

AUTOMATIQUE SYSTÈMES LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS

Exercices d'entraînement à l'utilisation des abaques

- Les 4 exercices sont indépendants -

Rappel : processus numérique du 2ème ordre

$$H(z) = K \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$z_1 = A e^{j\theta}$$

$$K = b_1$$

$$z_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

$$a_0 = z_1 \bar{z}_1 = A^2$$

$$a_1 = -(z_1 + \bar{z}_1) = -2 A \cos\theta = -2 \operatorname{Re}(z_1)$$

Exercice N° 1 :

On désire concevoir un système échantillonné qui se comporte comme un 2ème ordre d'amortissement $\zeta = 0,7$ et de pulsation propre non amortie $w_n = 2 \text{ rd/s}$.

On choisit une période d'échantillonnage $T = 0,5 \text{ s}$.

- 1) Calculer les coefficients a_0 et a_1 .
- 2) Calculer les coefficients b_0 et b_1 pour que le gain statique du système soit 1 et son dépassement dans la réponse à l'échelon de l'ordre de 5%. Vérifier les performances en traçant la réponse avec MATLAB.

Solution :

$$1) \ a_0 = 0,246 \quad , \quad a_1 = -0,75$$

$$2) \ \gamma = -40^\circ \quad , \quad z_0 = -0,5 \quad , \quad b_1 = 0,33 \quad , \quad b_0 = 0,17$$

$$H(z) = \frac{0,33 z + 0,17}{z^2 - 0,75 z + 0,246}$$

Exercice N° 2 :

Soit le système discret de fonction de transfert (FTBF) :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{0,5 K(z+1)}{z^2 + (-2 + K(\alpha + 0,5))z + (1 + K(0,5 - \alpha))}$$

qui dépend des 2 paramètres K et α .

- 1) On choisit $\alpha = 1$ et $K = 1$.

Montrer que $H(z)$ est la fonction de transfert d'un système numérique du 2^{ème} ordre.

Déduire des abaques fournies en annexe le dépassement prévisible de la réponse indicielle. Vérifier en traçant la réponse avec MATLAB.

- 2) On souhaite que sa réponse $y(kT)$ à un échelon discret $y_c(kT)$ ait un dépassement inférieur à 20%.

On choisit a priori, comme paramètres ζ et $w_n T$ du système analogique correspondant : $\zeta = 0,5$ et $w_n T = 0,5 \text{ rd}$.

Calculer K et α . Quel est le gain statique du système ? Quel sera le dépassement réel ? Vérifier en traçant la réponse avec MATLAB.

Solution :

- 1)

$$H(z) = \frac{0,5(z+1)}{z^2 - 0,5z + 0,5}$$

$$z_0 = -1 \quad , \quad z_1 = 0,25 + j 0,661 \quad , \quad \zeta = 0,25 \quad , \quad \gamma = -20^\circ$$

$$D = 40\%$$

- 2) $a_0 = 0,606 \quad , \quad a_1 = -1,414 \quad , \quad K = 0,2 \quad , \quad \alpha = 2,5$

$$H(z) = \frac{0,1(z+1)}{z^2 - 1,4z + 0,6}$$

$$\text{gain statique} = 1$$

$$z_0 = -1 \quad , \quad z_1 = 0,7 + j 0,33 \quad , \quad \gamma = -30^\circ \quad , \quad D = 16\%$$

Exercice N° 3 :

- 1) Exprimer la fonction de transfert $H(z)$ d'un système numérique du 2ème ordre devant répondre au cahier des charges suivant :

– gain statique unité ;

- dépassement de l'ordre de 10% pour l'échantillon de rang 4 (on choisira l'amortissement ζ le plus faible).

Vérifier les performances en traçant la réponse avec MATLAB.

- 2) On souhaite garder le même dépassement mais diviser par 2 le rang du premier pic. Quel sera le nouveau système ? Vérifier les performances en traçant la réponse avec MATLAB.

Solution :

$$1) \zeta = 0,6, \quad \gamma = -20^\circ, \quad n\theta = 165^\circ, \quad \theta = 41^\circ, \quad z_1 = 0,59 e^{j41}, \\ z_0 = -0,11$$

$$H(z) = \frac{0,412z + 0,045}{z^2 - 0,891z + 0,348}$$

$$2) n\theta = 165^\circ, \quad \theta = 82,5^\circ, \quad z_1 = 0,35 e^{j82,5}, \quad z_0 = -0,23$$

$$H(z) = \frac{0,838z + 0,193}{z^2 - 0,0914z + 0,122}$$

Exercice N° 4 :

On considère le système échantillonné de la Figure 1.

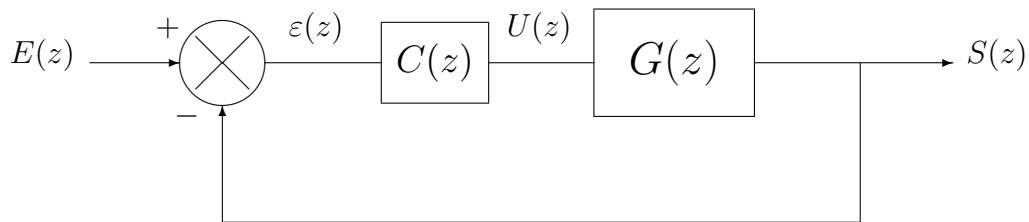


FIG. 1

La fonction de transfert échantillonnée du processus précédé de son bloqueur est égale à :

$$G(z) = \frac{S(z)}{U(z)} = \frac{0,12z}{(z-1)(z-0,97)}$$

On se propose de calculer un correcteur numérique $C(z)$ par la méthode de placement des pôles.

- 1) Calculer le correcteur numérique permettant d'obtenir :
- une FTBF de la forme :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = K \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)}$$

- les performances en réponse à un échelon de consigne suivantes :
 - temps de montée $T_m = 10 T$ (avec $T = 10 ms$)
 - dépassement de 7% avec un amortissement $\zeta = 0,7$
 - gain statique égal à 1

Vérifier les performances en traçant la réponse avec MATLAB.

- 2) Ecrire l'équation récurrente à programmer dans le calculateur pour obtenir le signal de commande issu du correcteur.

Solution :

$$1) \quad \gamma = 0, \quad n\theta = 135^\circ, \quad \theta = 13,5^\circ, \quad z_1 = 0,78 e^{j13,5}, \quad z_0 = 0,63 \\ K = 0,247$$

$$H(z) = \frac{0,247z - 0,156}{z^2 - 1,52z + 0,611}$$

$$C(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{2,058z^2 - 3,297z + 1,261}{z^2 - 0,767z}$$

Avant de continuer, on vérifie d'abord que le correcteur est réalisable physiquement (i.e. causal). Le degré du numérateur ne doit pas être supérieur au degré du dénominateur.

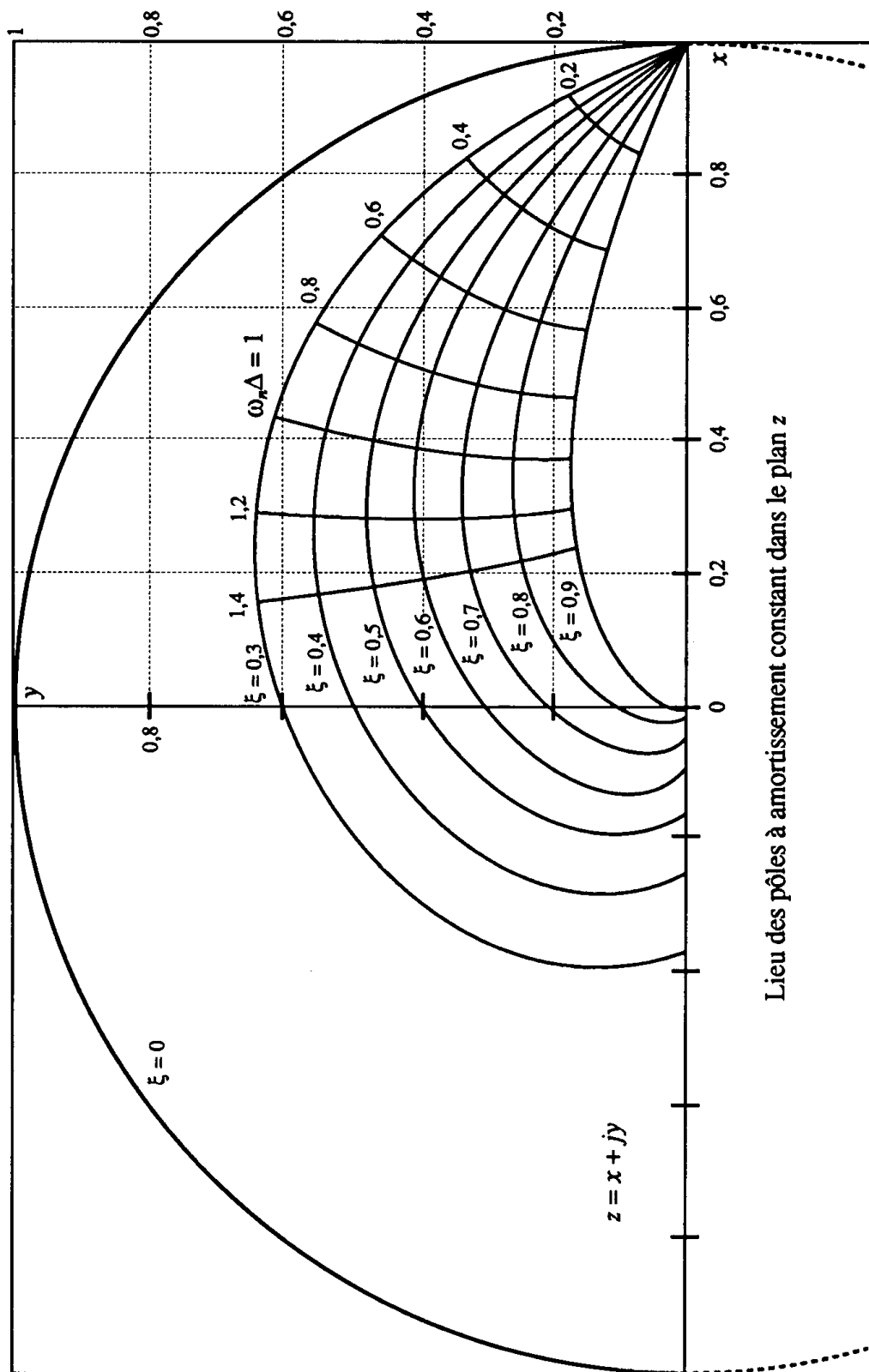
2)

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{2,058 - 3,297z^{-1} + 1,261z^{-2}}{1 - 0,767z^{-1}}$$

$$U(z)(1 - 0,767z^{-1}) = \varepsilon(z)(2,058 - 3,297z^{-1} + 1,261z^{-2})$$

$$u(kT) = 0,767 u((k-1)T) + 2,058 \varepsilon(kT) - 3,297 \varepsilon((k-1)T) + 1,261 \varepsilon((k-2)T)$$

On vérifie bien a posteriori que le système est causal : la commande à l'instant kT ne dépend que d'informations disponibles à cet instant ou antérieures à cet instant (qu'il faut donc mémoriser).



Lieu des pôles à amortissement constant dans le plan z

FIG. 2

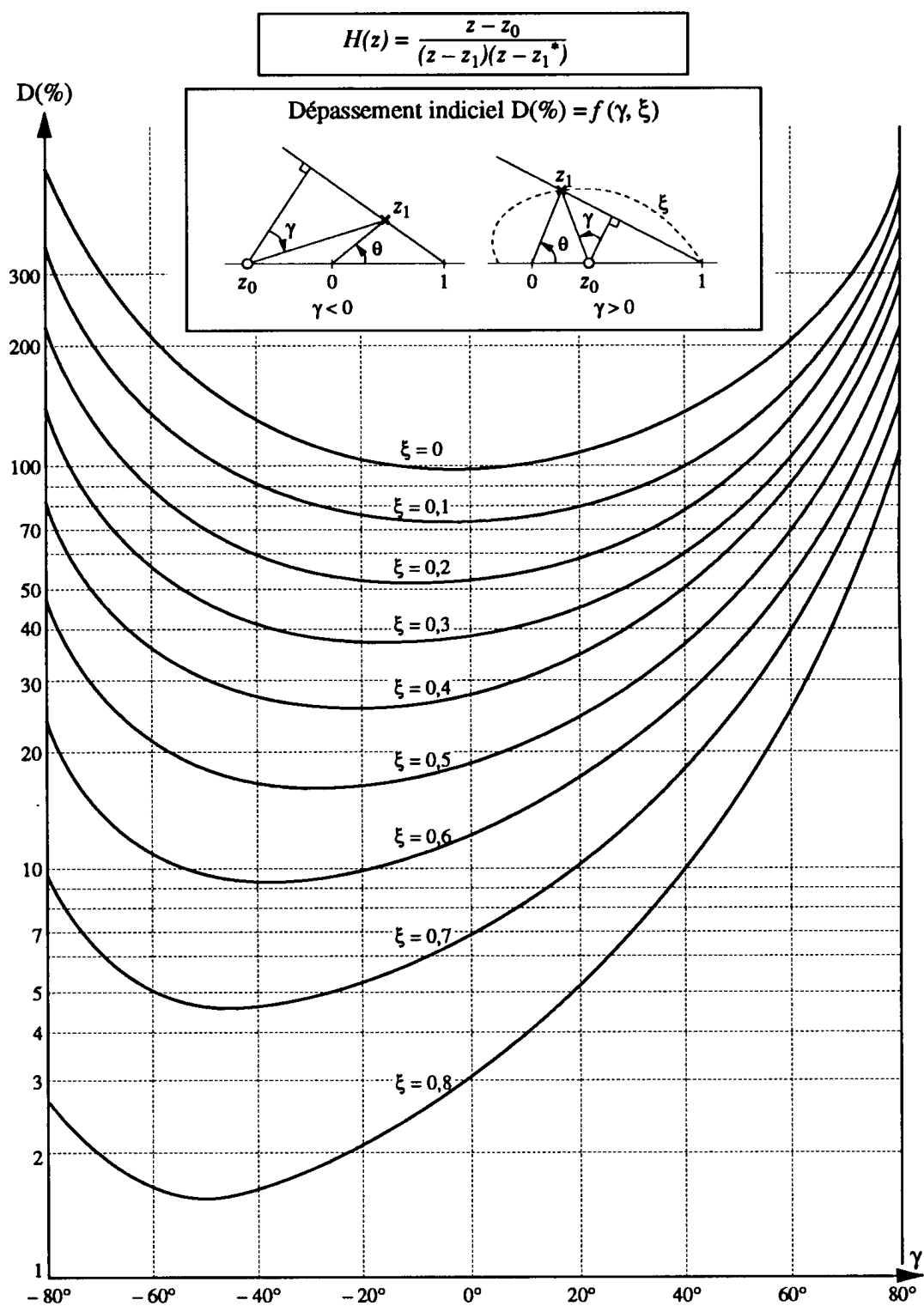


FIG. 3

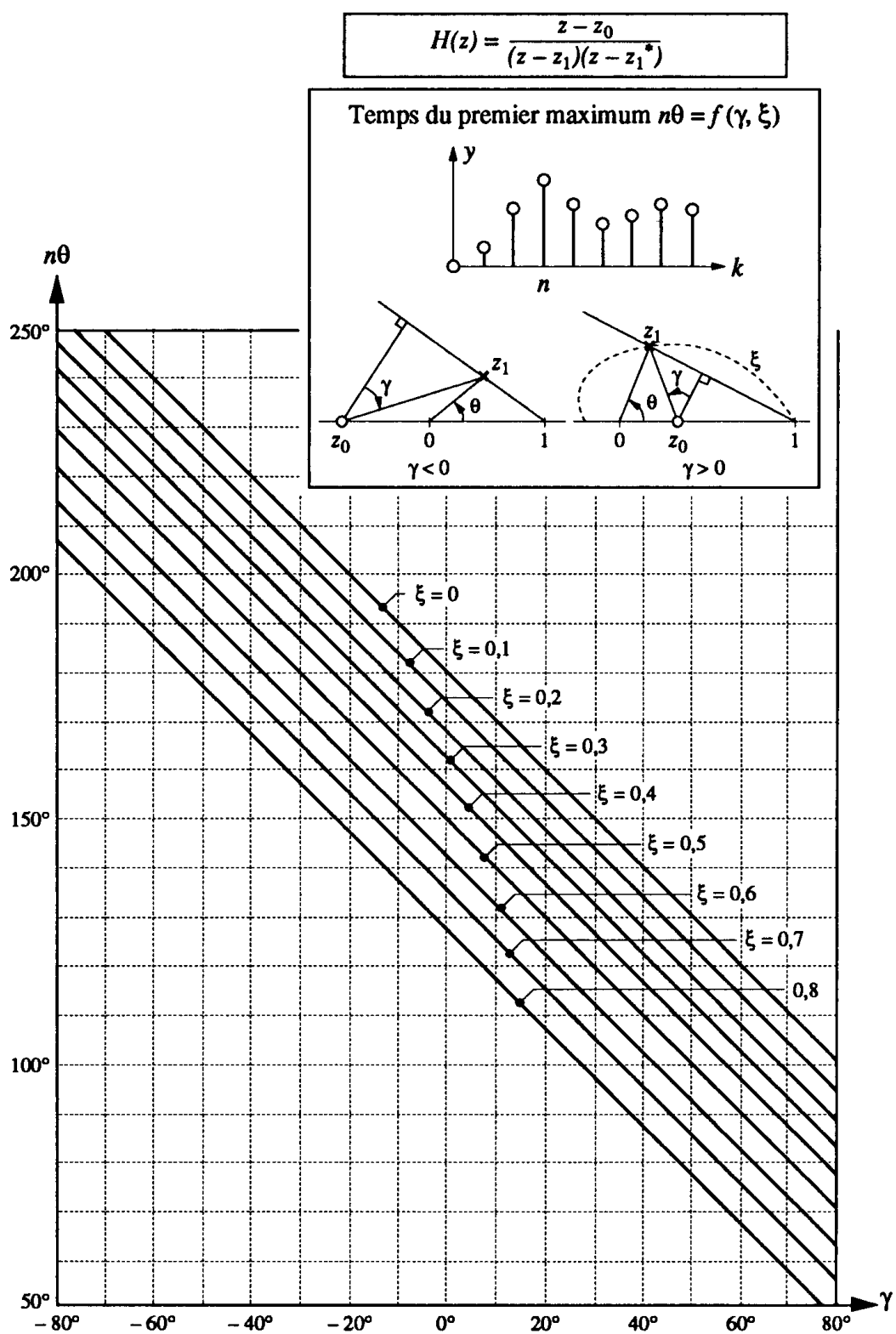


FIG. 4