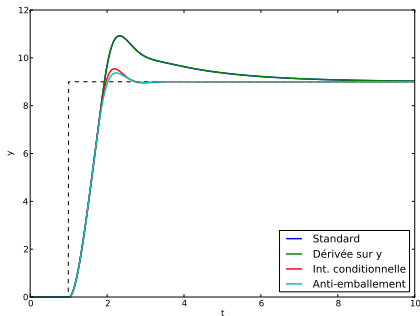
Rétro-action sur l'écart entre les commandes avant et après saturation

$$i_{k+1} = i_k + \frac{T_e}{T_i} e_{k+1} + \frac{1}{T_t} (\hat{u}_k - u_k)$$

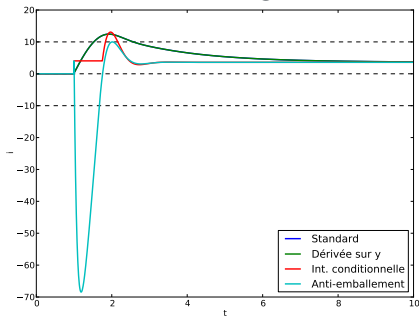


# Comportement avec anti-emballement

## Sortie



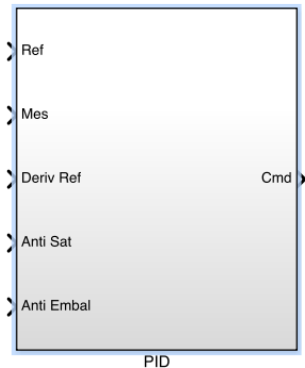
## Terme intégral



Le terme intégral corrige l'effet du terme proportionnel  
Convergence encore plus rapide, moins de dépassement  
Un gain de plus à régler...

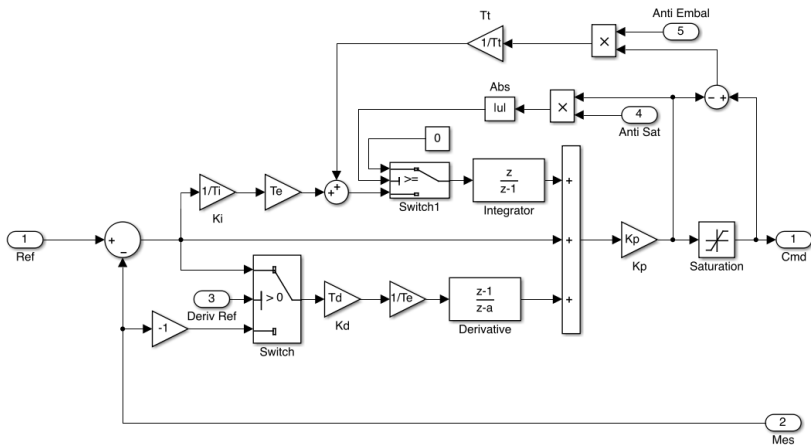
# Bilan : le schéma à avoir sur son disque dur

Entrées permettant de choisir la structure utilisée



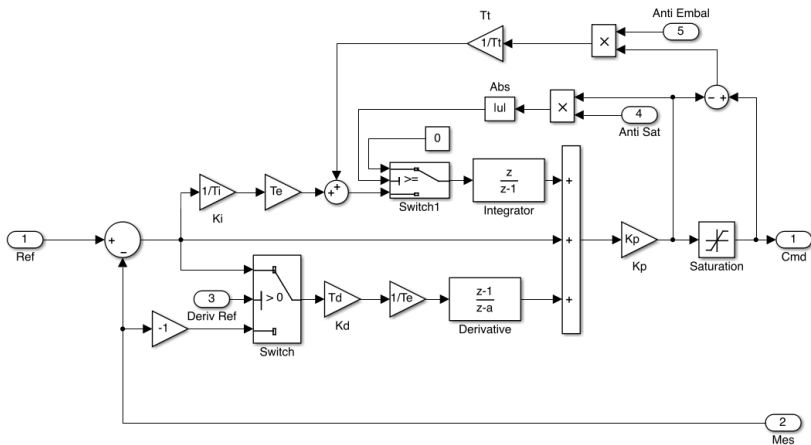
# Bilan : le schéma à avoir sur son disque dur

Entrées permettant de choisir la structure utilisée



# Bilan : le schéma à avoir sur son disque dur

Entrées permettant de choisir la structure utilisée



On peut préférer le code correspondant...

# Réglage des gains

## Influence des gains

Gain	T montée	T stabilisation	Dépassement	Erreur statique
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	–	Diminue	Diminue	–

# Réglage des gains

## Influence des gains

Gain	T montée	T stabilisation	Dépassement	Erreur statique
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	–	Diminue	Diminue	–

Démarche : partir d'un premier jeu de gains

- En simulation (système approximé) ou sur système réel
- Préréglage sur réponse indicielle
- Préréglage sur système bouclé



# Réglage des gains

## Influence des gains

Gain	T montée	T stabilisation	Dépassement	Erreur statique
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	–	Diminue	Diminue	–

Démarche : partir d'un premier jeu de gains

- En simulation (système approximé) ou sur système réel
- Préréglage sur réponse indicielle
- Préréglage sur système bouclé

Le préréglage est parfois présenté comme un auto-réglage

# Réglage des gains

## Influence des gains

Gain	T montée	T stabilisation	Dépassement	Erreur statique
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	–	Diminue	Diminue	–

Démarche : partir d'un premier jeu de gains

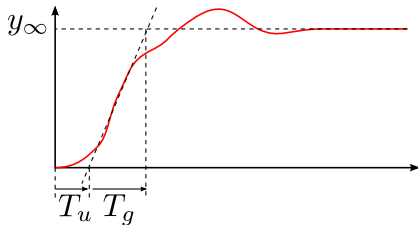
- En simulation (système approximé) ou sur système réel
- Préréglage sur réponse indicielle
- Préréglage sur système bouclé

Le préréglage est parfois présenté comme un auto-réglage

Mais souvent c'est vraiment un **préréglage**...

# Préréglage sur réponse indicielle

## Méthode de Takahashi



$$\text{Correcteur P : } K_p = \frac{T_g}{y_{\infty}(T_u + T_e)}$$

$$\text{Correcteur PI : } \begin{cases} K_p = \frac{0.9 T_g}{y_{\infty}(T_u + 0.5 T_e)^2} - \frac{1}{2} K_i T_e \\ K_i = \frac{0.27 T_g}{y_{\infty}(T_u + 0.5 T_e)^2} \end{cases}$$

Existe aussi pour correcteur PID

# Préréglage sur système bouclé : Ziegler–Nichols

Régler  $K_i = K_d = 0$ , trouver le  $K_p$  qui met le système en oscillation

- Gain critique  $K_c$  et période  $T_c$
- $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  donnés par :

Contrôleur	$K_p$	$K_i$	$K_d$
$P$	$0.5K_c$	—	—
$PI$	$0.45K_c$	$0.8/T_c$	—
$PD$	$0.8K_c$	—	$T_c/8$
$PID$	$0.6K_c$	$2/T_c$	$T_c/8$

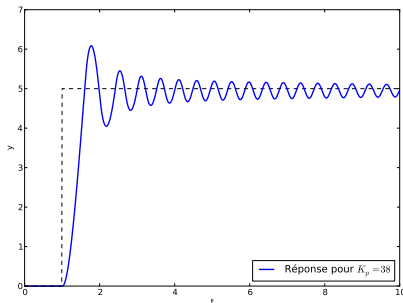
Existe aussi pour d'autres variations (peu ou pas de dépassement...)

Oscillations stressantes pour le système

- Adapté au préréglage sur modèle
- Ou aux prototypes industriels

# Exemple

Identification en  $\hat{G}(s) = \frac{2.5}{(1 + 0.5s)(1 + s)}$

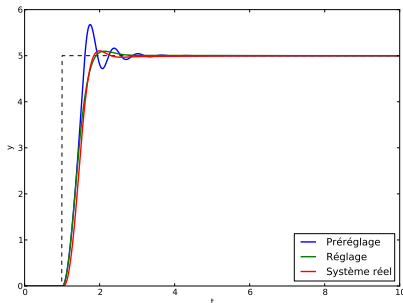


Gain critique sur modèle bouclé :  $K_c = 38$ ,  $T_c = 0.45s$

$$\rightarrow \begin{cases} K_p = 22 \\ K_i = 4 \\ K_d = 0.06 \end{cases}$$

# Comparatif des réponses

$$\text{Vrai système } G(s) = \frac{2.5}{(1 + 0.01s)(1 + 0.05s)(1 + 0.5s)(1 + s)}$$



Modèle approché : réponse souvent à améliorer

- Oscillations : augmenter  $K_d$
- Dépassement : diminuer  $K_p$  et  $K_i$
- Gains finaux :  $K_p = 5$     $K_i = 0.5$     $K_d = 0.15$

# Méthodologie de réglage

## Possibilité de préréglage sur modèle approché

- Réponse indicielle ou sur système bouclé
- Diminuer les gains pour les premiers tests...

## Sans possibilité de préréglage

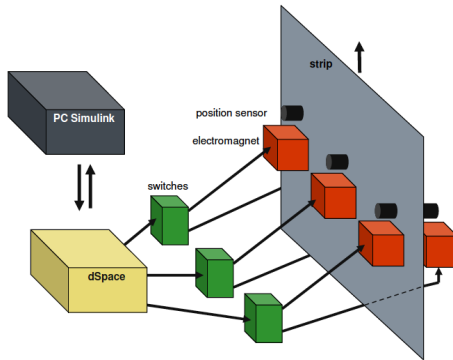
- Commencer avec  $K_i = K_d = 0$  et  $K_p$  petit
- Augmenter petit à petit...

Et surtout :

Gain	T montée	T stabilisation	Dépassement	Erreur statique
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	—	Diminue	Diminue	—

# Exemple d'un système complexe

## Stabilisation de bande

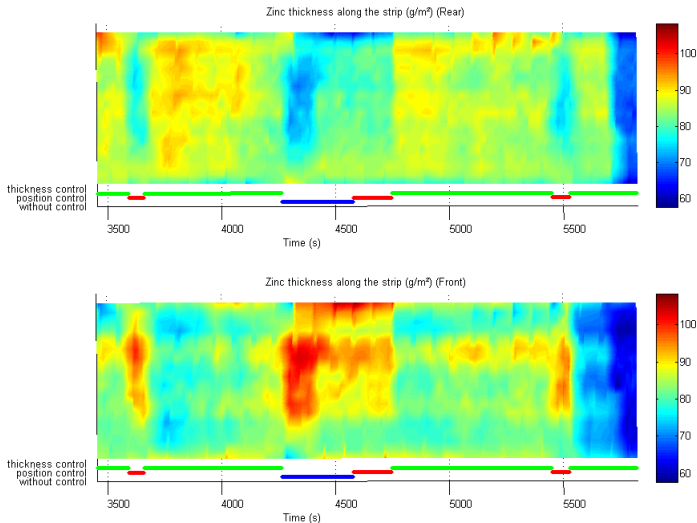


- Modèle non linéaire
- Mesure des performances avec 1 min de retard...
- Réglage vibrations sur maquette
- Réglage position sur modèle (et gains/2 pour tests en usine)



# Mettre en valeur un contrôleur (1/2)

## Le point de vue du service automatique



# Mettre en valeur un contrôleur (2/2)

---

Le point de vue du service communication

# Bilan sur le PID

---

# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

Préréglage puis correction

# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

Préréglage puis correction

Utilisation avancée

# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

Préréglage puis correction

Utilisation avancée

- Gain scheduling  
Plusieurs jeux de gains en fonction du point de fonctionnement

# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

Préréglage puis correction

Utilisation avancée

- Gain scheduling  
Plusieurs jeux de gains en fonction du point de fonctionnement
- Réglage adaptatif  
Les gains évoluent pendant le fonctionnement  
Rajoute une boucle : attention à la stabilité



# Bilan sur le PID

---

Contrôleur le plus utilisé

Préréglage puis correction

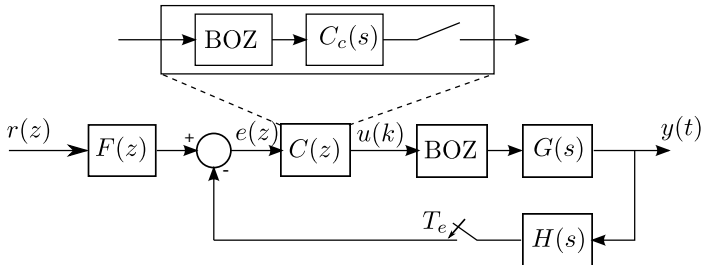
Utilisation avancée

- Gain scheduling  
Plusieurs jeux de gains en fonction du point de fonctionnement
- Réglage adaptatif  
Les gains évoluent pendant le fonctionnement  
Rajoute une boucle : attention à la stabilité
- Le réglage adaptatif peut servir au gain scheduling  
Tableau des meilleurs gains trouvés par le système

# Méthodes de transposition

Existence d'un correcteur continu  $C_c(s)$

Calcul du correcteur numérique  $C(z)$  équivalent



$$C(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left( \frac{C_c(s)}{s} \right)$$

Quelle fonction  $s = f(z)$  pour un calcul simple ?

# Transposition au 1<sup>er</sup> ordre : méthode d'Euler

$$\text{Dérivée : } \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_e)}{T_e}$$

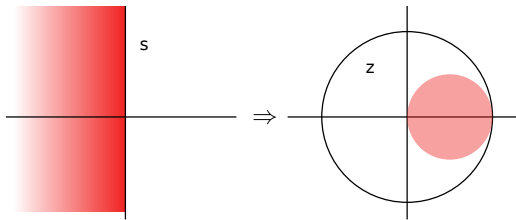
$$\text{Approximation : } sX_c(s) \Leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} X(z)$$

$$\text{Revient à estimer que } C(z) \approx C_c(s = \frac{1 - z^{-1}}{T_e})$$

$$\text{Équivalent au DL : } z^{-1} = e^{-sT_e} \approx 1 - sT_e$$

# Transposition au 1<sup>er</sup> ordre : stabilité et distortion

Conserve la stabilité : image de  $\{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(s) < 0\}$



Réponse fréquentielle :  $z = e^{j\omega T_e}$

$$\frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{T_e} = j\omega e^{-j\omega T_e/2} \frac{\sin(\omega T_e/2)}{\omega T_e/2}$$

Retard + distorsion

La plus utilisée... cf PID

# Transposition bilinéaire : Tustin's approximation

Intégration par la méthode des trapèzes

$$i_k = \int_0^{kT_e} x(t) dt \approx i_{k-1} + \frac{T_e}{2} (x(kT_e) + x((k-1)T_e))$$

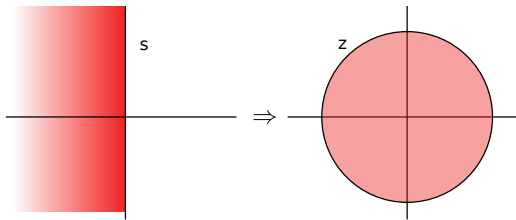
Forme équivalente :  $\frac{1}{s} X_c(s) \Leftrightarrow \frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z)$

Revient à estimer que  $C(z) \approx C_c(s = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$

Équivalent au DL :  $z^{-1} = e^{-sT_e} = \frac{e^{-sT_e/2}}{e^{sT_e/2}} \approx \frac{1-sT_e/2}{1+sT_e/2}$

# Transposition bilinéaire : stabilité et distortion

Conserve la stabilité : image de  $\{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(s) < 0\}$



Réponse fréquentielle :  $z = e^{j\omega T_e}$

$$\frac{2}{T_e} \frac{1 - e^{-j\omega T_e/2}}{1 + e^{j\omega T_e/2}} = j\omega \frac{\tan(\omega T_e/2)}{\omega T_e/2}$$

Pas de retard mais distorsion

# Autres méthodes de transposition

---

Amélioration de la transformation bilinéaire : pre-warping

- Améliorer la réponse fréquentielle autour d'une certaine pulsation

Conservation des pôles et zéros : matched transform

- Calculer les pôles et zéros équivalents

# Transformation bilinéaire avec pre-warping

$$\text{Bilinéaire : } s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\text{Distorsion : } s \approx j\omega \frac{\tan(\omega T_e/2)}{\omega T_e/2}$$

Ajout d'un terme correctif autour de  $\omega_c$

$$s = \frac{\omega_c T_e/2}{\tan(\omega_c T_e/2)} \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



# Matched transform

Décomposition de  $C_c$  :  $C_c(s) = K_c \frac{\prod(s - r_k)}{\prod(s - \rho_k)}$

Transformation des termes élémentaires

$$(s - r_i) \rightarrow (z - e^{r_i T_e})$$

$$C(z) = K_d \frac{\prod(z - e^{r_k T_e})}{\prod(z - e^{\rho_k T_e})}$$

Choix de  $K_d$  pour obtenir le même gain statique :  $C_c(0) = C(1)$

$$K_d = K_c \frac{\prod(-r_k)}{\prod(-\rho_k)} \frac{\prod(1 - e^{\rho_k T_e})}{\prod(1 - e^{r_k T_e})}$$

# Comparaison des méthodes

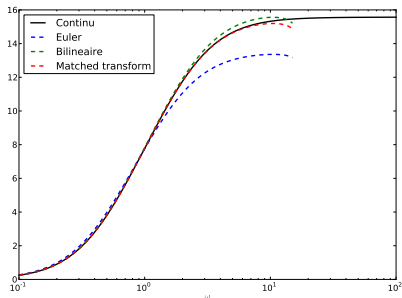
Avance de phase :  $C_c(s) = \frac{1 + 2,45s}{1 + 0,408s}$

Échantillonnage à  $T_e = 0,3 \text{ s}$

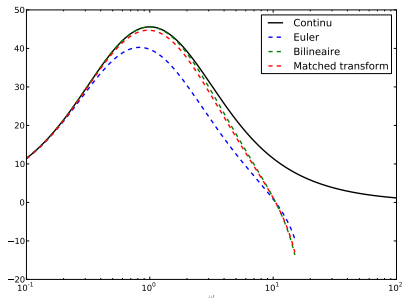
Euler	Bilinéaire	Matched transform
$\frac{3,8821 - 3,4585z^{-1}}{1 - 0,5764z^{-1}}$	$\frac{4,6565 - 4,1191z^{-1}}{1 - 0,4626z^{-1}}$	$\frac{4,5147 - 3,9943z^{-1}}{1 - 0,4796z^{-1}}$

# Comparaison des méthodes

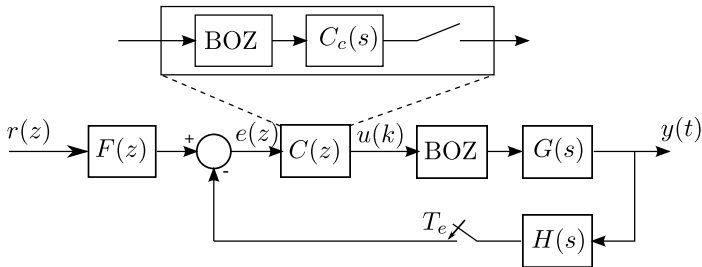
## Gain



## Phase



# Conclusion sur les transformations



Le bloqueur n'est pas pris en compte : retard additionnel

Performances au mieux celles du correcteur continu

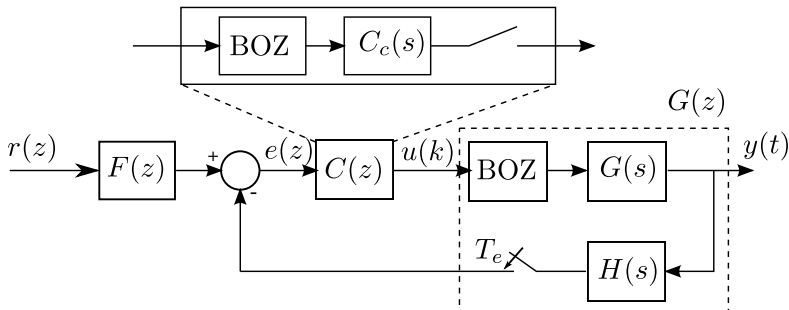
Convient si la période d'échantillonnage est petite  $T_e < \tau/10$

Tout est relatif : convient aussi si le système est lent

Distorsion des fréquences : ok si correcteur passe-bas

# Transformée en w

Approche continue en prenant en compte le bloqueur



Approximer  $\{\text{BOZ} + G(s)\}$  par  $G_c(w)$

# Transformée en w

Transformée exacte  $G_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right)$

Transformée en w : approximation bilinéaire

- Rappel :  $w = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1 + T_e w/2}{1 - T_e w/2}$

Transformée directe  $G_c(w) = G_d \left( z = \frac{1 + T_e w/2}{1 - T_e w/2} \right)$

Synthèse continue de  $C_c(w)$

Transformée inverse  $C(z) = C_c \left( w = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$

Analyse fréquentielle dans le domaine w :  $C_c(w) + G_c(w)$

# Approches numériques

---

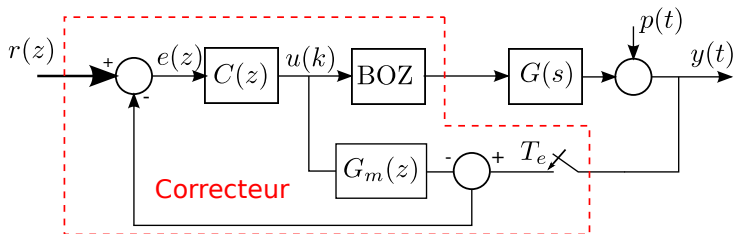
Correcteur avec modèle interne

Commande RST

Représentation d'état numérique

# Correcteur avec modèle interne

Principe : rétroaction de l'écart entre le système et un modèle



Hypothèse de système stable

Modèle  $G_m(z)$

Si le correcteur est stable le système bouclé est stable



# Correcteur avec modèle interne

$$G(z) = z^{-d}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + C(z)(G(z) - G_m(z))}(R(z) - P(z))$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{CG}{1 + C(G - G_m)}R(z) + \frac{1 - CG_m}{1 + C(G - G_m)}P(z)$$

Équivalence avec un correcteur série si modèle parfait :  $G_m(z) = G(z)$

$$\Rightarrow Y(z) = C(z)G(z)R(z) + (1 - C(z)G(z))P(z)$$

# Synthèse du correcteur avec modèle interne

Décomposition  $G_m(z) = G_I(z)G_{NI}(z)$  avec

- $G_I(z)$  partie inversible
- $G_{NI}(z)$  partie non inversible (retards + zéros non compensables)

$$\Rightarrow C(z) = Q(z)G_I^{-1}(z) \text{ avec } \begin{cases} Q(z) \text{ passe-bas} \\ Q(1) = G_{NI}^{-1}(1) \end{cases}$$

Si la fréquence de coupure de  $Q(z)$  est suffisamment petite alors

- Le système bouclé est stable
- L'erreur de position est nulle
- Les perturbations constantes sont rejetées

# Règles standards pour la synthèse du correcteur

$$G_m(z) = \frac{g \prod_{i=1}^m (z - z_i) \prod_{j=1}^p (z - z_j) \prod_{k=1}^q (z - z_k)}{z^r \prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad \text{avec}$$

- $n + r > m + p + q$
- $z_i$  les zéros à partir réelle positive à l'intérieur du cercle unité
- $z_j$  les zéros à partir réelle positive à l'extérieur du cercle unité
- $z_k$  les zéros à partir réelle négative

$$\Rightarrow C(z) = Q(z) \frac{g_c \prod_{i=1}^n (z - p_i)}{z^q \prod_{i=1}^m (z - z_i) \prod_{j=1}^p (z - \frac{1}{z_j})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C(1) = G_m^{-1}(1) \\ Q(z) = \frac{(1-\alpha)z}{1-\alpha z} \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

# Correcteur RST - principe

Synthèse d'un correcteur d'après un cahier des charges

Séparation des performances statiques pour :

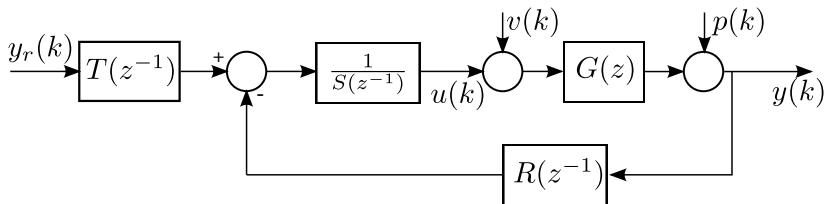
- La régulation (réponse aux perturbations)
- La poursuite (réponse aux changements de consigne)

Domaine fréquentiel : permettre un placement de pôles

⇒ Séparation du bloc correcteur en trois parties  $R$ ,  $S$ ,  $T$

Les objectifs dynamiques et statiques donnent un jeu d'équations diophantiennes

# Correcteur RST - schéma bloc standard



$R, S, T$  polynômes en  $z^{-1}$

- $S(z^{-1})$  monique :  $S(0) = 1$

Deux perturbations envisagées :  $\begin{cases} v(k) \text{ perturbation d'entrée} \\ p(k) \text{ perturbation de sortie} \end{cases}$

$$G(z) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \text{ avec}$$

- $A$  et  $B$  polynômes en  $z^{-1}$  premiers entre eux
- $A$  monique :  $A(0) = 1$

# Fonctions de transfert

$$\text{Commande : } U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y_r(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y(z)$$

$$\text{Sortie : } Y(z) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} V(z) + P(z)$$

Écriture allégée (avec  $\bar{B} = z^{-d} B(z^{-1})$ )

$$U = \frac{AT}{AS + \bar{B}R} Y_r - \frac{\bar{B}R}{AS + \bar{B}R} V - \frac{AR}{AS + \bar{B}R} P \quad (1)$$

$$Y = \frac{\bar{B}T}{AS + \bar{B}R} Y_r + \frac{\bar{B}S}{AS + \bar{B}R} V + \frac{AS}{AS + \bar{B}R} P \quad (2)$$

# Phase I - comportement dynamique

Objectif : calculer une loi de commande type RST qui confère au système bouclé une FT désirée :

$$F_{Y_r \rightarrow Y} = \frac{B_m}{A_m}$$

Par identification dans (2) :

$$\frac{\bar{B}T}{AS + \bar{B}R} = \frac{B_m}{A_m}$$

Compensation des pôles / zéros dans fonction de transfert du premier membre

# Phase I - comportement dynamique

Factorisation de la FT du système :  $G = \frac{\bar{B}}{A} = \frac{B^-(z^{-1})B^+(z^{-1})}{A^-(z^{-1})A^+(z^{-1})}$

où :

- $A^-(z^{-1})$  contient tous les pôles de  $G(z)$  qu'on ne compensera pas
- $B^-(z^{-1})$  contient tous les zéros de  $G(z)$  qu'on ne compensera pas

à savoir :

- *obligatoirement* les pôles et zéros extérieurs (ou sur) le cercle unité
- *facultativement* certains autres termes

$A^+(z^{-1})$  et  $B^+(z^{-1})$  contiennent les termes à compenser

Le terme  $z^{-d}$  est obligatoirement inclu dans  $B^-(z^{-1})$

Stabilité interne : nécessairement  $B_m = B^- B'_m$



# Phase I - comportement dynamique

Compensation des pôles et zéros à compenser :

- $B^+$  pourra être un facteur de  $AS + \bar{B}R \Rightarrow S = B^+S'$
- $A^+$  pourra être un facteur de  $AS + \bar{B}R \Rightarrow R = A^+R'$

$$\frac{B^-T}{A^+(A^-S' + B^-R')} = \frac{B^-B'_m}{A_m}$$

$$\frac{T}{A^-S' + B^-R'} = \frac{A^+B'_m}{A_m}$$

$$\Rightarrow \text{Équations diophantiennes : } \begin{cases} A^-S' + B^-R' = A_0A_m & (a) \\ T = A_0A^+B'_m & (b) \end{cases}$$

- $A_0$  quelconque, en pratique : monique, stable, filtrage

# Choix des pôles et zéros à compenser

## Pourquoi compenser des pôles ou zéros stables

- Zéros non compensés  $\Rightarrow$  zéros de  $F_{Y_r \rightarrow Y}$
- Pôles non compensés  $\Rightarrow$  zéros de  $F_{P \rightarrow Y}$
- Or un zéro à partie réelle positive peut provoquer un fort dépassement

## Pourquoi ne pas compenser les zéros stables

- Zéros compensés  $\Rightarrow$  pôles de  $F_{Y_r \rightarrow U}$
- Or un pôle à partie réelle négative provoque une réponse indicielle alternée
- La compensation d'un tel zéro entraîne une commande alternée

# Phase II - régulation

Annulation de l'erreur permante vis-a-vis d'une perturbation

- Modèle interne : la perturbation doit être modélisée dans le correcteur

Perturbations polynomiales

- $v(t)$  ou  $p(t) = t^n \Rightarrow V(z)$  ou  $P(z) = \frac{Z_1(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^{n+1}}$
- Rajouter au moins  $n + 1$  intégrateurs dans  $S$
- $S'(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^m S'_1(z^{-1})$
- Équation (a) remplacée par  $A^-(1 - z^{-1})^m S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

# Phase II - régulation

## Perturbations sinusoïdales

- $v(t)$  ou  $p(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow V(z)$  ou

$$P(z) = \frac{\sin(\omega T_e)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2}}$$

- Rajouter le facteur correspondant dans  $S$
- $S'(z^{-1}) = (1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2})S'_1(z^{-1})$
- Équation (a) remplacée par  
$$A^-(1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2})S'_1 + B^-R' = A_0A_m$$

Forme générale pour la régulation : transformation de (a) en :

$$A^-S_pS'_1 + B^-R' = A_0A_m$$

- $S_p$  dépend de la nature de la perturbation

# Phase III - poursuite

Erreur permanente vis-a-vis de la consigne

Ordre zéro : gain statique

- $\frac{B_m(1)}{A_m(1)} = 1$
- Or  $B_m = B^- B'_m$
- Choix le plus simple :  $B'_m = b' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$
- Puis calcul de  $T$  par :  $T = A_0 A^+ B'_m$

# Phase III - poursuite

Erreur d'ordre  $n > 0$  : consigne polynomiale

- $y_r(k) = k^n \Rightarrow Y_r(z) = \frac{Y_{r1}}{(1 - z^{-1})^{n+1}}$
- $E(z) = \frac{A_m - B_m}{A_m} \frac{Y_{r1}}{(1 - z^{-1})^{n+1}}$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 0$
- $\Leftrightarrow A_m - B_m = (1 - z^{-1})^{n+1}L$
- Équation diophantienne auxiliaire :  $(1 - z^{-1})^{n+1}L + B^-B'_m = A_m$
- Résolution en  $L$  et  $B'_m$
- On a alors  $T = A_0A^+B'_m$

# Phase III - poursuite

## Consigne sinusoidale

- $y_r(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow Y_r(z) = \frac{\sin(\omega T_e)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2}}$
- Même raisonnement sur le théorème de la valeur finale
- Équation diophantienne auxiliaire :  
 $(1 - 2\cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2})L + B^-B'_m = A_m$
- Résolution en  $L$  et  $B'_m$
- On a alors  $T = A_0A^+B'_m$

Forme générale pour la poursuite : équation diophantienne auxiliaire

$$L_p L + B^-B'_m = A_m$$

- $L_p$  dépend de la nature de la consigne

# Résumé de la construction du système

## Phase I : comportement dynamique

- Choix des pôles et zéros à compenser  $\Rightarrow S = B^+ S'$  et  $R = A^+ R'$
- Premier jeu d'équations :

$$\begin{cases} A^- S' + B^- R' &= A_0 A_m & (a) \\ T &= A_0 A^+ B'_m & (b) \end{cases}$$



# Résumé de la construction du système

## Phase I : comportement dynamique

- Choix des pôles et zéros à compenser  $\Rightarrow S = B^+ S'$  et  $R = A^+ R'$
- Premier jeu d'équations :

$$\begin{cases} A^- S' + B^- R' = A_0 A_m & (a) \\ T = A_0 A^+ B'_m & (b) \end{cases}$$

## Phase II : régulation

- Modéliser la nature des perturbations par  $S_p$
- (a) devient  $A^- S_p S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

# Résumé de la construction du système

## Phase I : comportement dynamique

- Choix des pôles et zéros à compenser  $\Rightarrow S = B^+ S'$  et  $R = A^+ R'$
- Premier jeu d'équations :

$$\begin{cases} A^- S' + B^- R' &= A_0 A_m & (a) \\ T &= A_0 A^+ B'_m & (b) \end{cases}$$

## Phase II : régulation

- Modéliser la nature des perturbations par  $S_p$
- (a) devient  $A^- S_p S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

## Phase III : poursuite

- Modéliser la nature de la consigne par  $L_p$
- Équation auxiliaire :  $L_p L + B^- B'_m = A_m$

# Résolution d'une équation diophantienne

Forme canonique :  $PS + QR = N$  avec :

- $R$  et  $S$  polynômes inconnus
- $\deg(P) = p, \deg(Q) = q, \deg(N) = n$

# Résolution d'une équation diophantienne

Forme canonique :  $PS + QR = N$  avec :

- $R$  et  $S$  polynômes inconnus
- $\deg(P) = p, \deg(Q) = q, \deg(N) = n$

Si  $p + q > n$  : solution minimale unique avec

- $\begin{cases} \deg(S) = q - 1 \\ \deg(R) = p - 1 \end{cases} \Rightarrow p + q \text{ inconnues}$
- $\deg(PS + QR) = p + q - 1 \Rightarrow p + q \text{ équations}$

# Résolution d'une équation diophantienne

Forme canonique :  $PS + QR = N$  avec :

- $R$  et  $S$  polynômes inconnus
- $\deg(P) = p, \deg(Q) = q, \deg(N) = n$

Si  $p + q > n$  : solution minimale unique avec

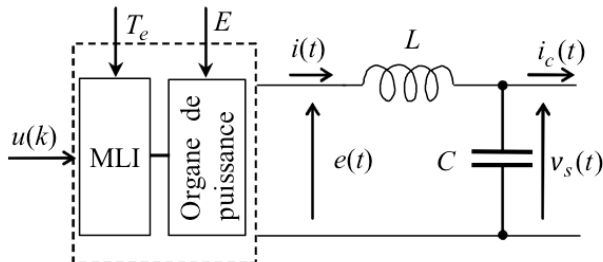
- $\begin{cases} \deg(S) = q - 1 \\ \deg(R) = p - 1 \end{cases} \Rightarrow p + q \text{ inconnues}$
- $\deg(PS + QR) = p + q - 1 \Rightarrow p + q \text{ équations}$

Si  $p + q \leq n$  : deux solutions minimales

- 1)  $\begin{cases} \deg(S) = q - 1 \\ \deg(R) = n - q \end{cases} \Rightarrow n + 1 \text{ inconnues}$
- 2)  $\begin{cases} \deg(S) = n - p \\ \deg(R) = p - 1 \end{cases} \Rightarrow n + 1 \text{ inconnues}$
- $\deg(PS + QR) = n \Rightarrow n + 1 \text{ équations}$

# Exemple de synthèse

Onduleur à découplage : piloté par modulation de largeur d'impulsion (MLI / PWM) à fréquence fixe suivi d'un filtre LC



## Cahier des charges

- $v_s(t)$  tension sinusoïdale à 50  $H_z$
- Amplitude  $V_{s0}$  constante quelle que soit la charge
- Présentant une erreur  $< 5\%$  par rapport à une amplitude de référence  $V_0$

# Expression du cahier des charges

Erreur  $< 5\%$  : après quelques calculs  $w_c = 6000$  rad/s

- Choix de  $A_m$  : deuxième ordre avec  $w_c = 6000$  rad/s et  $\xi = 0,7$   
 $\Rightarrow A_m = 1 - 1.485z^{-1} + 0.592z^{-2}$

Échantillonnage à  $T_e = 62,5\mu s$  et retard de  $20\mu s$

Modélisation : 
$$G(z) = \frac{0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3}}{1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}}$$

# Analyse

Pôles et zéros de  $G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B}{A}$

- Pôles : sur le cercle unité  $\Rightarrow$  non compensables
- Zéros :  $\begin{cases} -3,0080 & \Rightarrow \text{non compensable} \\ -0,0739 & \Rightarrow \text{à ne pas compenser} \end{cases}$



Pôles et zéros de  $G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B}{A}$

- Pôles : sur le cercle unité  $\Rightarrow$  non compensables
- Zéros :  $\begin{cases} -3,0080 & \Rightarrow \text{non compensable} \\ -0,0739 & \Rightarrow \text{à ne pas compenser} \end{cases}$

Factorisation :

- $B^+ = 1$  et  $B^- = 0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3}$
- $A^+ = 1$  et  $A^- = 1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}$
- Donc  $S = S'$  et  $R = R'$

# Analyse

Pôles et zéros de  $G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B}{A}$

- Pôles : sur le cercle unité  $\Rightarrow$  non compensables
- Zéros :  $\begin{cases} -3,0080 & \Rightarrow \text{non compensable} \\ -0,0739 & \Rightarrow \text{à ne pas compenser} \end{cases}$

Factorisation :

- $B^+ = 1$  et  $B^- = 0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3}$
- $A^+ = 1$  et  $A^- = 1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}$
- Donc  $S = S'$  et  $R = R'$

Rejet d'une perturbation constante (charge du système) :

- $Sp = (1 - z^{-1})$
- Choix de  $A_0 = 1$

# Phases I et II

Équation diophantienne en  $R$  et  $S'_1$  :  $A^- S_p S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

$$\begin{cases} A^- S_p &= (1 - z^{-1})(1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}) & \text{deg} = 3 \\ B^- &= 0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3} & \text{deg} = 3 \\ A_0 A_m &= 1 - 1.485z^{-1} + 0.592z^{-2} & \text{deg} = 2 \end{cases}$$

# Phases I et II

Équation diophantienne en  $R$  et  $S'_1$  :  $A^- S_p S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

$$\begin{cases} A^- S_p &= (1 - z^{-1})(1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}) & \deg = 3 \\ B^- &= 0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3} & \deg = 3 \\ A_0 A_m &= 1 - 1.485z^{-1} + 0.592z^{-2} & \deg = 2 \end{cases}$$

Solution minimale avec  $\deg(R) = \deg(S'_1) = 2$

Équation diophantienne en  $R$  et  $S'_1$  :  $A^- S_p S'_1 + B^- R' = A_0 A_m$

$$\begin{cases} A^- S_p &= (1 - z^{-1})(1 - 1.891z^{-1} + z^{-2}) & \text{deg} = 3 \\ B^- &= 0.0253z^{-1} + 0.0779z^{-2} + 0.0056z^{-3} & \text{deg} = 3 \\ A_0 A_m &= 1 - 1.485z^{-1} + 0.592z^{-2} & \text{deg} = 2 \end{cases}$$

Solution minimale avec  $\deg(R) = \deg(S'_1) = 2$

Finalement

$$\begin{cases} S &= (1 - z^{-1})S'_1 = 1 + 0,0081z^{-1} - 0,939z^{-2} - 0,069z^{-3} \\ R &= 15,82 - 27,17z^{-1} + 12,34z^{-2} \end{cases}$$

# Phase III : synthèse du polynôme $T$

---

En supposant une consigne constante

# Phase III : synthèse du polynôme T

En supposant une consigne constante

- $B'_m = b' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} = 0,9946$
- $\Rightarrow T = A_0 A^+ B'_m = b' = 0,9946$

# Phase III : synthèse du polynôme T

En supposant une consigne constante

- $B'_m = b' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} = 0,9946$
- $\Rightarrow T = A_0 A^+ B'_m = b' = 0,9946$

En modélisant la consigne sinusoïdale



# Phase III : synthèse du polynôme T

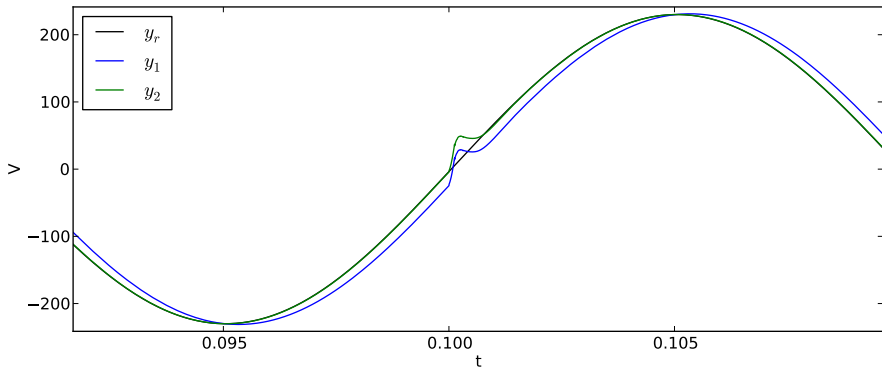
En supposant une consigne constante

- $B'_m = b' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} = 0,9946$
- $\Rightarrow T = A_0 A^+ B'_m = b' = 0,9946$

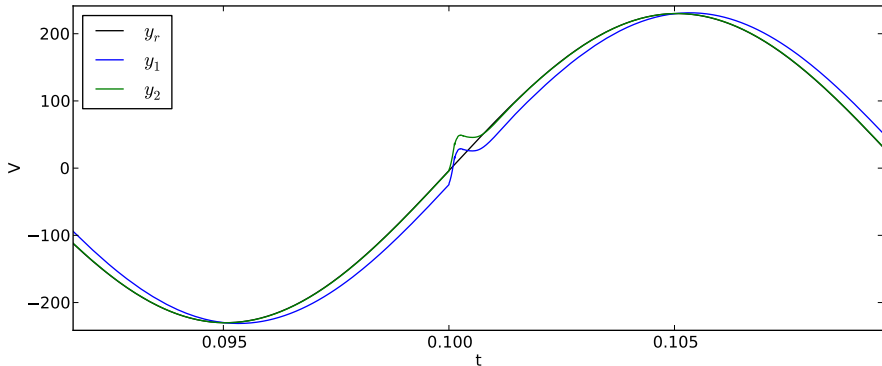
En modélisant la consigne sinusoïdale

- Éq. auxiliaire  $(1 - \cos(\omega T_e)z^{-1} + z^{-2})L + B^- B'_m = A_m$
- Résolution : 
$$\begin{cases} L &= 1 + 0,3758z^{-1} + 0,0254z^{-2} \\ B'_m &= 5,585 - 4,569z^{-1} \end{cases}$$
- $\Rightarrow T = 5,585 - 4,569z^{-1}$

# Résultats des deux contrôleurs

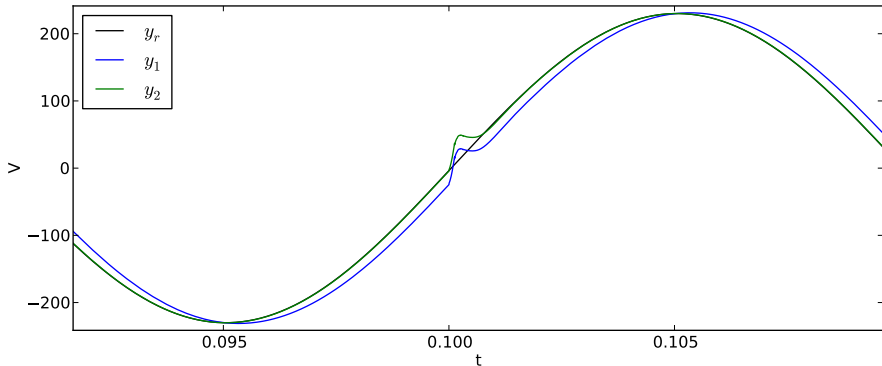


# Résultats des deux contrôleurs



- Poursuite parfaite si prise en compte de la consigne sinusoidale
- Poursuite avec retard si consigne supposée constante
- Perturbation constante à  $t = 0,1$  s : rejet rapide

# Résultats des deux contrôleurs



- Poursuite parfaite si prise en compte de la consigne sinusoidale
- Poursuite avec retard si consigne supposée constante
- Perturbation constante à  $t = 0,1$  s : rejet rapide
- Intérêt de bien modéliser système + perturbations + consigne

# Représentation d'état numérique

Rappel sur la notation continue

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

# Représentation d'état numérique

Rappel sur la notation continue

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Transposition à la notation discrète

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Les matrices continues et discrètes sont évidemment différentes

# Représentation d'état numérique

Rappel sur la notation continue

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Transposition à la notation discrète

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Les matrices continues et discrètes sont évidemment différentes  
Les propriétés se transposent toutefois directement

# Représentation d'état et fonction de transfert

Transformée en  $z$  des équations d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$



# Représentation d'état et fonction de transfert

Transformée en  $z$  des équations d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

# Représentation d'état et fonction de transfert

Transformée en  $z$  des équations d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(z) = (C(zI - A)^{-1}B + D)U(z)$$

# Fonction de transfert et représentation d'état

Soit la fonction de transfert :

$$G(z) = d + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \text{ avec } a_n = 1$$

# Fonction de transfert et représentation d'état

Soit la fonction de transfert :

$$G(z) = d + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \text{ avec } a_n = 1$$

$$\text{Soit } V(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} U(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^n V(z) &= U(z) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i V(z) \\ Y(z) &= dU(z) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i V(z) \end{cases}$$

# Fonction de transfert et représentation d'état

État  $X(z) = (X_1(z), \dots, X_n(z))$  tel que  $X_i(z) = z^{i-1} V(z)$

# Fonction de transfert et représentation d'état

État  $X(z) = (X_1(z), \dots, X_n(z))$  tel que  $X_i(z) = z^{i-1}V(z)$

Alors

- Pour  $i < n$  :  $zX_i(z) = X_{i+1}(z) \Rightarrow x_i(k+1) = x_{i+1}(k)$
- $zX_n(z) = z^n V(z) = U(z) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X_i(z)$   
 $\Rightarrow x_n(k+1) = u(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i(k)$

# Fonction de transfert et représentation d'état

État  $X(z) = (X_1(z), \dots, X_n(z))$  tel que  $X_i(z) = z^{i-1}V(z)$

Alors

- Pour  $i < n$  :  $zX_i(z) = X_{i+1}(z) \Rightarrow x_i(k+1) = x_{i+1}(k)$
- $zX_n(z) = z^n V(z) = U(z) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X_i(z)$   
 $\Rightarrow x_n(k+1) = u(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i(k)$
- Et  $Y(z) = dU(z) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i X_i(z) \Rightarrow y(k) = du(k) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i(k)$

# Fonction de transfert et représentation d'état

Forme canonique de commandabilité

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Et

$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] x(k) + du(k)$$



# Fonction de transfert et représentation d'état

Forme canonique de commandabilité

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Et

$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] x(k) + du(k)$$

- Matrices  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$

# Fonction de transfert et représentation d'état

Forme canonique de commandabilité

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Et

$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] x(k) + du(k)$$

- Matrices  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$

Idem pour la forme canonique d'observabilité :  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $C_o$

- $A_o = A_c^\top$ ,  $B_o = C_c^\top$ ,  $C_o = B_c^\top$

# Propriétés communes avec le continu

---

# Propriétés communes avec le continu

Stabilité : les valeurs propres de  $A$  vérifient  $|\lambda| < 1$

- Évolution de l'état en  $x(k) = A^k x(0)$

Cf cas continu : valeurs propres telles que  $\text{Re}(\lambda) < 0$

- Évolution de l'état en  $x(t) = e^{At} x(0)$

# Propriétés communes avec le continu

Stabilité : les valeurs propres de  $A$  vérifient  $|\lambda| < 1$

- Évolution de l'état en  $x(k) = A^k x(0)$

Cf cas continu : valeurs propres telles que  $\text{Re}(\lambda) < 0$

- Évolution de l'état en  $x(t) = e^{At} x(0)$

Commandabilité : si  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  de rang plein

# Propriétés communes avec le continu

Stabilité : les valeurs propres de  $A$  vérifient  $|\lambda| < 1$

- Évolution de l'état en  $x(k) = A^k x(0)$

Cf cas continu : valeurs propres telles que  $\text{Re}(\lambda) < 0$

- Évolution de l'état en  $x(t) = e^{At} x(0)$

Commandabilité : si  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  de rang plein

Observabilité : si  $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$  de rang plein

# Commande par retour d'état

---

Calculer  $u(k+1)$  à partir de  $x(k)$  pour atteindre  $y_r$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N}y_r$$

# Commande par retour d'état

Calculer  $u(k+1)$  à partir de  $x(k)$  pour atteindre  $y_r$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N}y_r$$

Même raisonnement qu'en continu

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Commande par retour d'état

Calculer  $u(k+1)$  à partir de  $x(k)$  pour atteindre  $y_r$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N}y_r$$

Même raisonnement qu'en continu

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors  $\bar{N} = N_u + KN_x$

# Commande par retour d'état

Calculer  $u(k+1)$  à partir de  $x(k)$  pour atteindre  $y_r$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N}y_r$$

Même raisonnement qu'en continu

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors  $\bar{N} = N_u + KN_x$

Réglage de  $K$  par placement de pôles en boucle fermée

$$\begin{cases} x(k+1) = (A - BK)x(k) + B\bar{N}y_r \\ y(k) = (C - DK)x(k) + D\bar{N}y_r \end{cases}$$

sous Matlab :  $K = \text{place}(A, B, p)$

# Commande par retour d'état

Calculer  $u(k+1)$  à partir de  $x(k)$  pour atteindre  $y_r$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N}y_r$$

Même raisonnement qu'en continu

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors  $\bar{N} = N_u + KN_x$

Réglage de  $K$  par placement de pôles en boucle fermée

$$\begin{cases} x(k+1) = (A - BK)x(k) + B\bar{N}y_r \\ y(k) = (C - DK)x(k) + D\bar{N}y_r \end{cases}$$

sous Matlab :  $K = \text{place}(A, B, p)$

Valable pour  $y_r$  constant (sinon intégrateurs)

# Retour d'état avec intégrateur

Rajout d'une boucle pour l'erreur  $e(k) = y_r - y(k)$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N} \sum_{i=0}^k e(i)$$

Rejet des perturbations constantes

# Retour d'état avec intégrateur

Rajout d'une boucle pour l'erreur  $e(k) = y_r - y(k)$

$$u(k+1) = -Kx(k) + \bar{N} \sum_{i=0}^k e(i)$$

Rejet des perturbations constantes

$x$  est utilisé mais pas mesuré : observateur

# Retour d'état avec observateur

---

Estimer  $x$  à partir de  $u$  et  $y$

# Retour d'état avec observateur

Estimer  $x$  à partir de  $u$  et  $y$

$\hat{x}$  doit se comporter comme  $x$ ...

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

# Retour d'état avec observateur

Estimer  $x$  à partir de  $u$  et  $y$

$\hat{x}$  doit se comporter comme  $x$ ... aux erreurs près

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_o(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$



# Retour d'état avec observateur

Estimer  $x$  à partir de  $u$  et  $y$

$\hat{x}$  doit se comporter comme  $x$ ... aux erreurs près

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_o(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

Réglage de  $K_o$  par placement des pôles de l'observateur

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1) = (A - K_o C)(x(k) - \hat{x}(k))$$

# Retour d'état avec observateur

Estimer  $x$  à partir de  $u$  et  $y$

$\hat{x}$  doit se comporter comme  $x$ ... aux erreurs près

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_o(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

Réglage de  $K_o$  par placement des pôles de l'observateur

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1) = (A - K_o C)(x(k) - \hat{x}(k))$$

Même calcul que pour  $K$

sous Matlab :  $K_o = \text{place}(A', C', p)$

# Bilan sur la commande numérique

## Approches continues

- Transposition d'un correcteur
- PID
- Transformée en  $w$  : synthèse continue d'un modèle discrétisé

## Approches discrètes

- Commande avec modèle interne
- Commande RST : pôles + poursuite + régulation
- Représentation d'état : multi-dimensionnel

## À garder en tête

- Approches continues valables pour des systèmes lents
- Approches numériques aussi bonnes que le modèle associé
- Compromis entre simplicité et performances