



Commande linéaire avancée

Plan du cours

- Introduction
- Commande RST
- Commande par retour d'état
- Commande robuste H_∞



Commande linéaire avancée

Introduction

Celui-ci aborde la synthèse des correcteurs permettant de réguler les grandeurs électriques (courants...), magnétiques (flux, courant magnétisant...) et mécaniques (couple, vitesse, position...).

Leur choix doit être adapté aux performances requises (temps de réponse...), aux impératifs techniques (complexité de la commande, immunité aux parasites) et aux contraintes économiques.

Les correcteurs ont un triple objectif :

- stabiliser le système en boucle fermée : Un système linéaire est stable asymptotiquement si et seulement si sa réponse impulsionnelle converge vers 0 lorsque le temps croît vers l'infini. Pour un système continu, cette propriété est vérifiée lorsque tous les pôles du système continu sont à partie réelle négative dans le plan s . Pour un système échantillonné, tous les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité dans le plan z .
- assurer le suivi des grandeurs de sortie y en fonction des consignes y_c en l'absence de perturbations : asservissement. En particulier, des contraintes de précision peuvent être imposées lorsque l'entrée est excitée par un échelon, une rampe...
- atténuer la variation des sorties en présence de perturbations lorsque les consignes sont constantes : régulation.

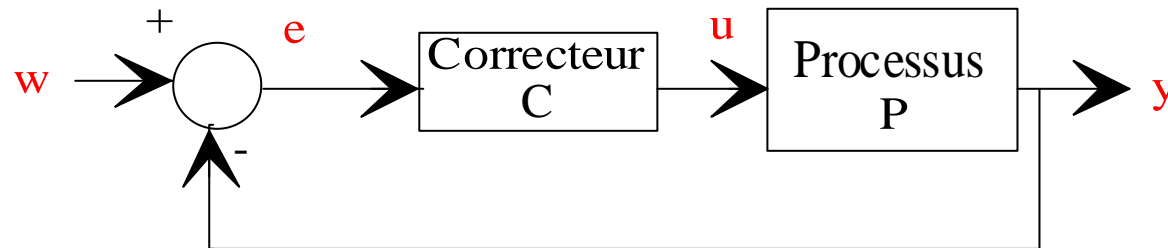


Commande linéaire avancée

Pour accomplir la synthèse d'un correcteur, la première démarche à effectuer consiste à traduire le cahier des charges sous forme d'un objectif exprimé en termes :

- de recherche de stabilité. Cette condition doit bien sûr toujours être vérifiée ! De plus la stabilité doit être conservée en présence des bruits injectés sur le système et en dépit des imprécisions sur la modélisation (dynamiques négligées) et des incertitudes paramétriques. Ces contraintes conduiront à définir la notion de stabilité robuste.
- de performances en régulation (capacité de rejeter les perturbations injectées en entrée ou en sortie) et en poursuite (capacité de suivre en sortie les consignes).

Stabilité d'un SISO

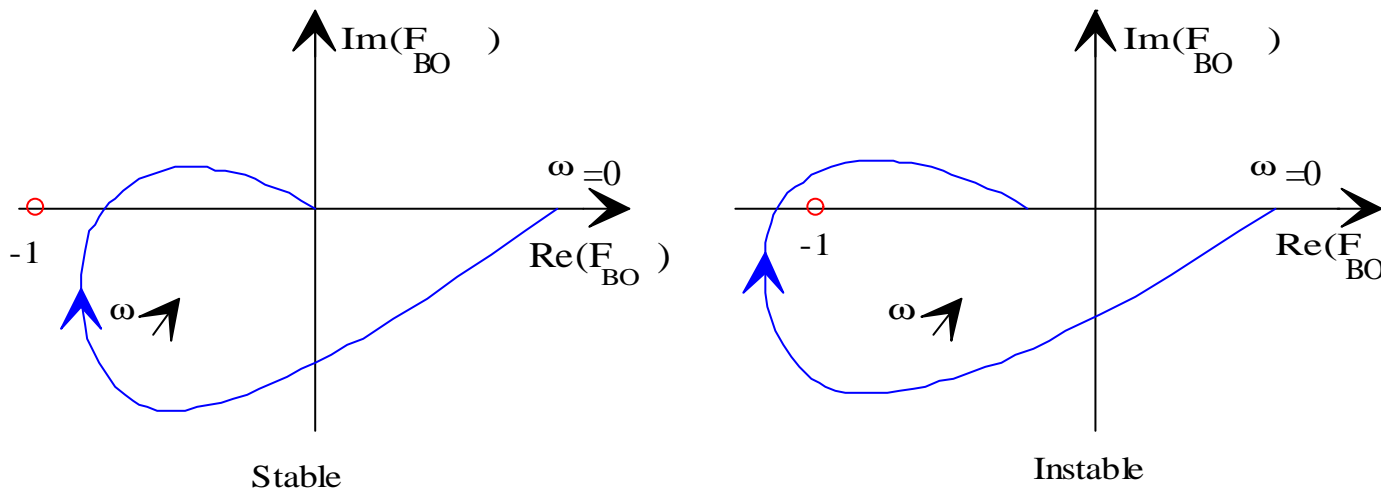




Commande linéaire avancée

Critère du revers dans le plan de Nyquist :

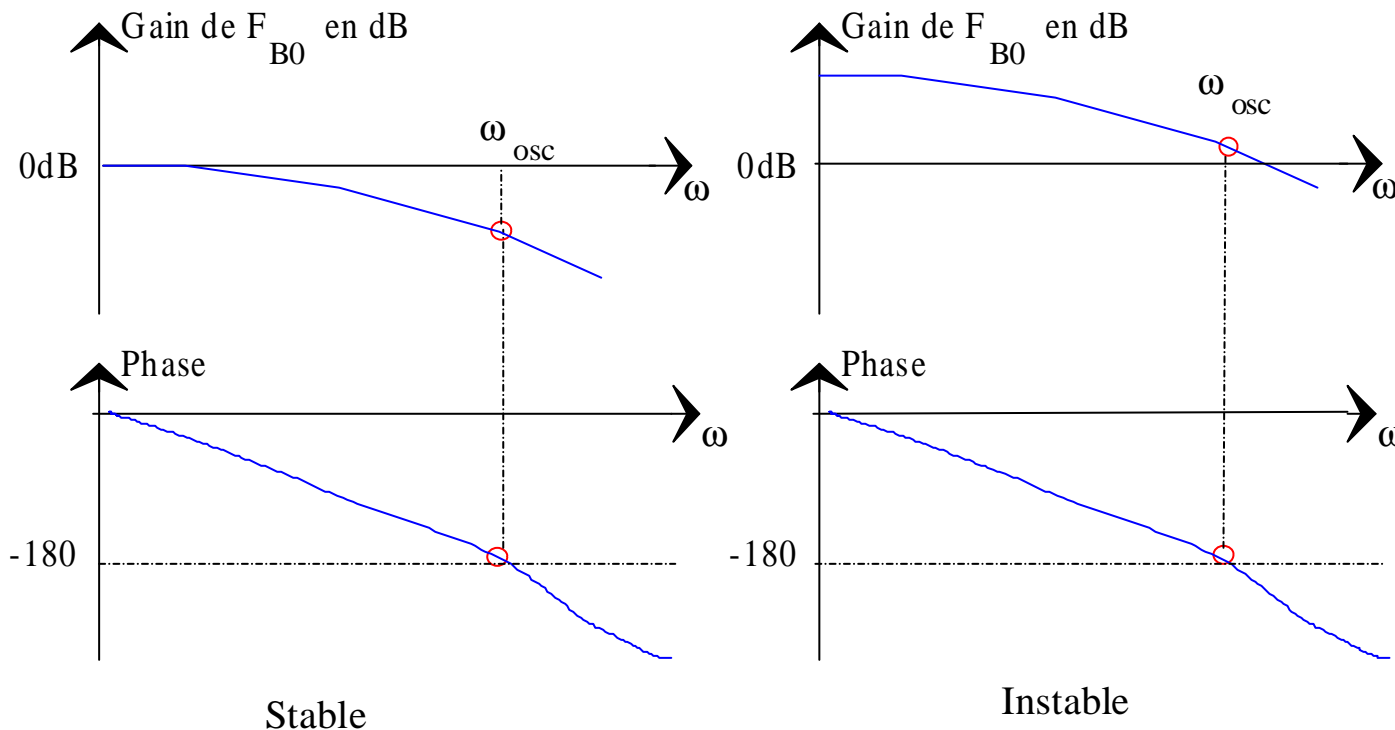
Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système en boucle fermée est satisfaite si le transfert en boucle ouverte $F_{BO}(j\omega)$ entoure le point critique $(-1,0)$ autant de fois qu'il comporte de pôles instables lorsque ω croît de 0 à $+\infty$. Si le système en boucle ouverte ne possède ni pôle ni zéro instables (F_{BO} est à déphasage minimal), cette condition devient : le transfert en boucle ouverte $F_{BO}(j\omega)$ laisse le point critique $(-1,0)$ sur sa gauche lorsque ω croît de 0 à $+\infty$





Commande linéaire avancée

Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si la courbe de gain dans le diagramme de Bode est en dessous de l'axe 0dB pour la pulsation ω_{osc} définie par $\text{Arg}[F_{BO}(\omega_{osc})] = \pi$





Commande linéaire avancée

Précision

La précision de l'asservissement est caractérisée par l'erreur entre la sortie et la consigne en réponse à différents types d'échelons d'entrée (position, vitesse, accélération...). Elle peut être calculée à partir du théorème de la valeur finale pour un système en boucle fermée avec retour unitaire :

- pour un système continu
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W}{1 + F_{BO}(s)}$$
- pour un système discrétisé
$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{W}{1 + F_{BO}(z)}$$

avec w l'entrée, $e = y - w$ l'erreur de sortie, y la sortie et $F_{BO} = \frac{y(z)}{e(z)}$ le transfert direct en boucle ouverte.



Commande linéaire avancée

Si $F_{BO}(s)$ est factorisée sous la forme $\frac{K}{s^i} F^-(s)$ avec $F(0) = 1$ et i le nombre d'intégrateurs, l'erreur statique en boucle fermée peut être évaluée pour les différentes excitations ci-dessous

	Système continu			Système discret		
nombre d'intégrateurs dans F_{BO}	échelon de position $w(t) = E_0$	échelon de vitesse $w(t) = V_0 t$	échelon d'accélération $w(t) = \Gamma_0 \frac{t^2}{2}$	échelon de position $w_n = E_0$	échelon de vitesse $w_n = V_0 n T_{ech}$	échelon d'accélération $w_n = \Gamma_0 n^2 \frac{T_{ech}^2}{2}$
0	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\frac{V_0}{K}$	∞	0	$\frac{V_0}{K} T_{ech}$	∞
2	0	0	$\frac{\Gamma_0}{K}$	0	0	$\frac{\Gamma_0}{K} T_{ech}^2$



Commande linéaire avancée

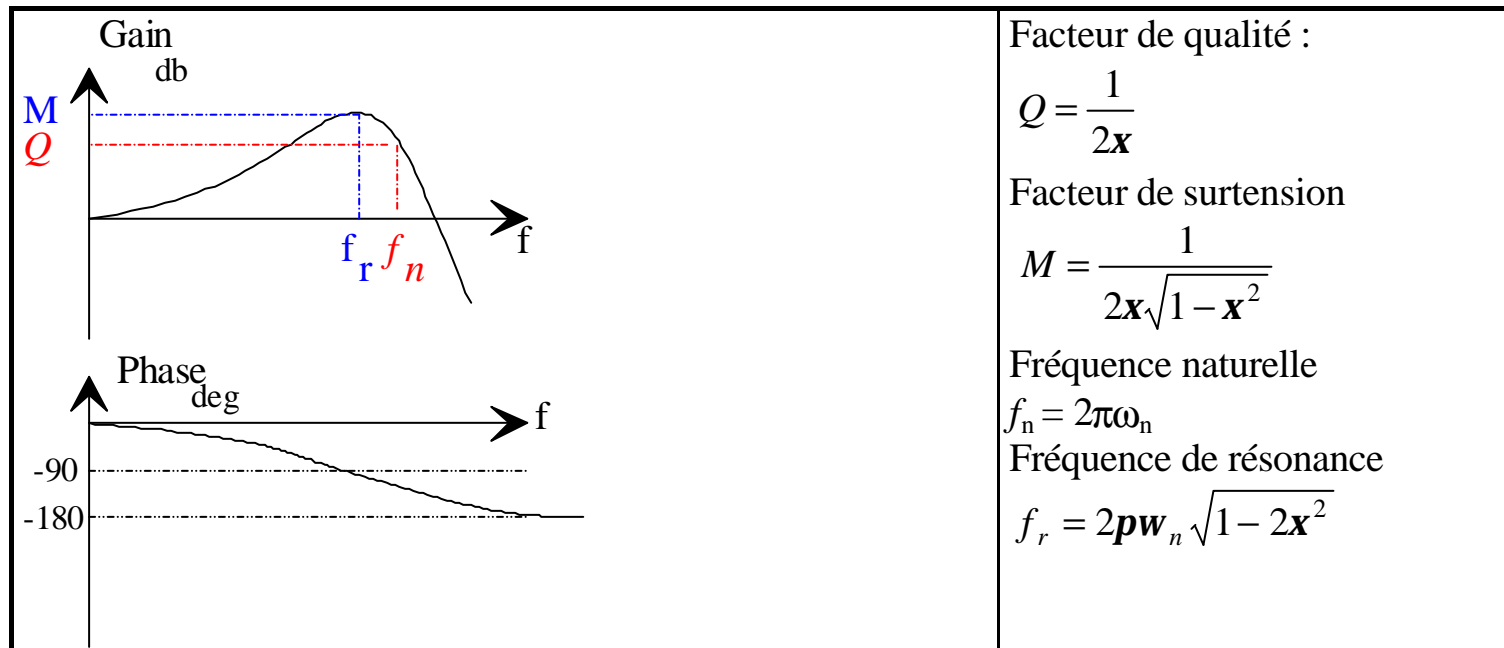
Performances

Les performances dynamiques désirées en boucle fermée sont spécifiées à partir :

- soit d'une réponse pile z^{d-1} (la sortie recopie l'entrée avec d pas de retard), des caractéristiques d'un modèle du premier ordre (Gain et constante de temps) ou celles d'un modèle du second

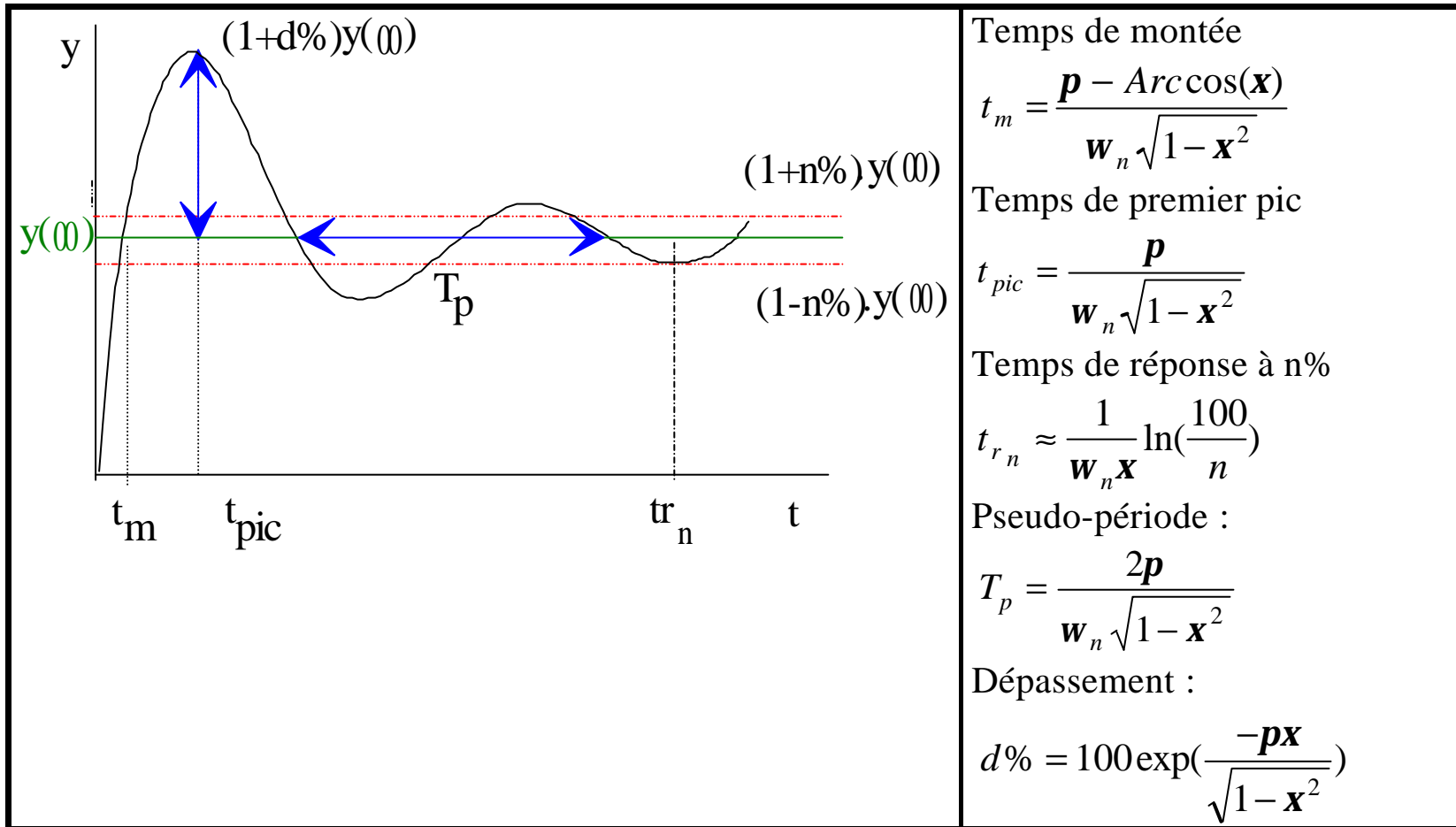
ordre continu $H(s) = \frac{K_0 \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ (qui sera bloqué à l'ordre zéro et discrétisé) et donc

de son gain K_0 , de sa pulsation naturelle ω_n et de son amortissement ξ





Commande linéaire avancée





Commande linéaire avancée

Discretisé et bloqué à l'ordre 0, ce système est représenté (pour un gain unitaire) par le transfert en z :

$$\frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + \alpha z + \beta} \quad (14.1)$$

avec

$$\beta = \exp(-2\xi\omega T_{ech})$$

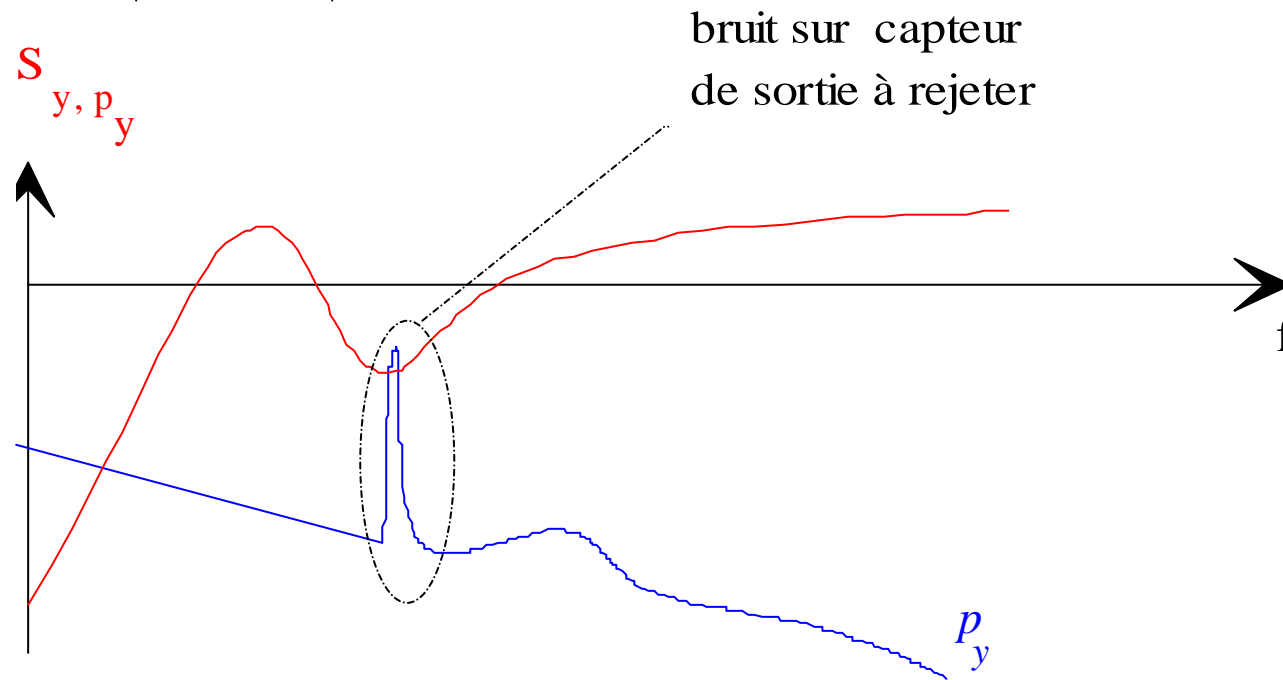
$$\alpha = -2\exp(-\xi\omega T_{ech})\cos(\omega T_{ech} \sqrt{1 - \xi^2})$$

- soit de la dynamique du système objectif (ce qui revient à fixer les pôles du système corrigé). Cependant, les zéros de la fonction de transfert modifient sensiblement la réponse temporelle et fréquentielle.
- soit, plus généralement, par des transferts entrées/sorties, perturbations/entrées et perturbations/sorties.



Commande linéaire avancée

Le cahier des charges précise l'objectif désiré pour chacune de ces fonctions de transfert. Il impose leur expression analytique (par exemple $F_{BF}(s) = \frac{\mathbf{w}_n^2}{s^2 + 2\mathbf{z}\mathbf{w}_n s + \mathbf{w}_n^2}$) ou, plus généralement, il définit leurs gabarits $|S_{x p_x}(j\mathbf{w})|$ à partir du spectre des bruits





Commande linéaire avancée

Commande RST

Exposé de la méthode

❶ Identifier le processus

La méthode d'identification doit tenir compte des bruits injectés dans le processus

❷ Fixer le modèle en régulation et les objectifs de l'asservissement

✂ Réponse pile

✂ Modèle du second ordre

❸ Calculer le régulateur polynomial

⇒ Commande RST

❹ Calculer le filtre d'entrée pour l'asservissement

A partir de la trajectoire et/ou de la dynamique désirée



Commande linéaire avancée

-a- Réponse pile

Le modèle a pour fonction de transfert z^{-1-d} . La sortie recopie l'entrée avec d pas de retard. Nous supposons ici que le processus possède naturellement le terme z^{-1} en facteur.

-b- Modèle du second ordre

Le modèle désiré est en général décrit par une fonction de transfert du second ordre :

$$\frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{1+\alpha+\beta}{1+\beta} \frac{z+b}{z^2+\alpha z+\beta}$$

avec :

$z+b$: numérateur de $H(z)$

α, β : coefficients fixant la dynamique du système désiré

Ce choix correspond à celui d'un système du second ordre de gain statique 1 et dont le temps de réponse dépend de α et β qui constituent les paramètres de réglage de ce type de correcteur réalisé au moyen des polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$.

Nous avons donc :

$$P(z)=A_1(z) = z^2+\alpha z+\beta$$

et

Le modèle doit vérifier $\text{degré}(A_1) - \text{degré}(B_1) \geq \text{degré}(A) - \text{degré}(B)$ pour permettre une correction polynomiale.



Commande linéaire avancée

Pour choisir α et β , on peut par exemple utiliser les caractéristiques d'un système du second ordre.

En effet, un système continu du second ordre est donné par :

$$\frac{1}{1 + 2I \frac{p}{\omega} + \left(\frac{p}{\omega} \right)^2}$$

Il a pour dénominateur

$$p^2 + 2\lambda\omega p + \omega^2$$

Si nous utilisons un bloqueur d'ordre zéro, la fonction de transfert en z qui lui correspond a pour dénominateur : $z^2 + \alpha z + \beta$ soit sous sa forme retard $1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$.

avec :

$$\begin{aligned} \beta &= \exp(-2\lambda\omega T) \\ \alpha &= -2\exp(-\lambda\omega T)\cos(\omega T \sqrt{1-\lambda^2}) \end{aligned}$$

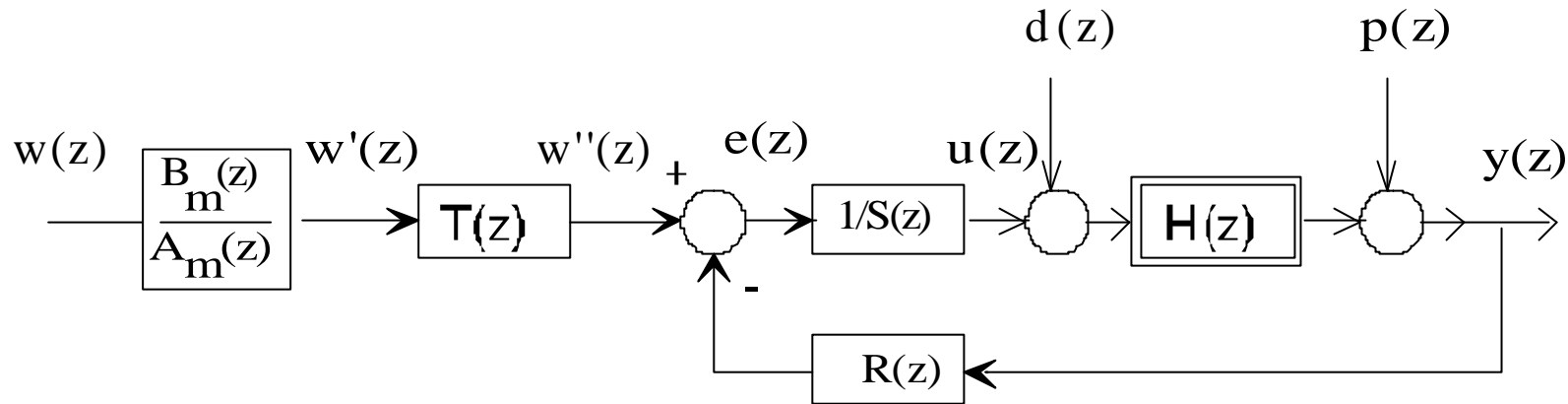
Si nous adoptons un coefficient d'amortissement de $\lambda = 0.7$, le temps de réponse est alors donné par $T_r = 5/\omega$.



Commande linéaire avancée

Régulation polynomiale RST

Dans cette méthode la structure de la boucle de commande est donnée sur la figure suivante :



Le but est de déterminer les polynômes $R(z)$, $T(z)$, $S(z)$ sachant que l'on désire que la fonction de transfert en asservissement et en boucle fermée $F_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{W'(z)} = \frac{z^{-d} B(z) T(z)}{A(z) S(z) + z^{-d} B(z) R(z)}$ soit de la

forme $\frac{Y(z)}{W'(z)} = \frac{T(z) N(z)}{P(z)} z^{-d}$

où le polynôme $P(z)$, choisi à l'avance, fixe les performances du système bouclé en régulation, $N(z)$ contient les zéros du processus qui sont conservés et $\frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ est un modèle de référence série pour l'asservissement.



Commande linéaire avancée

Nous avons :

$$\frac{y(z)}{d(z)} = \frac{B(z).S(z).z^{-d}}{A(z).S(z) + B(z).R(z).z^{-d}}$$

$$\frac{y(z)}{p(z)} = \frac{A(z).S(z)}{A(z).S(z) + B(z).R(z).z^{-d}}$$

Placement de pôles : conservation des zéros

Le modèle en asservissement est donné par : $\frac{B(z)}{P(z)} z^{-d}$

La méthode est résumée ci-dessous :

- identification du processus par un modèle de la forme :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$

- choix de la dynamique de régulation : déterminez un polynôme $P(z)$ tel que :

$$\deg(P(z)) \leq \deg(A) + \deg(B) + d - 1$$

- choix de la dynamique en asservissement. Choisissez un modèle de référence série :

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{b_{m0} + b_{m1} z^{-1} + b_{m2} z^{-2} + \dots}{1 + a_{m1} z^{-1} + a_{m2} z^{-2} + \dots}$$



Commande linéaire avancée

- calcul des polynômes $R(z)$ et $S(z)$

Résolvez l'identité de Bezout $P(z) = A(z).S(z) + z^{-d}.B(z).R(z)$ avec
 $\deg(R(z)) = \deg(A) - 1$ et $\deg(S(z)) \leq \deg(B) + d - 1$

$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{r-1} z^{-r+1}$$

$$S(z) = 1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{r-1} z^{-r+1}$$

Trouver les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ revient à résoudre $P = M.X$ avec

$$P^T = [p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{2r-1}]$$

$$X^T = [1 \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_{r-1} \quad r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_{r-1}]$$

- calcul du polynôme $T(z)$: $T(z) = P(z)/B(1)$

Poursuite et régulation à objectifs indépendants : élimination de tous les zéros

Le modèle en asservissement est $z^{-(d+1)}$

La méthode est résumée ci-dessous :

- identification du processus par un modèle de la forme :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$



Commande linéaire avancée

- **choix de la dynamique de régulation** : déterminez un polynôme $P(z)$ tel que :

$$\deg(P(z)) \leq n+d$$

- **choix de la dynamique en asservissement**. Choisissez un modèle de référence série :

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{b_{m0} + b_{m1}z^{-1} + b_{m2}z^{-2} + \dots}{1 + a_{m1}z^{-1} + a_{m2}z^{-2} + \dots}$$

- **calcul des polynômes $R(z)$ et $S(z)$**

Résolvez l'identité de Bezout $P(z) = A(z).S'(z) + z^{-(d+1)}.R(z)$ avec :

$$S'(z) = \frac{S(z)}{B(z)} \cdot z^{-1}$$

$$\deg(S'(z))=d, \deg(R(z))=n-1, \deg(P(z))=n+d$$

Trouvez les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ revient à résoudre $P=M.X$ avec

$$P^T = [1 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{n+d}]$$

$$X^T = [1 \quad s'_1 \quad s'_2 \quad \dots \quad s'_d \quad r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_{n-1}]$$

$$\text{D'où } S(z) = \frac{B(z).S'(z)}{z^{-1}} = s_0 + s_1 z^{-1} + \dots$$

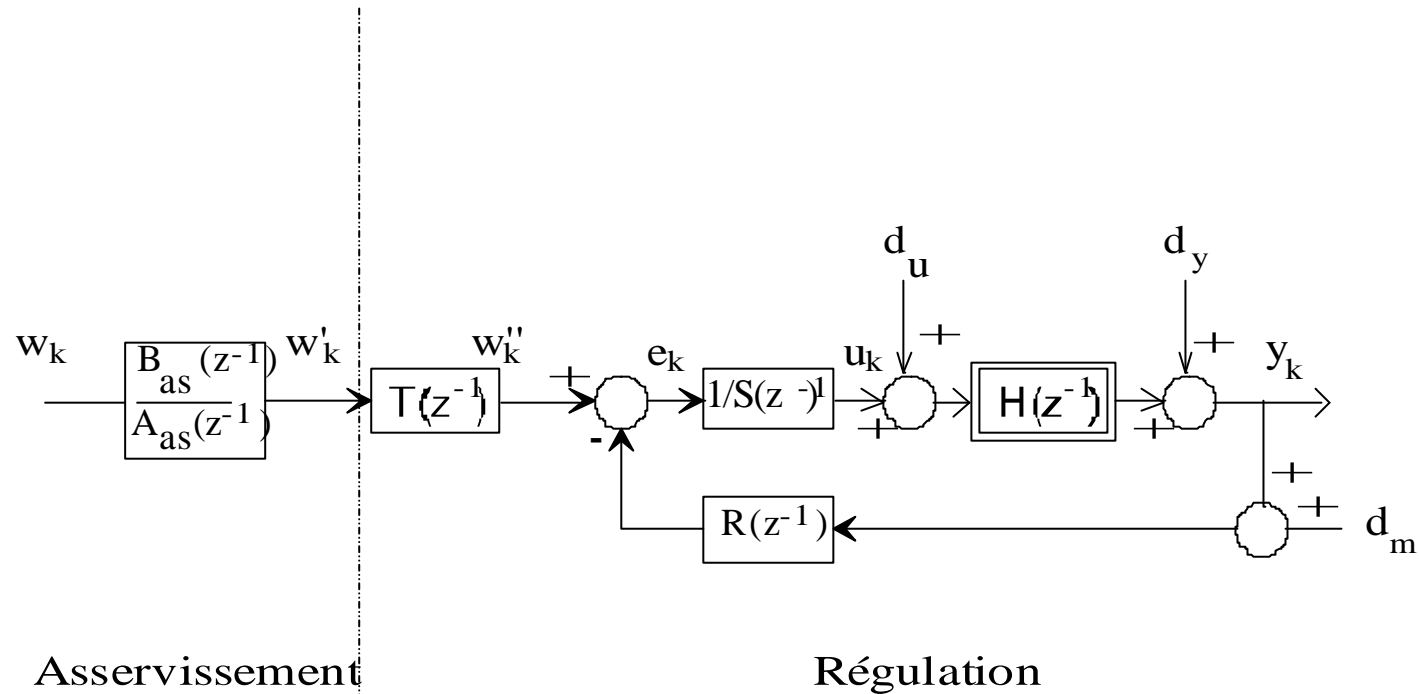
Si s_0 est différent de 1, il faudra diviser $S(z)$, $R(z)$ et $T(z)$ par s_0 .

- **calcul du polynôme $T(z)$** : $T(z)=P(z)$



Commande linéaire avancée

Poursuite et régulation à objectifs indépendants : cas général



$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{B^*(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d-1}$$



Commande linéaire avancée

Posons :

$$A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (\text{eq.39})$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} = z^{-1} B^*(z^{-1}) \quad (\text{eq.40})$$

et $n_a = \deg(A(z^{-1}))$ et $n_b = \deg(B(z^{-1}))$

Le but est de déterminer les polynômes $R(z^{-1})$, $T(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ sachant que l'on désire que la fonction de transfert en régulation et en boucle fermée

$$F_{BF}(z^{-1}) = \frac{y_k}{w'_k} = \frac{z^{-d} B(z^{-1}) T(z^{-1})}{A(z^{-1}) S(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1}) R(z^{-1})}$$

soit de la forme

$$\frac{y_k}{w'_k} = \frac{T(z^{-1}) B^*(z^{-1})}{P(z^{-1})} z^{-(d+1)}$$

$P(z)$, choisi à l'avance, fixe les performances du système bouclé en régulation.

Notons : $P(z) = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}$



Commande linéaire avancée

$B^*(z)$ contient les zéros du processus qui sont conservés. A cet effet, B^* est décomposé en deux parties :

- B^{*-} : contenant les zéros qui doivent être conservés
- B^{*+} : polynôme normalisé qui représente les zéros qui seront éliminés (zéros masquables) par les pôles de S

D'où $B^*(z^{-1}) = B^{*-}(z^{-1})B^{*+}(z^{-1})$

Si tous les zéros sont masquables, B^{*-} est réduit à une constante.



Commande linéaire avancée

Calcul des polynômes R et S

S se décompose en trois parties :

- $B^{*+}(z^{-1})$ qui permet de masquer les zéros stables que l'on désire éliminer,
- $S_p(z^{-1})$ partie précaractérisée contenant par exemple le facteur $(1-z^{-1})$ pour éliminer l'erreur statique,
- S_1 un polynôme qui sera calculé par la suite.

$$\text{Nous avons : } S(z^{-1}) = S_1(z^{-1}) B^{*+}(z^{-1}) S_p(z^{-1}) \quad (14.)$$

R se factorise en deux polynômes :

- $R_p(z^{-1})$ partie précaractérisée de R permettant d'annuler les pics sur la fonction de sensibilité . En effet, il suffit de placer les pôles auxiliaires de R de manière à annuler ce polynôme sur les fréquences correspondant à ces pics.
- R_1 un polynôme qui sera déterminé par la suite.

$$\text{Nous pouvons écrire : } R(z^{-1}) = R_1(z^{-1}) R_p(z^{-1}) \quad (14.)$$

Il suffit d'identifier la transmittance en boucle fermée F_{BF} et son modèle pour calculer les polynômes R_1 et S_1 .



Commande linéaire avancée

Il faut résoudre l'identité de BEZOUT :

$$(A(z^{-1})S_1(z^{-1})S_p(z^{-1})B^{*+}(z^{-1}) + z^{-d-1}B^{*+}(z^{-1})B^-(z^{-1})R_1(z^{-1})R_p(z^{-1}))(z^{-(d+1)}T(z^{-1})B^{*-}(z^{-1})) = P(z^{-1})(z^{-(d+1)}T(z^{-1})B^{*-}(z^{-1})B^{*+}(z^{-1}))$$

Soit, après simplification :

$$A(z^{-1})S_1(z^{-1})S_p(z^{-1}) + z^{-d-1}B^{*-}(z^{-1})R_1(z^{-1})R_p(z^{-1}) = P(z^{-1})$$

Posons

$$R_1(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{n_r} z^{-n_r}$$

$$S_1(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{n_s} z^{-n_s}$$

R_1 et S_1 sont les inconnues du problème. L'existence et l'unicité de la solution est assurée si :

$$\text{degré}(P) \leq \text{degré}(A) + \text{degré}(S_p) + \text{degré}(B^{*-}) + \text{degré}(R_p) + d$$

$$\text{degré}(S_1) = \text{degré}(B^{*-}) + \text{degré}(R_p) + d$$

$$\text{degré}(R_1) = \text{degré}(A) + \text{degré}(S_p) - 1$$

$A.S_p$ et $B^{*-}.R_p$ sont premiers entre eux.



Commande linéaire avancée

Calcul du polynôme T

T permet de compenser la dynamique de régulation $P(z^{-1})$ de manière à pouvoir introduire la dynamique en asservissement. Enfin, il amène un gain unitaire.

$$\begin{cases} T(z^{-1}) = P(z^{-1}) \text{ si } B^{*-}(1) = 0 \\ T(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{B^{*-}(1)} \text{ si } B^{*-}(1) \neq 0 \end{cases}$$

Si $B^{*-}(1)$ est non nul, la transmittance entrée/sortie devient donc :

$$\frac{Y}{W} = \frac{B_{as}(z^{-1})}{A_{as}(z^{-1})} \frac{z^{-(d+1)} B^{*-}(z^{-1})}{B^{*-}(1)}$$

Et si tous les zéros sont stables et masqués :

$$\frac{Y}{W} = \frac{B_{as}(z^{-1})}{A_{as}(z^{-1})} z^{-(d+1)}$$



Commande linéaire avancée

Précontraintes et rejet de perturbations

Fixation de précontraintes :

Si nous désirons fixer des racines dans $S(z)$ soit $S(z)=S_1(z)S_2(z)$ avec $S_2(z)$ le polynôme faisant apparaître les racines imposées (en particulier une racine $z=1$ pour assurer une erreur statique nulle sur une perturbation de sortie additive), il faut résoudre l'équation de BEZOUT en remplaçant A par $A.S_2$ et S par S_1 .

Choix de la dynamique de rejet des perturbations avec simplification des zéros:

Les fonctions de transfert en régulation sont :

$$\frac{Y(z)}{d(z)} = \frac{B(z).S(z).z^{-d}}{A(z).S(z) + B(z).R(z).z^{-d}} \quad \frac{y(z)}{p(z)} = \frac{A(z).S(z)}{A(z).S(z) + B(z).R(z).z^{-d}}$$

Si les zéros sont simplifiables, lors de la définition de la fonction de transfert en asservissement nous posons:

$$\frac{z^{-d}.z^{-1}}{P(z)} = \frac{B(z).z^{-d}}{A(z).S(z) + B(z).R(z).z^{-d}} \quad \text{D'où} \quad z^{-1}(A(z).S(z) + z^{-d}.B(z).R(z)) = P(z).B(z)$$

L'équation de Bezout à résoudre dans ce cas est :

$$P(z) = A'(z).S'(z) + R(z).z^{-d}.z^{-1} \quad \text{avec} \quad S(z) = \frac{S'(z).B(z)}{z^{-1}}$$

$A'(z)$ contient le dénominateur du processus et la partie précaractérisée.(par défaut $1-z^{-1}$).



Commande linéaire avancée

Il vient $\frac{Y(z)}{p(z)} = \frac{A(z).S(z)}{P(z).B(z)} \cdot z^{-1}$ et $\frac{Y(z)}{d(z)} = \frac{S(z)}{P(z)} \cdot z^{-1-d}$ Eq1

En reportant $S'(z) = \frac{S(z).z^{-1}}{B(z)}$

dans l'équation Eq1 et en prenant la partie précaractérisée par défaut, nous obtenons :

$$\frac{Y(z)}{p(z)} = \frac{A'(z).S'(z)}{P(z)} = \frac{A(z).(1-z^{-1})S'(z)}{P(z)} \quad \text{et} \quad \frac{Y(z)}{d(z)} = \frac{B(z)S'(z)(1-z^{-1})}{P(z)} z^{-d}$$

Pour un retard nul $d=0$ nous obtenons :

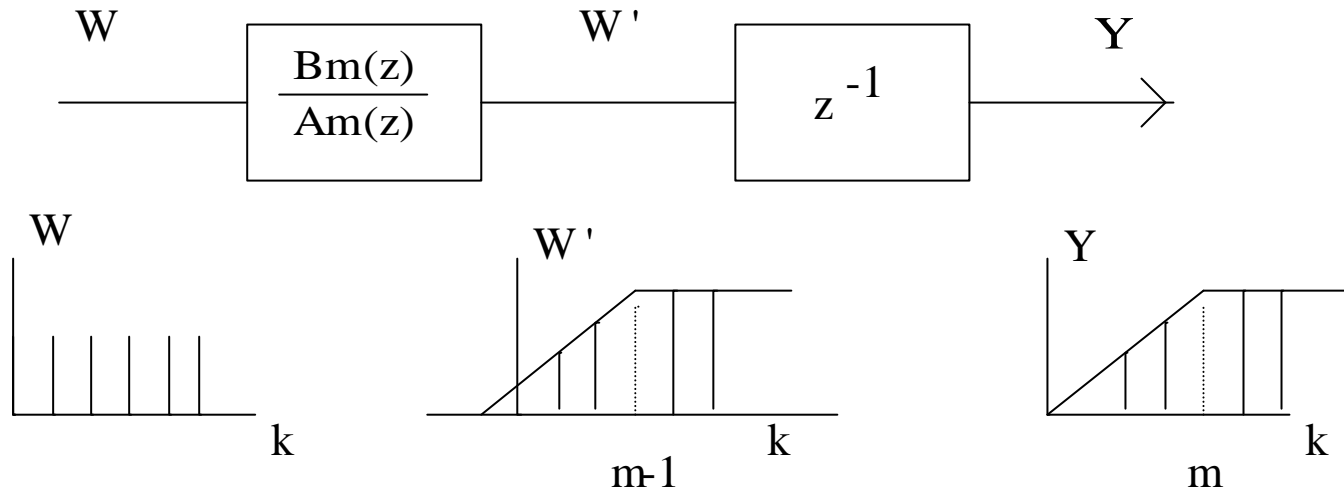
$$\deg(S')=0 \Rightarrow \frac{Y(z)}{p(z)} = \frac{A(z).(1-z^{-1})}{P(z)}$$

et $\frac{Y(z)}{d(z)} = \frac{B(z)(1-z^{-1})}{P(z)}$



Commande linéaire avancée

Calculez le filtre d'entrée de la manière suivante :



Choisissons une trajectoire Y en réponse à un échelon d'entrée W .

Prenons
$$Y(z) = \frac{1}{mT} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{(z-1)^2 z^m} \right] = \frac{1}{m} \frac{z}{(z-1)^2} \left(1 - \frac{1}{z^m} \right)$$

Soit
$$W'(z) = Y(z) \cdot z = \frac{1}{m} \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2} \left(1 - \frac{1}{z^m} \right) \quad \text{Et} \quad \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{1}{m} \frac{z}{z-1} \left(1 - \frac{1}{z^m} \right)$$

Donc
$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{1}{m} \frac{z}{z-1} \left(1 - \frac{1}{z^m} \right)$$



Commande linéaire avancée

Commande par retour d'état

Rappels sur la notion d'état

Le processus est décrit par un vecteur d'état X caractérisant l'information minimale nécessaire à un instant donné t_0 pour prédire son devenir connaissant l'évolution de son entrée u .

Soit un système discret S.I.S.O. décrit par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_d \cdot X_k + B_d \cdot U_k \\ Y_k = C_d \cdot X_k + D_d \cdot U_k \end{cases}$$

A_d est de dimension $n \times n$, B_d est de dimension $n \times 1$, C_d est de dimension $1 \times n$ et D_d est de dimension 1×1 .

Le système est propre si la sortie ne dépend pas explicitement de l'entrée : $D_d = 0$.

Le polynôme caractéristique du système est : $\Phi_{A_d}(z) = \det(zI - A_d) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$

Commandabilité

Un système linéaire discret S.I.S.O. est commandable si et seulement si on peut toujours définir une trajectoire de commande u_k en un nombre fini de périodes d'échantillonnage permettant de passer d'un vecteur d'état initial $X(k_0 T_{ech})$ à un vecteur d'état final $X(k_f T_{ech})$, quelques soient ces vecteurs.



Commande linéaire avancée

Le système est commandable si et seulement si :

$$W_{\text{com}} = [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d]$$

est de rang maximum (et donc n).



Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité est de trouver un changement de base W_c pour lequel le système puisse être représenté par le triplet $(\tilde{A}_d, \tilde{B}_d, \tilde{C}_d)$ avec :

$$\tilde{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Décomposition selon la commandabilité

Lorsque le système n'est pas entièrement commandable, on peut trouver une transformation W telle que $\tilde{A}_d = W A_d W^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ et $\tilde{B}_d = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et telle que le sous-système A_{11}, B_1 soit commandable.

Le système est stabilisable si ses parties instables sont commandables.



Commande linéaire avancée

Calcul de la matrice de changement de base W_c (algorithme de Leverrier)

Soient $\tilde{A}_d, \tilde{B}_d, \tilde{C}_d$ les matrices dans l'espace canonique et A_d, B_d, C_d les matrices dans l'espace initial.

Notons $W_c = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ la matrice de changement de base vers l'espace canonique de commandabilité.

Nous avons : $W_c \tilde{B}_d = B_d$ et $W_c \tilde{A}_d = A_d W_c$

Soit en reportant l'expression des matrices dans l'espace canonique :

$$w_n = B_d$$

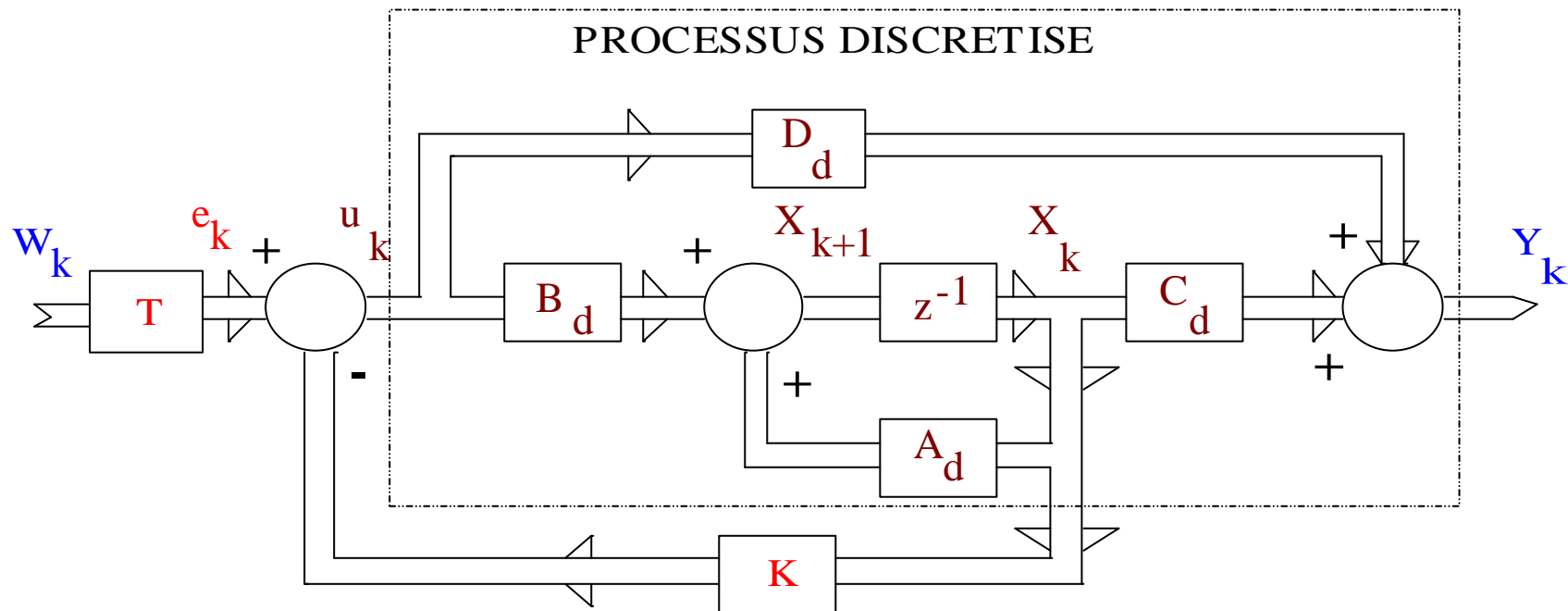
et

$$\begin{cases} w_{n-1} = A_d w_n + a_{n-1} w_n \\ w_{n-2} = A_d w_{n-1} + a_{n-2} w_n \\ \dots \\ w_1 = A_d w_2 + a_1 w_n \end{cases}$$



Commande linéaire avancée

Commande par retour d'état



Le vecteur d'entrée est donné par : $u_k = T.w_k - K.X_k$

Sans nuire à la généralité de l'exposé, le système est supposé propre : les sorties ne dépendent pas explicitement des entrées. Donc la matrice D_d est nulle.



Commande linéaire avancée

Principe

La synthèse du correcteur se fait par placement de pôles. Le système corrigé doit présenter les pôles z_1, \dots, z_n fixés par le cahier des charges.

Le polynôme caractéristique devra donc être :

$$\Phi(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 z + \dots + \mathbf{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad \text{Eq2}$$

Or le système en boucle fermée présente le polynôme caractéristique :

$$\Phi(z) = \det(zI - (A_d - B_d K))$$

Il suffit d'identifier les deux équations précédentes.

Calcul du retour d'état dans la forme canonique de commandabilité

La matrice d'état A_d est transformée sous sa forme canonique de commandabilité par le changement de base W_c .

$$\tilde{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Commande linéaire avancée

Notons $K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$

Soit Φ_{A_d} le polynôme caractéristique de processus discrétisé :

$$\Phi_{A_d}(z) = \det(zI - \tilde{A}_d) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$$

Celui du système corrigé devient (et il est invariant par changement de base) :

$$\Phi(z) = \det(zI - (\tilde{A}_d - \tilde{B}_d \tilde{K})) = z^n + (a_{n-1} + k_{n-1})z^{n-1} + \dots + (a_0 + k_0) \quad \text{Eq3}$$

En identifiant Eq2 et Eq3, on obtient le retour d'état :

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_0 \ \dots \ \tilde{k}_{n-1}] \text{ avec } \tilde{k}_i = \mathbf{a}_i - a_i$$



Commande linéaire avancée

Calcul du retour d'état dans la base initiale

W_c caractérise la transformation de l'espace initial vers la forme canonique de commandabilité.

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = W_c^{-1} A_d W_c \cdot \tilde{X}_k + W_c^{-1} B_d \cdot U_k \\ Y_k = C_d \cdot W_c \tilde{X}_k \end{cases}$$

W_c peut être évaluée à l'aide de l'algorithme de Leverrier.

Pour revenir dans l'espace de départ, il suffit d'utiliser le changement de base inverse W_c^{-1} .

$$K = \tilde{K} \cdot W_c^{-1}$$

En effet

$$\begin{cases} X_k = W_c \tilde{X}_k \\ u_k = e_k - K X_k \end{cases} \Rightarrow u_k = e_k - K W_c \tilde{X}_k = e_k - \tilde{K} \tilde{X}_k \Rightarrow K = \tilde{K} W_c^{-1}$$



Commande linéaire avancée

Calcul du filtre T en entrée dans le cas monovariante

La matrice de gain K apporte la dynamique en boucle fermée. Le filtre en entrée permet de donner au système corrigé un gain unitaire.

La fonction de transfert du système corrigé est :

$$F_{BF}(z) = C_d [zI - (A_d - B_d K)]^{-1} B_d$$

et présente un gain :

$$F_{BF}(1) = C_d [I - (A_d - B_d K)]^{-1} B_d$$

Pour obtenir un gain unitaire, il suffit de choisir T (constante scalaire) telle que :

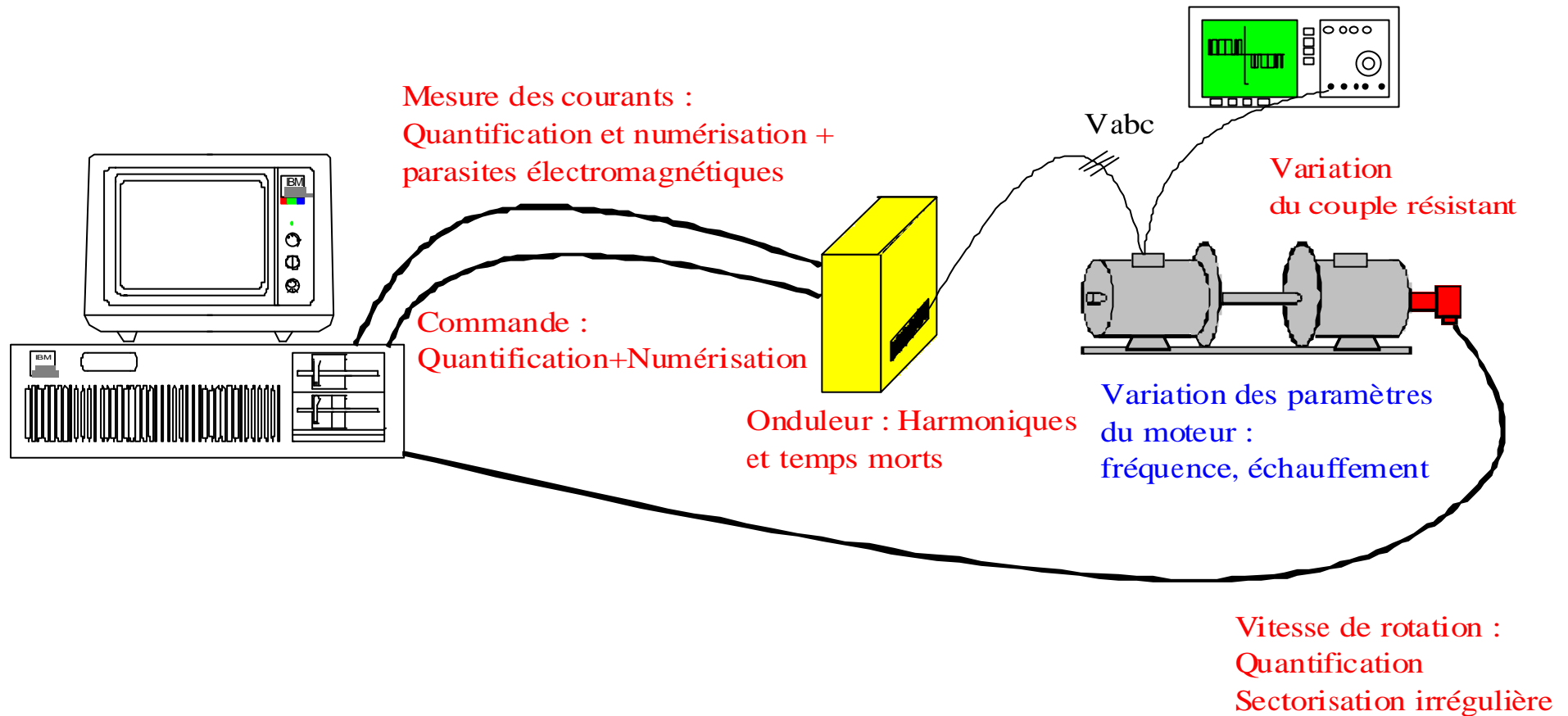
$$T = \frac{1}{C_d [I - (A_d - B_d K)]^{-1} B_d}$$



Commande linéaire avancée

Commande robuste H infinie

Bruit et variation de modèle





Commande linéaire avancée

Bruits :

- quantification + numérisation,
- susceptibilité électromagnétique des capteurs de courant et de tension,
- sectorisation du capteur de vitesse et de position, influence de l'accélération,
- influence de la modulation de largeurs d'impulsions implantée sur l'onduleur.

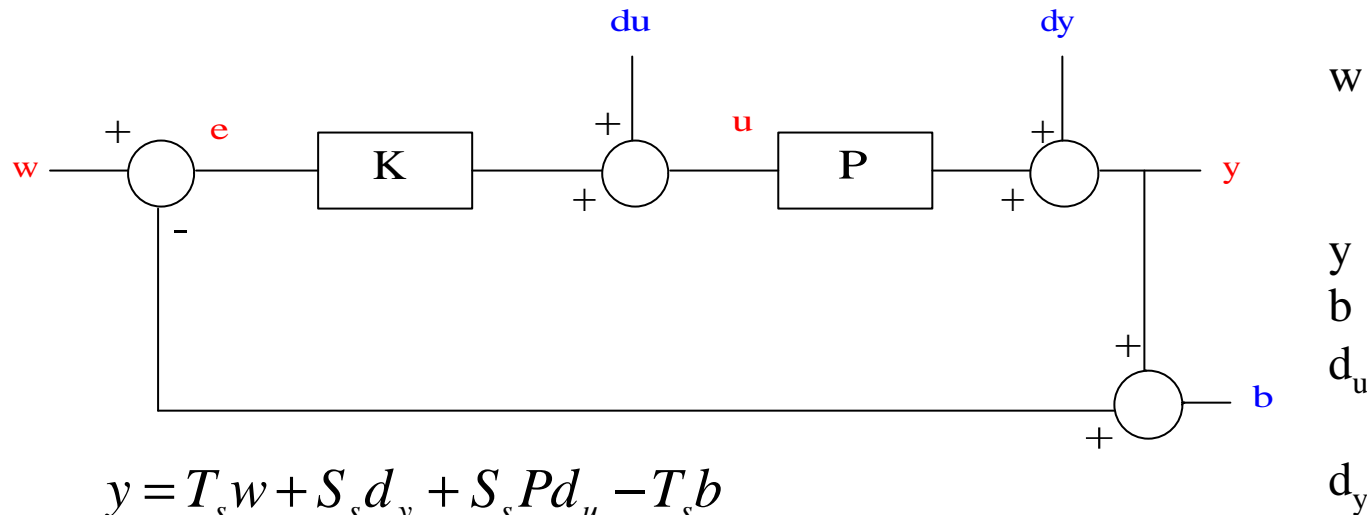
Variation de modèle :

- Variation des résistances rotoriques et statoriques, des inductances cycliques due à la température et à l'effet de peau.



Commande linéaire avancée

Mise en équation d'un système



w entrée supposée nulle pour étudier la régulation

y sortie

b bruits de mesure

d_u perturbations

agissant sur l'entrée

d_y perturbations

agissant sur la sortie

$$y = T_s w + S_s d_y + S_s P d_u - T_s b$$

$$u = S_e K w + S_e d_u - S_e K (b + d_y)$$

avec :

$L_e = KP$ matrice de transfert de la boucle ouverte en entrée

$L_s = PK$ matrice de transfert de la boucle ouverte en sortie

et, pour $i=e$ ou s , nous construisons :

$S_i = (1 + L_i)^{-1}$ matrice de sensibilité en entrée ou en sortie

$T_i = (1 + L_i)^{-1} L_i$ matrice de sensibilité complémentaire en entrée ou en sortie

Nous avons $S_i + T_i = 1$



Commande linéaire avancée

Définition de la norme H infinie

On note l'espace H^∞ des fonctions de la variable complexe analytiques et bornées dans le demi-plan droit ouvert $\text{Re}(s) > 0$

Cet espace est muni d'une norme :

$$\|G\|_\infty = \sup\{\mathbf{s}_M(G(s)) : \text{Re}(s) > 0\}$$

avec

$$\mathbf{s}_M(A) = \sqrt{\max(\mathbf{I}_i)} \text{ et } \mathbf{s}_m(A) = \sqrt{\min(\mathbf{I}_i)} \text{ avec } \mathbf{I}_i \text{ valeur propre de } AA^*$$

Soit \mathbf{R} l'ensemble des systèmes représentés par une fonction ou matrice de transfert G sous forme de fraction rationnelle:

G de \mathbf{R} appartient à H^∞ si et seulement si

- G n'a pas de pôles dans le demi-plan droit
- G est propre c'est-à-dire bornée à l'infini $\mathbf{s}_M(G(\infty)) < \infty$

Notons $\mathbf{RH}^\infty = \mathbf{R} \cap H^\infty$

Si G appartient à \mathbf{RH}^∞ alors

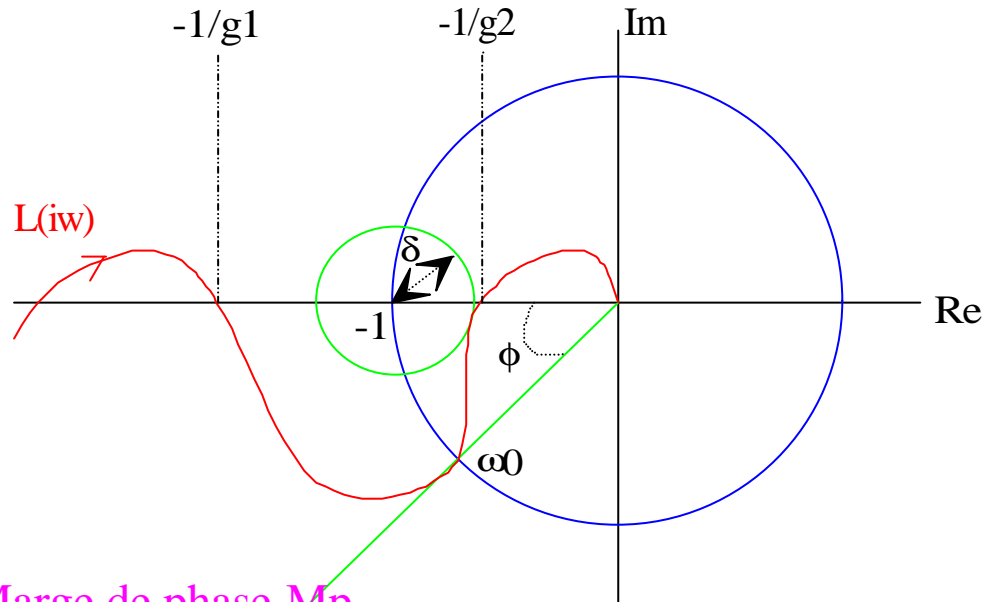
$$\|G\|_\infty = \sup\{\mathbf{s}_M(G(iw)) : w \in]-\infty, +\infty[\}$$

Dans le cas monovarié $\|G\|_\infty$ représente le maximum du gain atteint par $G(i\omega)$ dans le lieu de Bode



Commande linéaire avancée

Approche de la robustesse pour les systèmes linéaires monovariables



Nous supposons le système bouclé nominal stable.

Marge de gain M_g

On note $M_g =]g_1, g_2[$

Pour tout g appartenant à M_g , K stabilise gP .

Marge de phase M_p

La marge de retard de phase M_{rp} est définie par :

$$f = \min \{ f_i / \arg(L(i\omega_0)) = p + f_i \text{ et } |L(i\omega_0)| = 1 \}$$

Pour tout angle γ tel que $0 < \gamma < \Phi$, K stabilise $e^{-i\gamma}P$

La marge d'avance de phase M_{ap} est définie par :

$$f = \min \{ f_i / \arg(L(i\omega_0)) = p - f_i \text{ et } |L(i\omega_0)| = 1 \}$$

Pour tout angle γ tel que $0 < \gamma < \Phi$, K stabilise $e^{i\gamma}P$



Commande linéaire avancée

Marge de retard M_r

M_r est la borne supérieure des retards τ tels que K stabilise le processus P retardé de τ :

$M_r = \min \left\{ \frac{f_i}{w_i} \right\}$. Cette marge de retard permet de représenter les dynamiques négligées si celles-ci ont des pôles non oscillants : $\tilde{P}(i\omega) \approx P(i\omega)e^{-i\omega\tau}$

Marge de module M_m

La marge de module M_m , notée δ sur le schéma, est la distance du point -1 au lieu de Nyquist.

$$M_m = \inf \left\{ |1 + L(i\omega)| : \omega \in]-\infty, +\infty[\right\} = \frac{1}{\|S\|_\infty}$$

Elle traduit la robustesse du système en boucle fermée vis à vis des erreurs de modèle

Marge de module complémentaire M_{mc}

M_{mc} est la borne inférieure des quantités $1/\lambda$ telles que le lieu de Nyquist reste extérieur aux cercles de centre $-\frac{I^2}{I^2 - 1}$ et de rayon $\frac{I}{|I^2 - 1|}$ définissant dans le plan de Nyquist le facteur de

résonance de la fonction de sensibilité complémentaire : $M_{mc} = \frac{1}{\|T\|_\infty}$



Commande linéaire avancée

$$]1 - M_{mc}, 1 + M_{mc}[\subset M_g \text{ et } M_p \geq 2 \arcsin(M_{mc} / 2)$$

avec $M_p = M_{rp}$ ou M_{ap}

Représentation des incertitudes

Des erreurs de modélisation peuvent affecter le comportement du système. Les méthodes robustes prennent en compte ces incertitudes dans la synthèse des correcteurs.

Soit P un ensemble de systèmes comprenant le système nominal. P intègre les incertitudes ou variation du modèle.

Ces incertitudes peuvent être structurées ou non structurées.

incertitudes structurées : exemple

Soit $P_{nominal} = \frac{1}{1 + ts}$. Mais τ peut varier entre τ_{min} et τ_{max} .

On définit $P = \left\{ \frac{1}{1 + ts} : t_{min} < t < t_{max} \right\}$. Ce type d'incertitudes est utilisé en μ -synthèse.



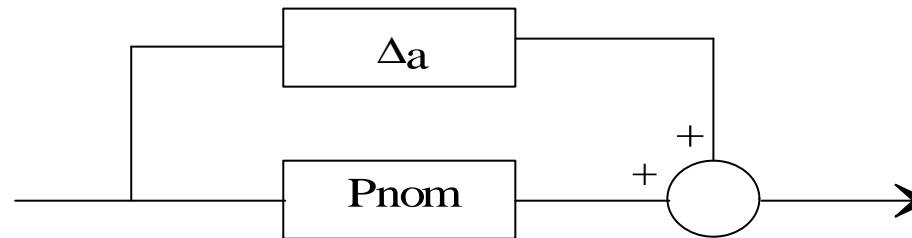
Commande linéaire avancée

incertitudes non structurées

Elles sont utilisées dans les méthodes H^∞ .

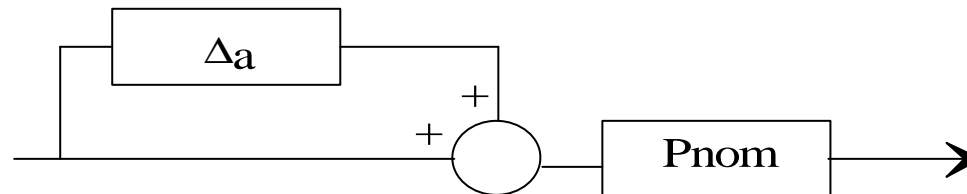
incertitudes additives :

$$P(j\omega) = P_{nom}(j\omega) + \Delta_a(j\omega) \text{ avec } \|\Delta_a(j\omega)\|_\infty < d_a(\omega) \forall \omega$$



incertitudes multiplicatives :

$$P(j\omega) = P_{nom}(j\omega)(1 + \Delta_m(j\omega)) \text{ avec } \|\Delta_m(j\omega)\|_\infty < d_m(\omega) \forall \omega$$



Ces incertitudes peuvent prendre en compte les dynamiques négligées, certaines non linéarités et les erreurs de modélisation.



Commande linéaire avancée

Fonctions de pondération

Supposons les incertitudes modélisées sous forme multiplicative.

$$\Delta_m(j\omega) = (1 + \Delta(j\omega)W_T(j\omega)) \text{ avec } \|\Delta(j\omega)\| < 1$$

$\|W_T(j\omega)\|_\infty$ représente la norme des incertitudes tolérées.

Pour la clarté de l'exposé, nous supposons par la suite, le système monovarié. Mais la méthode H_∞ s'applique aux systèmes multivariables.



Commande linéaire avancée

Principe de la méthode

Rappelons que : $S = \frac{y}{d_y} = -\frac{e}{d_y} = \frac{e}{r}$ et $T = -\frac{y}{b} = -\frac{d_u}{u} = \frac{y}{w}$

Donc S représente l'influence des perturbations sur l'erreur e et T l'influence du bruit de mesure sur la sortie.

Lors de la synthèse des correcteurs, deux objectifs doivent être atteints :

- ① Rendre S le plus faible possible pour réduire l'influence des perturbations
- ② Rendre T le plus faible possible pour réduire l'influence des bruits de mesure

Or $S+T=1$. Donc il faut rendre S et T faibles dans des plages de fréquences différentes.



Commande linéaire avancée

Stabilité robuste

Rechercher la robustesse vis-à-vis des incertitudes du modèle revient à maintenir la stabilité du système en boucle fermée malgré la présence des perturbations et des erreurs de modèle.

Cela revient à donner l'atténuation de $T(j\omega)$. A basse fréquence $|T(j\omega)|$ tend vers 1

Spécifier une fonction de transfert de type passe-haut $W_T(s)$ représentant la norme des incertitudes multiplicatives que le système doit tolérer

$$\|W_T T_{nom}\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |T_{nom}(j\omega)| < \frac{1}{|W_T(j\omega)|}$$

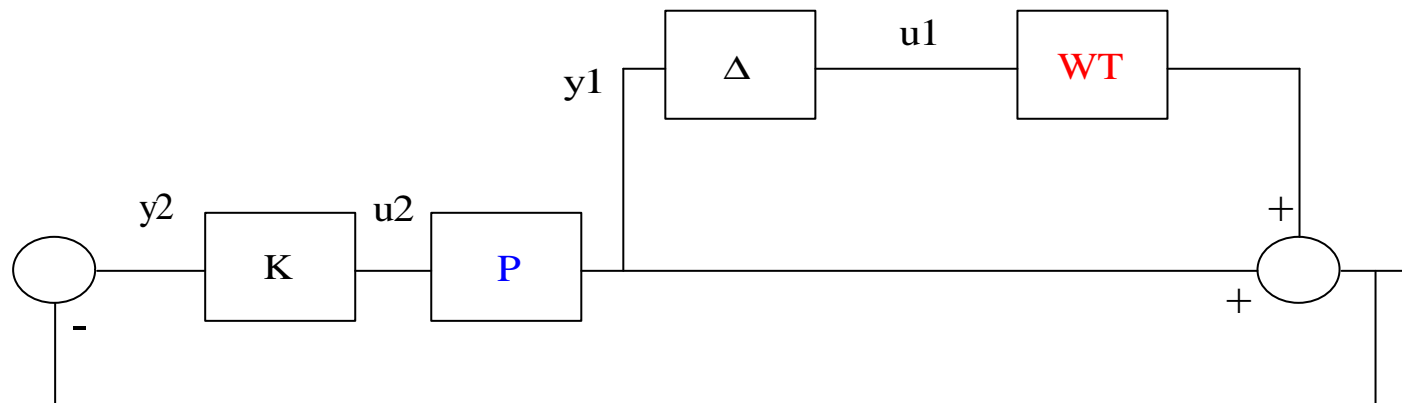
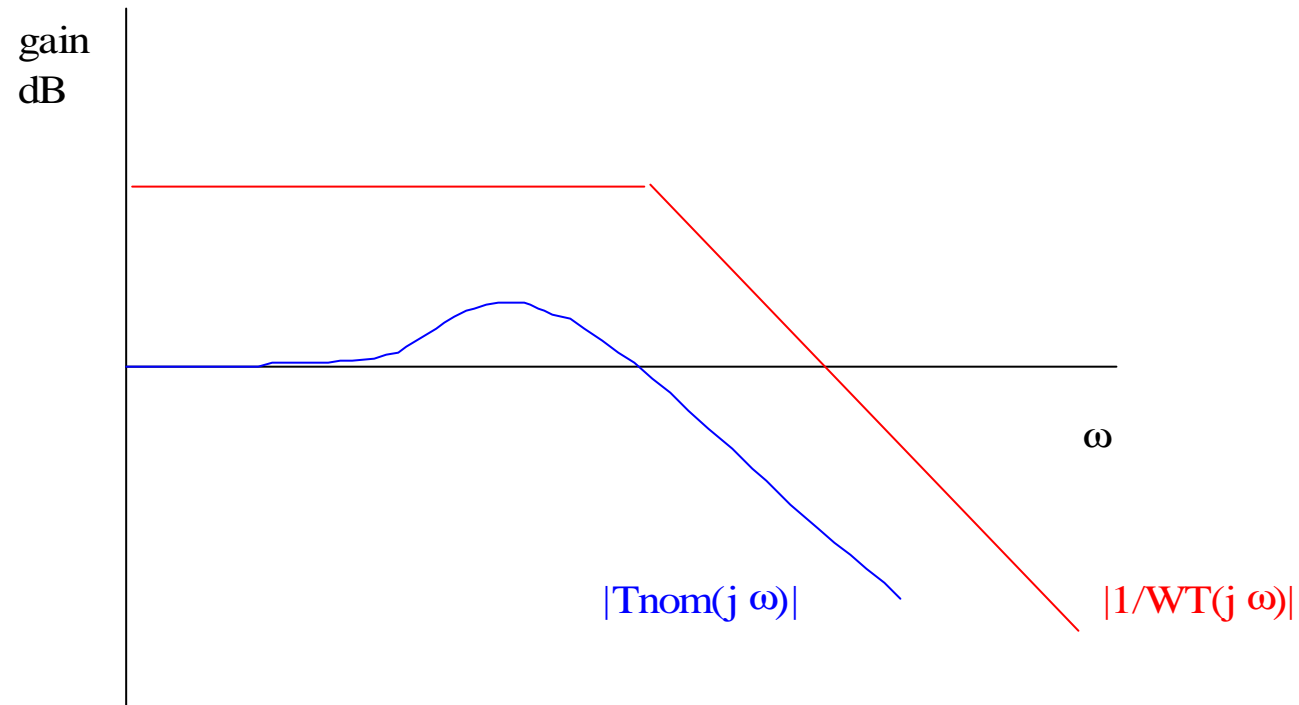


Schéma de régulation avec erreur de modèle en sortie



Commande linéaire avancée



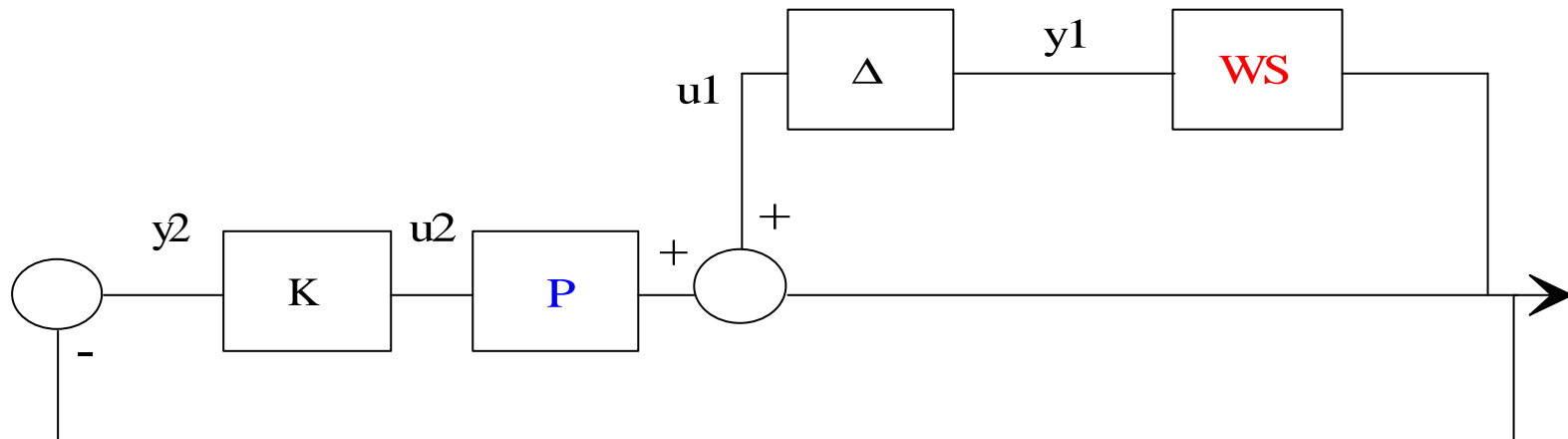


Commande linéaire avancée

Performance nominale

Les performances du système nominal sont évaluées en fonction de l'erreur $e=w-y$. Or $S=e/w$. Donc rechercher la performance nominale du système revient à fixer l'atténuation de $|S(j\omega)|$ en fonction de la fréquence.

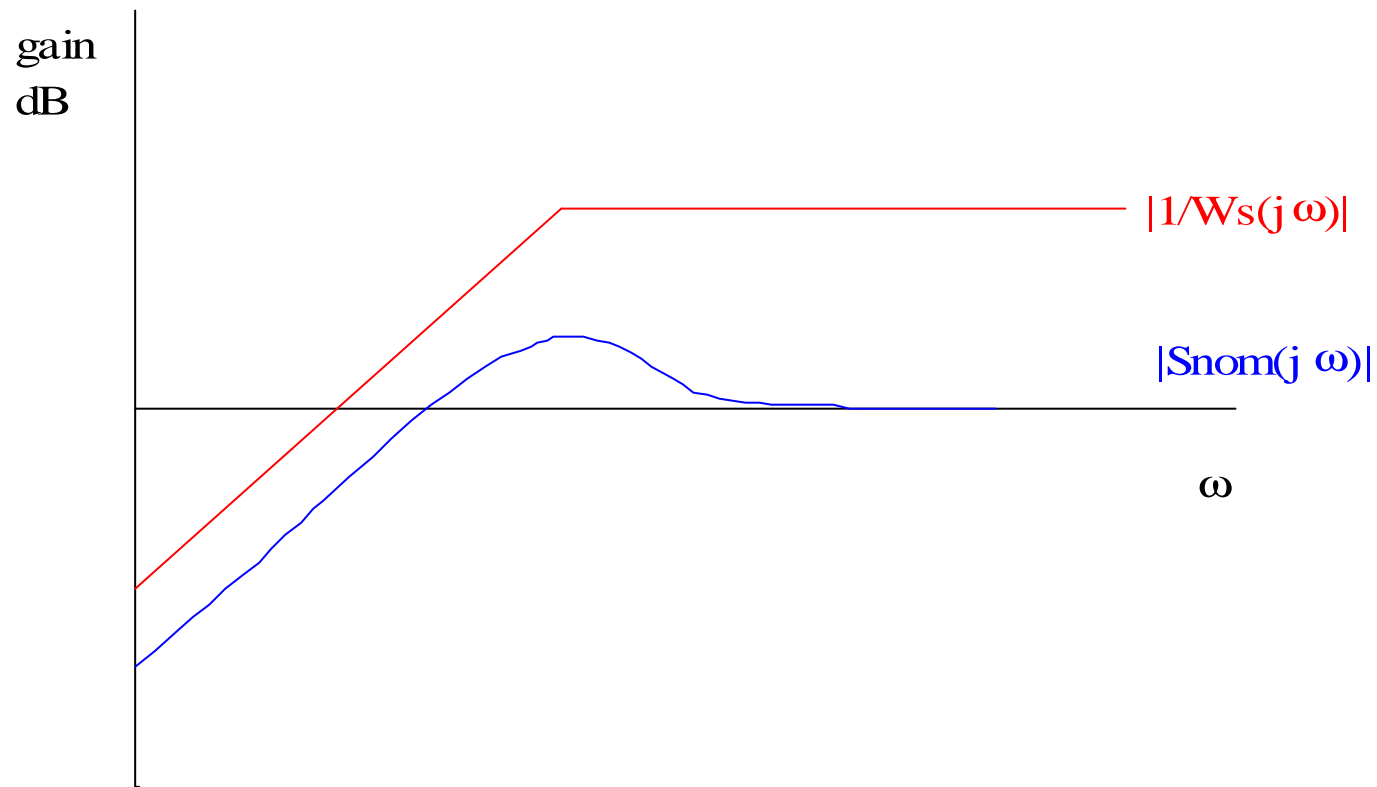
$$\|W_S S_{nom}\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |S_{nom}(j\omega)| < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}$$



Système bouclé perturbé associé au problème
de rejet de perturbation sur la sortie



Commande linéaire avancée





Commande linéaire avancée

Calcul des fonctions de pondération

Par le domaine d'incertitude :

Choix de W_T

A une fréquence donnée ω , W_T représente le pourcentage d'incertitude du modèle à cette fréquence.

Fixer un coefficient d'incertitude faible à basse fréquence (<1) et élevé à haute fréquence.

Vous pouvez choisir une fonction de transfert du type $G_T \frac{T_1 \cdot s + 1}{T_2 \cdot s + 1}$ d'où

$$\|W_T(\mathbf{w})\| = G_T \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \mathbf{w}^2}}{\sqrt{1 + T_2^2 \mathbf{w}^2}}$$

G_T , T_1 et T_2 sont choisis pour permettre :

- une incertitude G_1 à basse fréquence : $G_1 = G_T$
- une incertitude G_2 pour une pulsation nominale ω_T donnée

$$G_2 = G_T \frac{\sqrt{1 + T_1^2 \mathbf{w}_T^2}}{\sqrt{1 + T_2^2 \mathbf{w}_T^2}}$$



Commande linéaire avancée

Choix de W_s

W_s permet de fixer les performances du système et assure le rejet des perturbations de sortie.
Fixer le facteur de rejet $k_f \ll 1$ des perturbations à basse fréquence.

Vous pouvez choisir une fonction de transfert du type $\frac{1}{k_f} \frac{T_3 \cdot s + 1}{T_4 \cdot s + 1}$.

T_3 et T_4 sont déterminés en fixant le rejet des perturbations pour une fréquence donnée ω_s .

Il faut, bien sûr, respecter la condition : $\frac{1}{|W_s(j\omega)|} + \frac{1}{|W_T(j\omega)|} > 1$ pour respecter $S+T=1$

Par un modèle

Choisir une fonction de transfert modèle $J(s)$ pour le système en boucle fermée :

$$T_j(s) = J(s) \text{ et } S_j(s) = 1 - T_j(s)$$

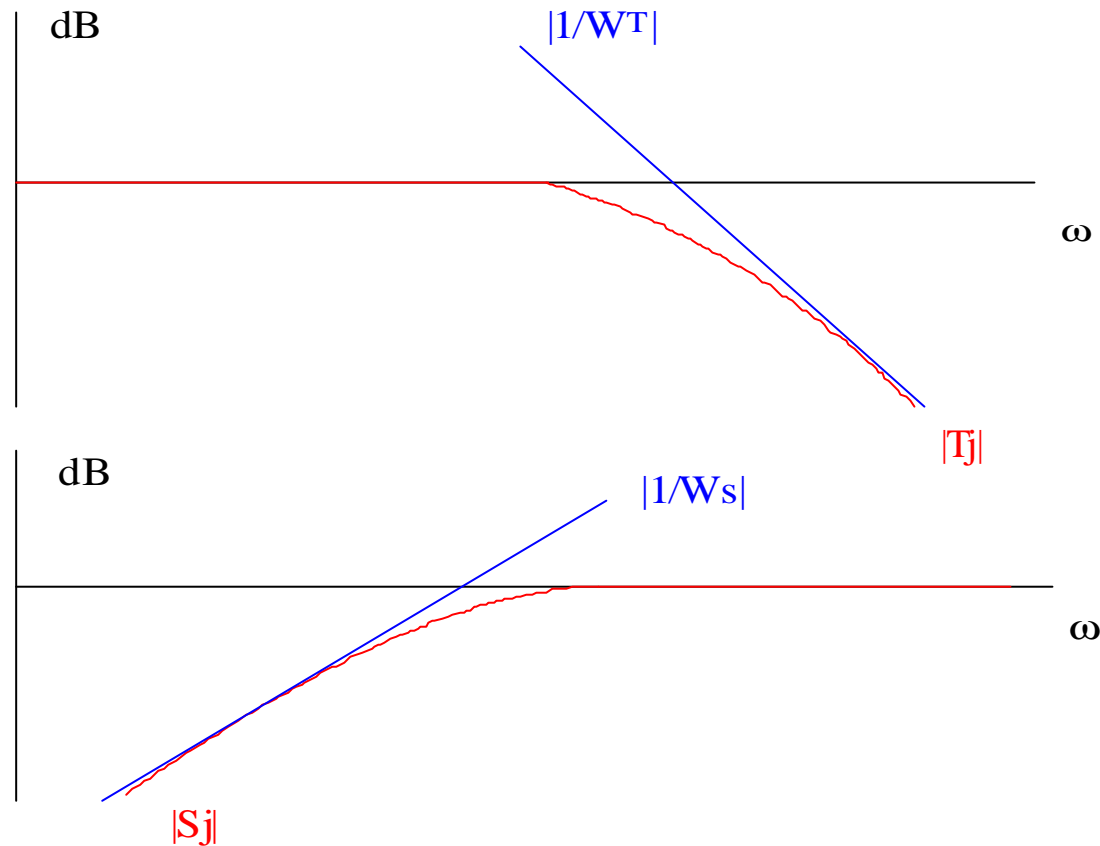
Choisir pour $W_T(s)$ la droite asymptotique à T_j à haute fréquence et pour W_s la droite asymptotique à S à basse fréquence.

Il peut être nécessaire de relâcher un peu les contraintes pour respecter la condition :

$$\frac{1}{|W_s(j\omega)|} + \frac{1}{|W_T(j\omega)|} > 1$$



Commande linéaire avancée



Calcul du correcteur

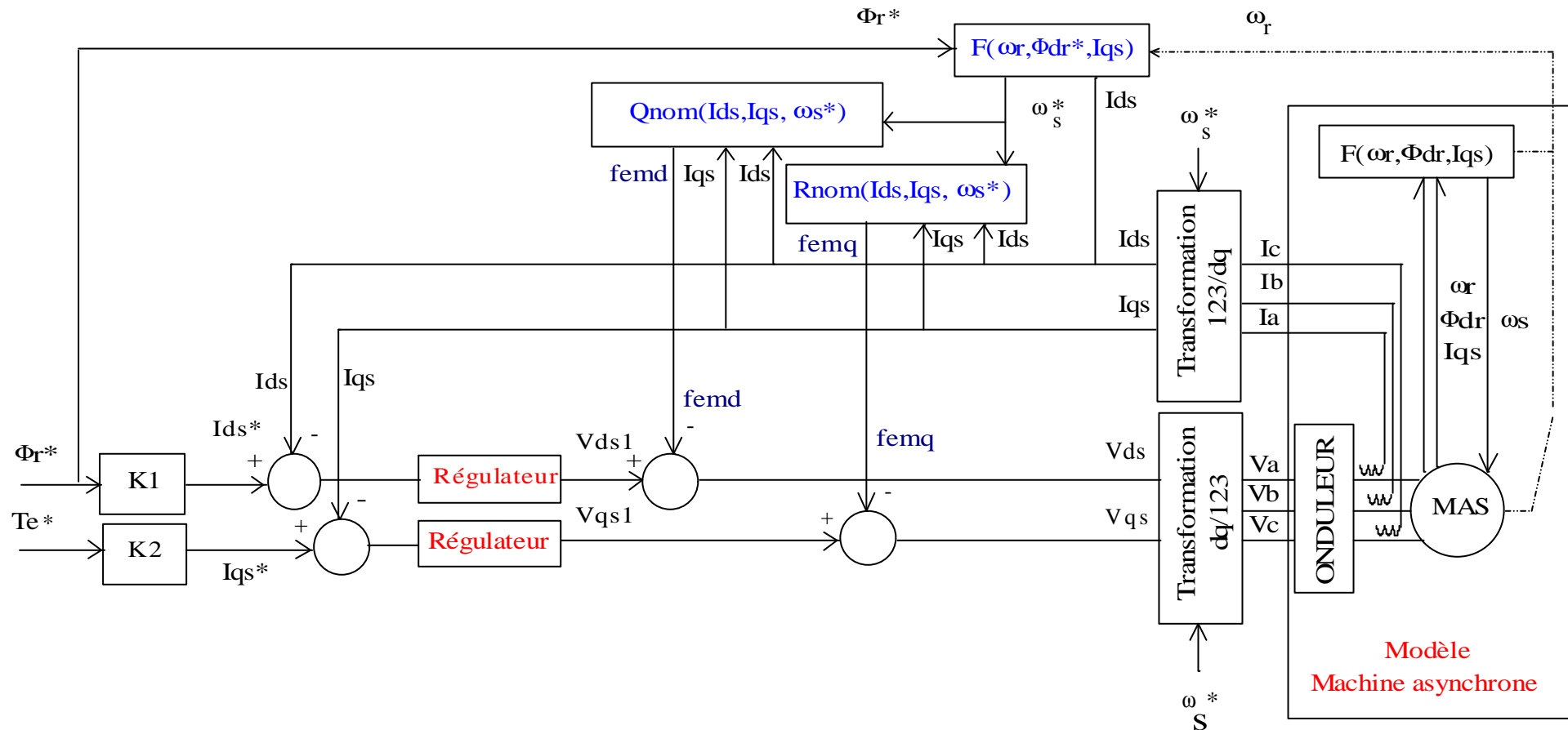
Le calcul du correcteur est un problème d'optimisation :

$$\|W_T T_{nom}\|_{\infty} < 1 \quad \text{et} \quad \|W_S S_{nom}\|_{\infty} < 1$$



Commande linéaire avancée

Exemple :





Commande linéaire avancée

Equation du processus :

$$P(s) = \frac{I_{ds}}{V_{ds1}} = \frac{I_{qs}}{V_{qs}} = \frac{L_r T_r}{s L_s L_r T_r s + R_s L_r T_r + L_m^2}$$

Fonctions de pondération

$$W_s(T) = \frac{2.2 \cdot 10^{-5} s + 75}{s + 1} \text{ et } W_T(s) = \frac{25s + 5000}{0.5s + 10000}$$

W_s permet un rejet des perturbations sur la sortie de 1 pour 75 à basse fréquence.

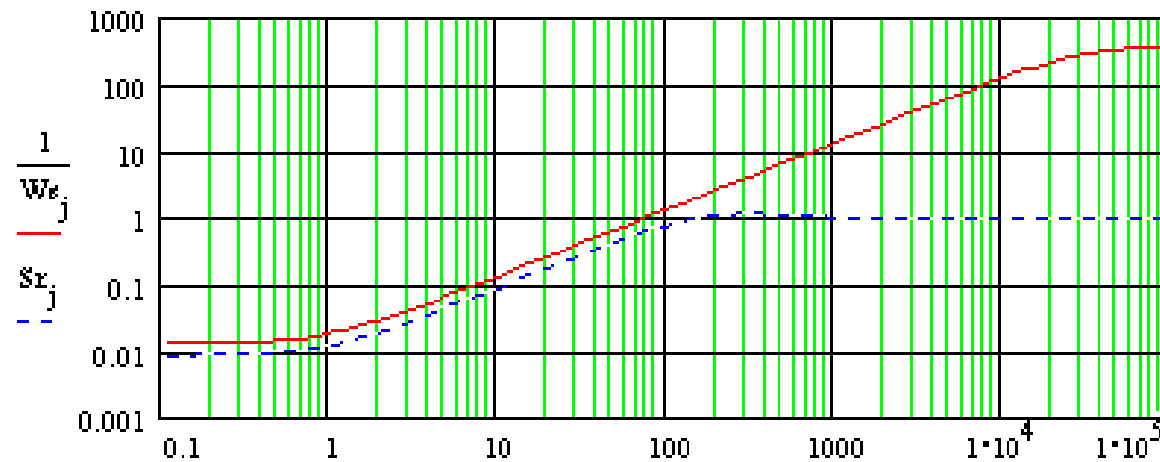
W_T permet une erreur de modèle de 50% aux basses fréquences et de plus de 100% aux hautes fréquences.

Correcteur

$$C(s) = \frac{249,3s^2 + 5,05 \cdot 10^6 s + 1,32 \cdot 10^9}{s^3 + 3464 s^2 + 1,45 \cdot 10^6 s + 1,446 \cdot 10^6}$$

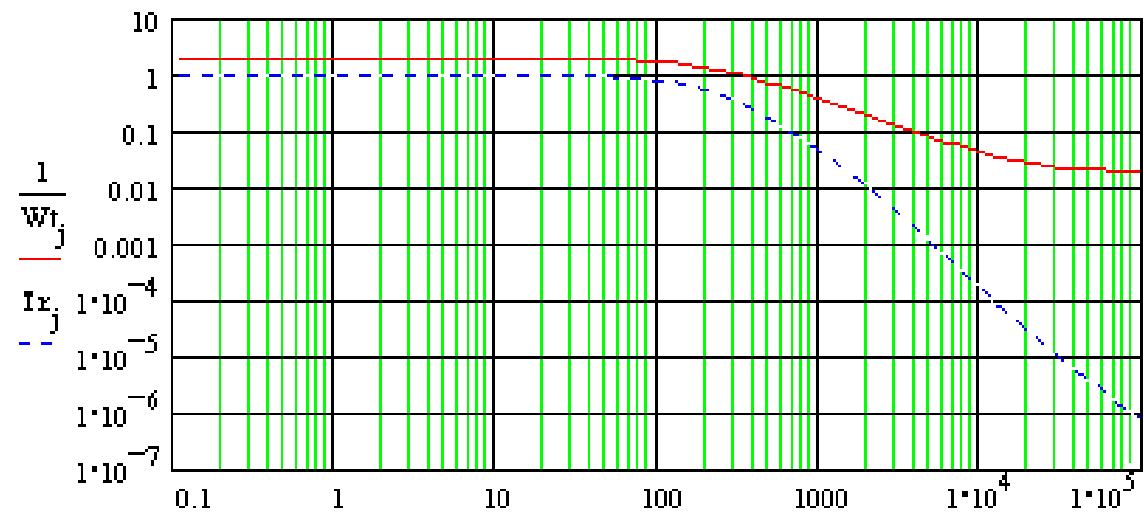


Commande linéaire avancée



Fonction de sensibilité
et W_s

Fonction de sensibilité
complémentaire et W_T





Commande linéaire avancée

Fin du chapitre