

Chapitre 3

Théorie de la transformée en « z »

- 3.1. Introduction
- 3.2. Définition de la transformée en « z »
 - 3.2.1. Cas des signaux discrets
 - 3.2.2. Cas des signaux échantillonnés
- 3.3. Propriétés de la transformée en « z »
 - 3.3.1. Linéarité
 - 3.3.2. Translation temporelle et décalages
 - 3.3.3. Translation complexe
 - 3.3.4. Théorème de la valeur initiale
 - 3.3.5. Théorème de la valeur finale
- 3.4. Transformée inverse
 - 3.4.1. Méthode des résidus
 - 3.4.2. Division selon les puissances croissantes de z^{-1}
 - 3.4.3. Décomposition en éléments simples
- 3.5. Transformée en « z » modifiée
 - 3.5.1. Première expression
 - 3.5.2. Seconde expression
 - 3.5.3. Propriété de la transformée en z modifiée
 - 3.5.4. Inversion de la transformée en « z » modifiée
- 3.6. Transformée en « w »

3.1. INTRODUCTION

L'analyse et la synthèse des systèmes linéaires, stationnaires et continus utilisent la transformée de LAPLACE (Cf. première partie du cours d'Automatique). La transformée en z est l'outil privilégié de l'analyse et de la synthèse des systèmes linéaires, stationnaires, échantillonnés ou discrets.

Le comportement des systèmes linéaires, stationnaires et continus, est décrit par des équations différentielles à coefficients constants. Le comportement des *systèmes linéaires, stationnaires, échantillonnés ou discrets* est décrit par des équations récurrentes à coefficients constants. Dans ces deux cas les transformées en p ou en z simplifient les calculs en permettant de traiter des équations complexes sous forme de polynômes et de fractions rationnelles respectivement en p ou en z .

<i>Système continu</i>	<i>Système échantillonné ou discret</i>
Signal continu $x(t)$	Signal échantillonné $x^*(t)$ Signal discret x_n
Equation différentielle	Equation récurrente
Transformée de LAPLACE $X(p)$	Transformée en z , $X(z)$

Un tableau donné en annexe A.3.4. indique les diverses formules et relations concernant le processus d'échantillonnage et la transformée en z .

3.2. DEFINITION DE LA TRANSFORMEE EN « z »

3.2.1. CAS DES SIGNAUX DISCRETS

Par définition la transformée en z de la suite numérique $\{x_n\}$ a pour expression :

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

z est une variable complexe et $X(z)$ est définie dans le domaine de convergence de la série.
Ainsi :

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots + x_n z^{-n} + \dots$$

Exemple n° 1 : Soit l'échelon discret $x_n = 1^n$ $\begin{cases} x_n = 1 & \text{si } n \geq 0 \\ x_n = 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots$$

$$zX(z) = z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n+1} + \dots = z + X(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Exemple n° 2 : Soit le signal discret exponentiel $x_n = a^n$ avec $\begin{cases} a \geq 0 \\ x_n = 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots + a^n z^{-n} + \dots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Exemple n° 3 : $x_n = e^{-\alpha n}$ avec $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ x_n = 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha}}$$

Exemple n° 4 : Soit le signal rampe discret $x_n = Tn$ avec $x_n = 0$ pour $n < 0$

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} nT z^{-n} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots + nTz^{-n} + \dots = -Tz \sum_{n=0}^{\infty} -nz^{(-n-1)} = -Tz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(z^{-n})}{dz}$$

$$X(z) = -Tz \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -Tz \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

3.2.2. CAS DES SIGNAUX ECHANTILLONNES

Nous avons établi au paragraphe 1.2.2 de ce cours que :

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp} = \sum_{\text{pôles de } X(v)} \text{Résidus} \frac{X(v)}{1 - e^{-T(p-v)}}$$

Posons $z = e^{Tp}$; il vient alors :

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n} \Rightarrow X^*(p) = X(z) \quad \text{si} \quad z = e^{Tp} \quad \text{soit :}$$

$$X(z) = \sum_{\text{pôles de } X(v)} \text{Résidus} \frac{X(v)}{1 - z^{-1} e^{Tv}}$$

Exemple n° 5 : $x(t) = u(t)$

$$X(z) = \mathbf{Z}x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Nous pouvons appliquer la méthode des résidus sachant que $X(p) = \frac{1}{p}$

$$X(z) = \text{Résidus}_{\substack{\text{pôle} \\ p=0}} \frac{1}{p(1 - z^{-1} e^{Tp})} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Exemple n° 6 : $x(t) = t u(t) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p^2}$

$$X(z) = \text{Résidus}_{\substack{\text{pôle double} \\ p=0}} \frac{1}{p^2(1 - z^{-1} e^{Tp})}$$

$$\text{Résidus}_{\substack{\text{pôle double} \\ p=0}} \frac{1}{p^2(1 - z^{-1} e^{Tp})} = \left\{ \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{(1 - z^{-1} e^{Tp})} \right] \right\}_{p=0} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(1 - z)^2}$$

Remarque n° 1 : Si $X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ le calcul du résidu relatif à un pôle simple est donné par :

$$\text{Résidu}_{\text{pôle } p=p_i} = \frac{N(v)}{\left[D'(v)(1 - z^{-1} e^{Tv}) \right]_{v=p_i}}$$

Remarque n° 2 : Le calcul d'un résidu relatif à un pôle multiple d'ordre α est donné par :

$$\text{Résidu}_{\substack{\text{pôle d'ordre } \alpha \\ p=p_i}} = \frac{1}{(\alpha-1)!} \left\{ \frac{d^{\alpha-1}}{dv^{\alpha-1}} \left[(v - p_i)^\alpha \frac{X(v)}{1 - z^{-1} e^{Tv}} \right] \right\}_{v=p_i}$$

Remarque n° 3 : Dans la suite du cours nous noterons :

$$X(z) = \mathbf{Z}[x_n] = \mathbf{Z}[x^*(t)] = \mathbf{Z}[x(nT)] = \mathbf{Z}[X^*(p)]$$

ou encore par abus de simplification :

$$X(z) = \mathbf{Z}[x(t)] = \mathbf{Z}[X(p)]$$

3.3. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN « z »

Les principales propriétés de la transformée en z sont récapitulées en annexe A.3.1.

3.3.1. LINEARITE

On vérifie sans difficulté que :

$$\mathbf{Z}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \mathbf{Z}x_1(t) + \lambda_2 \mathbf{Z}x_2(t)$$

3.3.2. TRANSLATION TEMPORELLE ET DECALAGES

a. Cas du retard (décalage à droite)

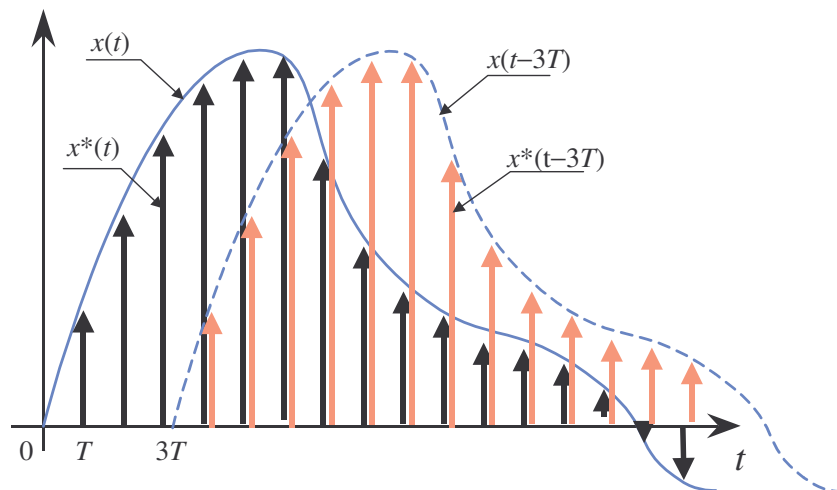


Figure 1 : Signal échantillonné retardé de kT

Il s'agit de calculer $\mathbf{Z}[x_{(n-k)}]$ avec $x_n = 0 \quad \forall n < 0$

$$\mathbf{Z}[x_{(n-k)}] = \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n-k)} \cdot z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n-k)} \cdot z^{-(n-k)}$$

Posons : $m = n - k \Rightarrow x_m = 0$ lorsque $m < 0$

$$\mathbf{Z}[x_{(n-k)}] = z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} x_{(m)} z^{-(m)} = z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x_{(m)} z^{-(m)}$$

$$\boxed{\mathbf{Z}[x_{(n-k)}] = z^{-k} X(z)} \quad \text{si } x_n = 0 \quad \forall n < 0$$

La multiplication par z^{-1} correspond à un retard d'un pas d'échantillonnage.

Lorsqu'on traite des équations récurrentes (Cf.. chapitre 5) il est possible que les conditions initiales ne soient pas nulles. Or, pour ce type d'équation, les conditions initiales se manifestent à travers les valeurs prises par x_n pour $n < 0$. Calculons dans ce cas $\mathbf{Z}[x_{(n-k)}]$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

$$\mapsto X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}$$

Soit par exemple $k = 3$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_{n-3}				x_{-4}	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$$\mapsto z^{-3} \cdot X(z)$$

$$\mapsto \mathbf{Z}\{x_{(n-3)}\} = z^{-3} X(z) + x_{-3} + x_{-2} z^{-1} + x_{-1} z^{-2}$$

Plus généralement on écrira :

$$\mathbf{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k} X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x_m z^{-(m+k)} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x_m z^{-m} \right]$$

Remarque n° 4 :

Systèmes continus tel que $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$	Systèmes discrets tel que $x_n = 0 \quad \forall n < 0$	Systèmes échantillonnés tel que $x_{nT} = 0 \quad \forall n < 0$
$\mathbf{L}[x(t - kT)] = e^{-kTp} \mathbf{L}[x(t)]$ $\mathbf{L}[x(t - kT)] = e^{-kTp} X(p)$	$\mathbf{Z}[x_{(n-k)}] = z^{-k} \mathbf{Z}[x_n]$ $\mathbf{Z}[x_{(n-k)}] = z^{-k} X(z)$	$\mathbf{Z}[x_{(n-k)T}] = z^{-k} \mathbf{Z}[x_{(nT)}]$ $\mathbf{Z}[x_{(n-k)T}] = z^{-k} X(z)$ avec $z = e^{Tp}$

b. Cas de l'avance (décalage à gauche)

Il s'agit de calculer $\mathbf{Z}[x_{(n+k)}]$ avec $x_n = 0 \quad \forall n < 0$

$$\mathbf{Z}[x_{(n+k)}] = \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n+k)} \cdot z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n+k)} \cdot z^{-(n+k)}$$

Posons $m = n + k \Rightarrow x_m = 0$ lorsque $m < 0$

$$\mathbf{Z}[x_{(n+k)}] = z^k \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x_m \cdot z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x_m \cdot z^{-m} \right\}$$

$$\mathbf{Z}[x_{(n+k)}] = z^k X(z) - z^k \sum_{m=0}^{k-1} x_m \cdot z^{-m}$$

Ainsi $\mathbf{Z}[x_{(n+1)}] = z \cdot X(z) - z \cdot x_0$

3.3.3. TRANSLATION COMPLEXE

Il s'agit de calculer $\mathbf{Z}[X(p+a)]$ connaissant $\mathbf{Z}X(p)$

$$X(p+a) = \mathbf{L}[e^{-at} x(t)]$$

$$\mathbf{Z}[X(p+a)] = \mathbf{Z}[e^{-at} x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} x(nT) z^{-n}$$

$$\mathbf{Z}[X(p+a)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot (e^{aT} z)^{-n}$$

$$\mathbf{Z}[X(p+a)] = X(e^{aT} z)$$

Exemple n° 7 :

$$\mathbf{Z}\left(\frac{1}{p}\right) = \mathbf{Z}u(t) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\mathbf{Z}\left(\frac{1}{p+a}\right) = \mathbf{Z}e^{-at} \cdot u(t) = \frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}}$$

Remarque n° 5 :

Le théorème ci dessus permet de vérifier que si $\mathbf{Z}\{x_n\} = X(z)$ alors $\mathbf{Z}\{a^n x_n\} = X(z/a)$

3.3.4. THEOREME DE LA VALEUR INITIALE

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_n z^{-n} + \dots \text{ il vient directement :}$$

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

3.3.5. THEOREME DE LA VALEUR FINALE

$$X_N(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_N z^{-N}$$

$$X_{N-1}(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_{N-1} z^{-(N-1)}$$

$$zX_N(z) = zx_0 + x_1 + x_2 z^{-1} + \dots + x_N z^{-(N-1)}$$

$$\mathcal{X} = zX_N(z) - X_{N-1}(z) = (z-1)x_0 + (z-1)x_1 z^{-1} + (z-1)x_2 z^{-2} + \dots + (z-1)x_{N-1} z^{-(N-1)} + zx_N z^{-N}$$

$$\mathcal{X} = (z-1) \sum_{i=0}^{N-1} x_i z^{-i} + zx_N z^{-N} \quad \text{ainsi} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{X}) = (z-1)X(z) \quad \text{et} \quad x_N = \lim_{z \rightarrow 1} (\mathcal{X})$$

$$x(\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{X} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{X} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)X(z)\}$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})X(z^{-1})$$

3.4. TRANSFORMEE INVERSE

Avant d'aborder cette question, rappelons que la transformée en z ne rend compte que de l'état d'un signal $x(t)$ aux instants d'échantillonnage. Aussi l'inverse $x(t)$ de $X(z)$ n'est-il pas unique.

3.4.1. METHODE DES RESIDUS

$$X(z) = \mathbf{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_n z^{-n} + \dots$$

$$z^{n-1} \cdot X(z) = z^{n-1} x_0 + z^{n-2} x_1 + z^{n-3} x_2 + \dots + x_{n-1} + z^{-1} x_n + \dots$$

Choisissons un contour d'intégration Γ entourant l'origine du plan complexe z et calculons l'intégrale :

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-1} X(z) dz$$

D'après le théorème de CAUCHY :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 1 & \text{si } n = -1 \\ 0 & \forall n \neq -1 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-1} X(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [z^{n-1} x_0 + z^{n-2} x_1 + z^{n-3} x_2 + \dots + x_{n-1} + z^{-1} x_n + \dots] dz$$

$$I = \frac{x_0}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-1} dz + \frac{x_1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-2} dz + \dots + \frac{x_i}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-i-1} dz + \dots + \frac{x_n}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{-1} dz + \dots + \frac{x_k}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{n-k-1} dz + \dots$$

L'intégrale $\frac{x_n}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{-1} dz = x_n$ tandis que par application du théorème de CAUCHY l'infinité des autres intégrales est nulle. Ainsi :

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{(n-1)} \cdot X(z) \cdot dz$$

Pour calculer cette intégrale par la méthode des résidus on adopte un contour d'intégration englobant les pôles de $z^{n-1} X(z)$ qui sont les singularités de cette expression.

$$x_n = x(nT) = \sum_{\text{pôles de } z^{n-1} X(z)} \text{Résidus de } z^{n-1} X(z)$$

Exemple n° 8 :

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \Rightarrow z^{n-1} X(z) = \frac{z^n}{z - e^{-aT}} \text{ admet 1 pôle } z = e^{-aT}$$

$$x_n = x(nT) = \text{Résidu de } \frac{z^n}{z - e^{-aT}} = e^{-anT}$$

3.4.2. DIVISION SELON LES PUISSANCES CROISSANTES DE z^{-1}

Traitons l'exemple suivant $X(z) = \frac{z+0,2}{z+0,5} = \frac{1+0,2z^{-1}}{1+0,5z^{-1}}$ soit en posant $x = z^{-1}$

$ \begin{array}{r} +1 \quad +0,2x \\ -1 \quad -0,5x \\ \hline 0 \quad -0,3x \\ \quad +0,3x \quad +0,15x^2 \\ \hline 0 \quad \quad +0,15x^2 \\ \quad \quad -0,15x^2 \quad -0,075x^3 \\ \hline 0 \quad \quad \quad -0,075x^3 \\ \quad \quad \quad +0,075x^3 \quad +0,0375x^4 \\ \hline 0 \quad \quad \quad \quad +0,0375x^4 \quad \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 \quad +0,5x \\ \hline 1 \quad -0,3x \quad +0,15x^2 \quad -0,075x^3 \quad +\dots \end{array} $
---	--

$$X(z) = \frac{z+0,2}{z+0,5} = \frac{1+0,2z^{-1}}{1+0,5z^{-1}} = 1 - 0,3z^{-1} + 0,15z^{-2} - 0,075z^{-3} + \dots$$

Cette méthode ne donne pas le terme général de la suite $\{x_n\}$. Elle permet de calculer chaque terme selon son rang dans la suite. Elle est toutefois très pratique et bien adaptée à l'analyse des régimes transitoires des systèmes discrets ou échantillonnés. Afin d'éviter les erreurs induites par la notation z^{-1} il est conseillé de poser $z^{-1} = x$.

3.4.3. DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

La méthode consiste à :

- décomposer $X(z^{-1})$ (ou bien $X(z)/z$) en éléments simples;
- consulter un dictionnaire (Cf. annexe A.3.2.).

Exemple n° 9 : Soit $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-\alpha})}$ calculons $x(nT)$:

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-e^{-\alpha}z^{-1})} = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{-\alpha}z^{-1}}$$

avec $A_1 = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ et $A_2 = \frac{-e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$

En consultant les tables on trouve :

$$x(nT) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \left[1 - e^{-\alpha} e^{-n\alpha} \right] = \frac{1 - e^{-(1+n)\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}$$

Exemple n° 10 : Soit $X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,5)}$ calculons x_n :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-0,5)} = \frac{2}{z} + \frac{2}{(z-1)} - \frac{4}{(z-0,5)}$$

$$X(z) = 2 + \frac{2z}{(z-1)} - \frac{4z}{(z-0,5)}$$

$$x(n) = 2\delta(n) + 2 - 4(0,5)^n$$

$$x(nT) = 2\delta(nT) + 2 - 4e^{nT\alpha}$$

$$\text{avec } \alpha = \ln \frac{0,5}{T}$$

3.5. TRANSFORMÉE EN « z » MODIFIÉE

La transformée en z ne donne aucune information sur les valeurs prises par $x(t)$ entre les instants d'échantillonnage. La transformée en z modifiée permet de pallier cet inconvénient. De plus cette technique reste le seul moyen de calculer la transformée en z d'un signal affecté d'un retard quelconque. A ce titre elle permet de *modéliser les fonctions de transfert comportant des retards purs*. Quelques transformées en z modifiées sont données en annexe A.3.2.

3.5.1. PREMIERE EXPRESSION

Soit $0 < \lambda < 1$ et $x(0^+) = 0$:

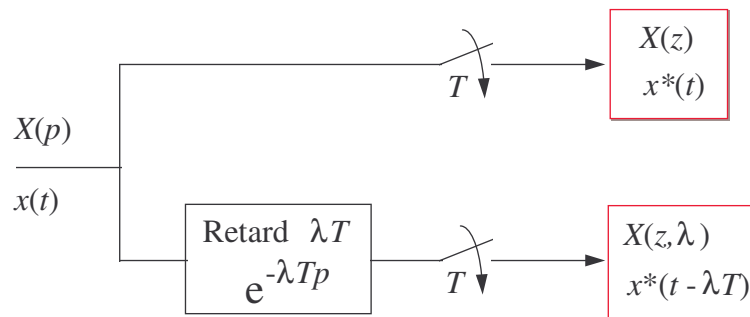


Figure 2 : Transformée en « z » modifiée

Selon ce qui a été établi au chapitre 1 on peut écrire sachant que $x(0^+) = 0$:

$$X^*(p, \lambda) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(v) e^{-\lambda T v} dv}{1 - e^{-T(p-v)}}$$

Cette intégrale ne peut être calculée sur le contour Γ_1 .

En effet $e^{-\lambda T v} \rightarrow \infty$ lorsque $\text{Ré}(v) \rightarrow -\infty$.

Pour contourner cette difficulté on pose $m = 1 - \lambda$.

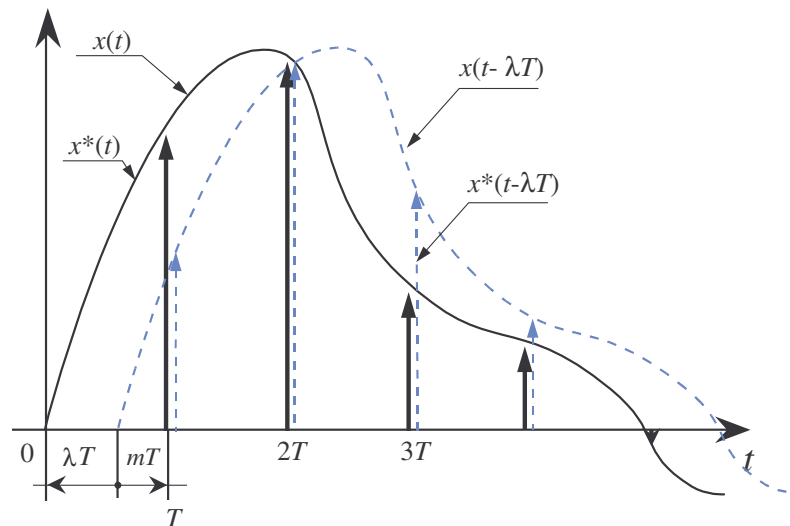


Figure 3 : Transformée en « z » modifiée

Aussi :

$$\mathbf{L}[x(t - \lambda T)\delta_T(t)] = \mathbf{L}[x(t - T - mT)\delta_T(t)] = e^{-Tp} \mathbf{L}[x(t + mT)\delta_T(t)]$$

$$X^*(p, m) = e^{-Tp} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(v) \cdot e^{mTv}}{1 - e^{-T(p-v)}} dv \text{ qui peut \^etre calcul\^ee sur le contour } \Gamma_1. \text{ Il vient :}$$

$$X(z, m) = \mathbf{Z}_m x(t) = z^{-1} \sum_{\text{p\^oles de } X(v)} \text{R\^esidus} \frac{X(v) e^{mTv}}{1 - z^{-1} e^{Tv}}$$

Le param\^etre m n'appara\^it qu'au num\^erateur de $X(z, m)$.

Exemple n° 11 : Soit $x(t) = e^{-at} \cdot u(t) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p+a}$. Calculons $X(z, m)$.

$$X(z, m) = z^{-1} \cdot \text{R\^esidu du p\^ole } v=a \left[\frac{e^{mTv}}{(v+a)(1 - z^{-1} e^{Tv})} \right] = z^{-1} \frac{e^{-mTa}}{(1 - z^{-1} e^{-aT})} = \frac{e^{-mTa}}{(z - e^{-aT})}$$

3.5.2. SECONDE EXPRESSION

$$X^*(p, m) = e^{-Tp} \mathbf{L}[x(t + mT)\delta_T(t)] = e^{-Tp} \sum_{n=0}^{\infty} x((n+m)T) e^{-nTp}$$

$$X(z, m) = \mathbf{Z}_m [x(t)] = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x((n+m)T) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x((n-1+m)T) z^{-n}$$

3.5.3. PROPRIETE DE LA TRANSFORMEE EN Z MODIFIEE

Les principales propri\^et\^es de la transform\^ee en z modifi\^ee sont list\^ees en annexe A.3.3. Par ailleurs signalons que :

$$X(z) = \lim_{m \rightarrow 0} zX(z, m) = \lim_{m \rightarrow 1} X(z, m) + x(0)$$

3.5.4. INVERSION DE LA TRANSFORMÉE EN « z » MODIFIÉE

En appliquant les méthodes exposées précédemment au § 3.3.4. on obtient :

$$x((n-1+m)T) = \sum_{\substack{\text{pôles de} \\ z^{n-1}X(z,m)}} \text{Résidus de } z^{n-1}X(z,m)$$

Si la fonction présente une discontinuité à chaque instant d'échantillonnage nT on a :

$$\begin{aligned} x(nT^-) &= x((n-1+m)T) \text{ avec } m=1 \\ x(nT^+) &= x((n+m)T) \text{ avec } m=0 \end{aligned}$$

Exemple n° 12 :

$$\text{Soit } X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-aT})} \text{ et } X(z,m) = \frac{ze^{-amT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Appliquons la propriété $X(z) = \lim_{m \rightarrow 0} z \cdot X(z,m) = \lim_{m \rightarrow 1} X(z,m) + x(0)$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} z \cdot X(z,m) &= \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-aT})} \\ \lim_{m \rightarrow 1} X(z,m) + x(0) &= \frac{ze^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} + 1 = \frac{z^2 - z + e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} \end{aligned}$$

Ces deux limites sont différentes. Calculons :

$$x((n-1+m)T) = \sum_{\substack{\text{pôles de} \\ X(z,m)}} \text{Résidus de } z^{n-1} \cdot X(z,m) = \sum_{\substack{v=1 \\ v=e^{-aT}}} \text{Résidus de } z^{n-1} \frac{ze^{-amT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$x((n-1+m)T) = \sum_{\substack{z=1 \\ z=e^{-aT}}} \text{Résidus de } \frac{z^n e^{-amT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{e^{-amT}}{(1-e^{-aT})} - \frac{e^{-a(n+m)T}}{(1-e^{-aT})}$$

$$x((n-1+m)T) = \frac{(1-e^{-anT})}{(1-e^{-aT})} e^{-amT} . \text{ Calculons les valeurs } x(nT^-) \text{ et } x(nT^+)$$

$$x(nT^-) = \lim_{m \rightarrow 1} x((n-1+m)T) = \frac{(e^{-aT} - e^{-a(n+1)T})}{(1-e^{-aT})}$$

$$x(nT^+) = \lim_{m \rightarrow 0} x((n+m)T) = \frac{(1-e^{-a(n+1)T})}{(1-e^{-aT})} = x(nT^-) + 1$$

3.6. TRANSFORMÉE EN « w »

La transformée en w est une transformation homographique qui fait correspondre l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe z au demi-plan gauche du plan complexe w .

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \tanh \frac{Tp}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$$

Si $p = j\omega$ alors $w = \frac{z-1}{z+1} = -j \tan \frac{j\omega}{2}$

Aussi certaines des méthodes d'études concernant les systèmes continus décrits par leur transmittance en p sont-elles directement applicables aux systèmes discrets décrits par leur transmittance en w . Il est possible de tracer les diagrammes de BODE et d'appliquer le critère de ROUTH pour apprécier la stabilité du système. Nous y reviendrons plus tard. Signalons toutefois les expressions caractéristiques de la transformée en w :

$$X(w) = [X(z)]_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \left(\frac{1-w}{1+w} \right)^n$$

$$x(nT) = \frac{1}{j\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(w) \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^n \frac{dw}{1-w^2}$$

Les transformées en w de signaux caractéristiques sont données en annexe A.3.2.

ANNEXE A.3.1.

PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN « z »

N°	Règle	Relation
1.	Linéarité	$\mathbf{Z}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \mathbf{Z}x_1(t) + \lambda_2 \mathbf{Z}x_2(t)$
2.	Translation retardée	$\mathbf{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k} X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x_m z^{-(m+k)}$ $\mathbf{Z}\{x_{n-k}\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x_m z^{-m} \right]$
3.	Translation avancée	$\mathbf{Z}\{x_{(n+k)}\} = z^k X(z) - z^k \sum_{m=0}^{k-1} x_m \cdot z^{-m}$
4.	Translation complexe	$\mathbf{Z}X(p+a) = X(e^{aT} z)$
5.	Valeur initiale	$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
6.	Valeur finale	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) X(z^{-1})$

ANNEXE A.3.2.

TABLEAU DES TRANSFORMEES

$x(t)$ avec $x(t) = 0$ $\forall t < 0$	$X(p)$	$X(z)$	$X(z,m)$	$X(w)$
$\delta(t)$	1	1	1	1
$\delta(t-kT)$	e^{-kTp}	z^{-k}	z^{-k}	$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^k$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$	$\frac{1+w}{2w}$
$t u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$	$\frac{T(1-w^2)}{4w^2}$
$\frac{t^2}{2} u(t)$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2} \left[\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$	$\frac{T^2(1-w^2)}{8w^3}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$	$\frac{(\coth \frac{aT}{2} + 1)(1+w)}{2(1+w \cdot \coth \frac{aT}{2})}$
$(1-e^{-at})u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1-w^2}{2w(1+w \cdot \coth \frac{aT}{2})}$

$\left[t - \frac{(1 - e^{-at})}{a} \right] u(t)$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1 - e^{-aT})}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{amT-1}{a(z-1)} + \frac{e^{-amT}}{a(z - e^{-aT})}$	$\frac{T(1-w^2)}{4w^2} \left[1 - \frac{2w}{aT(1+w \cdot \coth \frac{aT}{2})} \right]$
$[e^{-at} \cdot \sin bt] u(t)$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \cdot \sin bT}{(z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + 2e^{-2aT})}$		
$[e^{-at} \cdot \cos bt] u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot e^{-aT} \cdot \sin bT}{(z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + 2e^{-2aT})}$		

ANNEXE A.3.3.

PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN « z » MODIFIEE

N°	Règle	Relation
1.	Linéarité	$\mathbf{Z}_m[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \mathbf{Z}_m x_1(t) + \lambda_2 \mathbf{Z}_m x_2(t)$
2.	Translation complexe	$\mathbf{Z}_m X(p + a) = e^{-aT(m-1)} X(e^{aT} z, m)$
3.	Valeur initiale	$\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} x(n, m)T = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} zX(z, m)$
4.	Valeur finale	$x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)T = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z, m)$

ANNEXE A.3.4

