

Automatique linéaire échantillonnée

Gonzalo Cabodevila

gonzalo.cabodevila@femto-st.fr

TDs : G. Cabodevila, D. Chappe, A. Janex, B. Lang

1^{ère} année
Semestre jaune
AUT1 - Automatique



**École Nationale Supérieure de
Mécanique et des Microtechniques
26, chemin de l'Épitaphe
25030 Besançon cedex – FRANCE
<http://intranet-tice.ens2m.fr>**

Préface

Le choix de l'enseignement de l'automatique échantillonnée dès la première année se fonde sur la constatation que la majorité d'entre vous ont acquis les bases de l'automatique linéaire continue pendant les classes préparatoires. Celles et ceux pour qui cette hypothèse est fausse auront un peu de travail personnel supplémentaire à fournir. Les enseignants sont là pour vous aider, n'hésitez pas à poser des questions. Par ailleurs, la bibliothèque possède quelques ouvrages de qualité tels que [1] et [2] sans oublier les techniques de l'ingénieur, accessibles en ligne au sein de l'école.

Ce polycopié¹ n'est guère qu'un document vous épargnant la recopie de formules, la présence en cours est indispensable. Enfin, je ne saurais que trop vous conseiller de lire d'autres ouvrages traitant du même sujet, notamment [3], [4], [5] ou [6] (vous noterez une étrange ressemblance avec ce dernier ouvrage, c'était mon prof!). Il existe aussi quelques ouvrages au format PDF disponibles gratuitement sur internet ([7], [8], [9], [10], [11]) que je vous conseille vivement de télécharger afin d'avoir une deuxième version des faits.

Le cours est organisé sous la forme de 6 leçons aussi indépendantes que possible. Des rappels des notions utiles pour la compréhension de la leçon seront faits au début de chaque séance, néanmoins une relecture des notes de cours (15mn) est indispensable.

L'homme de science le sait bien, lui, que seule la science, a pu, au fil des siècles, lui apporter l'horloge pointeuse et le parcmètre automatique sans lesquels il n'est pas de bonheur terrestre possible.

Pierre Desproges
Extrait de Vivons heureux en attendant la mort

Peut-on, dans la vie, triper sur quoi que ce soit, sans se faire un peu chier pour l'apprendre ?

Pierre Foglia

1. Ce cours est rédigé avec L^AT_EX, les transparents sont faits avec L^AT_EX et le package Beamer. Les courbes sont le plus souvent tracées avec Matlab © et les dessins sont fait avec Draw de Open Office, Inkscape, les packages PGF et TIKZ ou Matlab.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Définition	9
1.2	Exemples d'asservissements	9
1.2.1	Historique	9
1.3	Mise en œuvre des asservissements numériques	13
1.3.1	Technologie des asservissements	14
1.4	Echantillonnage et quantification	17
1.4.1	Le bruit de quantification	17
1.5	Période d'échantillonnage	17
1.5.1	Le problème de la période d'échantillonnage	17
1.5.2	Le recouvrement de spectre avec les mains	18
1.5.3	Choix de la période d'échantillonnage	21
2	Transformée en z	25
2.1	Définition de la transformée en z	25
2.2	Propriétés de la transformée en z	26
2.3	Calcul de la transformée en z	28
2.3.1	Par la formule de définition	28
2.3.2	Par la théorie des résidus	28
2.3.3	Par l'utilisation des tables	28
2.4	Transformée inverse	30
2.4.1	Théorie des résidus	30
2.4.2	Par division polynomiale	30
2.4.3	Par l'utilisation des tables	31
2.5	Transmittances échantillonnées	32
2.5.1	Notions de schéma bloc	32
2.5.2	Transformée en z d'un schéma bloc	33
2.5.3	Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0	33
2.5.4	Transmittances échantillonnées de systèmes bouclés	34
2.5.5	Avec Matlab	35
3	Analyse des systèmes	37
3.1	Stabilité	37
3.1.1	Conditions de stabilité	37
3.1.2	Critère de Jury	39
3.1.3	Critère de Routh-Hurwitz appliqué sur la transformée en w	40
3.1.4	Avec Matlab	40
3.2	Correspondance des plans z et p	41
3.3	Le lieu d'Evans	44
3.3.1	Définition	44
3.3.2	Exemples	44
3.4	Précision des systèmes échantillonnés	47
3.4.1	Erreur vis-à-vis de la consigne	47
3.4.2	Erreur vis-à-vis de la perturbation	48
3.4.3	Extension du raisonnement à tous types d'entrées	48
3.4.4	Cycle limite	51

4	Transposition des correcteurs analogiques	53
4.1	Les différentes approximations de la dérivée	53
4.1.1	Différences vers l'arrière	53
4.1.2	Différences vers l'avant	54
4.1.3	Transformation bilinéaire	55
4.1.4	Avec Matlab	55
4.2	PID analogique	57
4.2.1	Réglages de Ziegler-Nichols	57
4.2.2	P, PI, ou PID ?	58
4.3	Le PID numérique	59
4.3.1	Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré	61
4.4	Mise en œuvre d'un asservissement	62
4.4.1	Anti-windup	62
4.4.2	Prédicteur de Smith	63
4.4.3	Algorithme	65
5	Synthèses à temps d'établissement fini	67
5.1	Synthèse en z de correcteurs	67
5.1.1	Exemple idiot... mais riche d'enseignements	67
5.2	Synthèses à temps d'établissement fini	69
5.2.1	Synthèse à temps d'établissement minimal absolu	70
5.2.2	Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu	70
5.2.3	Réponse pile	72
5.2.4	Applications des synthèses à temps d'établissement fini	73
5.2.5	Exemples de réponse pile	74
5.3	Résolution de l'équation diophantienne	75
6	Méthodes de commande avancées	79
6.1	Choix des pôles en boucle fermée	79
6.2	Méthode de Zdan	81
6.2.1	Principe	81
6.2.2	Correcteur de Zdan	81
6.3	Commande RST	84
6.3.1	Synthèse de la loi de commande RST	85
6.3.2	Choix des polynômes A_m , B_m et A_0	86
6.3.3	Cas particuliers du correcteur RST	86
	Bibliographie	87
I	Annexes	91
A	Tables de transformées	93
B	Travaux dirigés	97
B.1	TD 1 : Etude d'un cheptel	98
B.2	TD 2 : Etude d'un four électrique	99
B.3	TD 3 : Synthèses quasi continu	100
B.3.1	Correcteur de type Ziegler-Nichols	100
B.3.2	Correcteur de type Takahashi	101
B.3.3	Implantation sous Matlab-Simulink	101
B.3.4	Anti-windup	101
B.4	TD 4 : Comparaison des synthèses à temps d'établissement fini	102
B.5	TD 5 : Méthode de Zdan	103
B.6	TD 6 Correcteur RST	104
B.7	TD 7 Asservissement de position d'une machine à courant continu	106
B.7.1	Boucle de courant	106
B.7.2	Boucle de vitesse	107
B.7.3	Boucle de position	107
B.7.4	Equation récurrente du correcteur	107

C Tutorial Matlab	111
Tutorial Matlab de Jouvencel	111
D Annales	133
Devoir personnel Juin 2006	133
Examen final Juin 2006	135
Devoir personnel Juin 2007	139
Examen final Juin 2007	140
Examen final Juin 2008	145
Examen final Janvier 2009	151
Examen partiel Avril 2010	154
Examen partiel Décembre 2010	156
Examen Juin 2011	159
Examen Janvier 2012	163
Examen Mai 2012	168
Examen Juin 2012	170

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définition

L'automatique est la science qui traite de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques évoluant avec le temps. En d'autres mots de l'automatisation de tâches par des machines fonctionnant sans intervention humaine.

Wikipédia

C'est une partie d'un ensemble plus vaste nommé cybernétique. Définie en 1947 par Norbert Wiener, la cybernétique est la base de la robotique, de l'automatique, de l'intelligence artificielle et de la théorie de l'information.

1.2 Exemples d'asservissements

1.2.1 Historique

L'histoire de l'automatique démarre sans doute dès la préhistoire. En effet, le masque du sorcier préhistorique est une première tentative de donner une vie propre à un objet inanimé.

Le système souvent cité comme étant la première réalisation d'un correcteur automatique est la clepsydre de Ktesibios (-270 av. J.C) (figure 1.1). Afin d'améliorer le principe de l'horloge à eau, Ktesibios introduit un réservoir supplémentaire dans lequel le volume de liquide reste constant grâce à un flotteur qui ferme l'entrée du réservoir lorsque celui-ci est trop plein. En gros, c'est une chasse d'eau moderne.

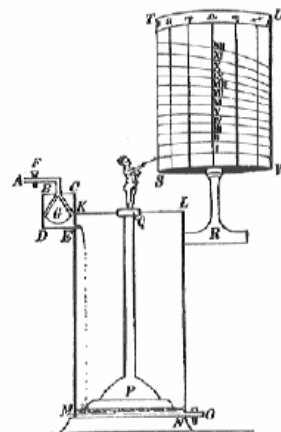


FIGURE 1.1 – Clepsydre de Ktesibios (-270 av. J.C., Alexandrie).

L'horloge, des siècles plus tard, est encore un moteur de découvertes dans le domaine de l'automatique. L'échappement à ancre n'est guère qu'un stabilisateur de fréquence. Les développements de l'horloge conduisent alors à la création d'automates extrêmement compliqués. Citons, à titre d'exemple, le canard de Vaucanson

(1709-1782) (figure 1.2) qui pouvait boire, se nourrir, caqueter, nager, "digérer" et déféquer. L'idée de la programmation est née à peu près à la même époque. En 1728, Jean-Philippe Falcon crée le premier métier à tisser programmable par cartons perforés. Vaucanson réalise un métier à tisser programmé en 1745, et en 1801 le célèbre métier à tisser automatique programmable de Joseph-Marie Jacquard.

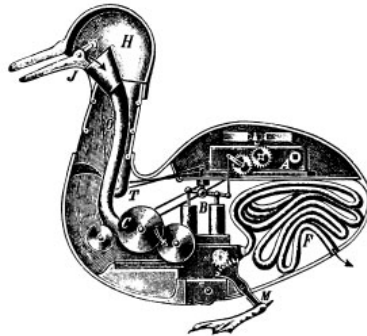


FIGURE 1.2 – Canard de Vaucanson ($\simeq 1739$).



FIGURE 1.3 – Métier à tisser programmable.



FIGURE 1.4 – Cartes perforées, le début de la programmation.

A la même époque d'autres systèmes voient le jour, poussés par la révolution industrielle qui est en marche. Denis Papin développe la soupape de sécurité (figure 1.5) pour les systèmes fonctionnant à la vapeur et James Watt invente le régulateur de vitesse à boule (figure 1.6).

Les réalisations précédentes ne manquent pas d'ingéniosité, néanmoins il faudra attendre l'arrivée de l'électricité puis de l'électronique pour voir apparaître les premiers correcteurs en tant que tels. Enfin, le développement des microprocesseurs puis celui des microcontrôleurs permet aujourd'hui de mettre en œuvre des principes de commande très élaborés, notamment :

- les commandes robustes
- l'identification en ligne
- la commande de systèmes non linéaires
- la commande prédictive
- ...

qui sortent du cadre de ce cours.

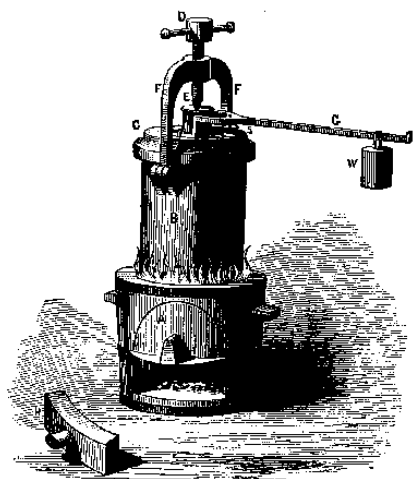


FIGURE 1.5 – Soupape de sécurité de Denis Papin ($\simeq 1679$).

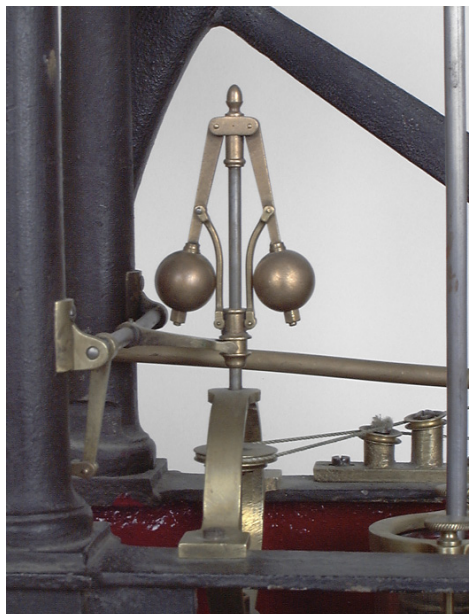


FIGURE 1.6 – Régulateur de vitesse de Watt (1788).

Les figures 1.7 et 1.8 représentent deux exemples de stabilisation de systèmes instables, les figures 1.9 et 1.10 représentent quant à elles deux exemples de systèmes instables pour lesquels le correcteur n'a rien pu faire. Dans les deux cas, le correcteur n'y est pour rien. Une erreur humaine et une erreur de conception sont à l'origine des deux "problèmes".



FIGURE 1.7 – Fusée Ariane (ESA).



FIGURE 1.8 – Avion de combat Rafale (Dassault).



FIGURE 1.9 – Fusée Ariane (ESA).

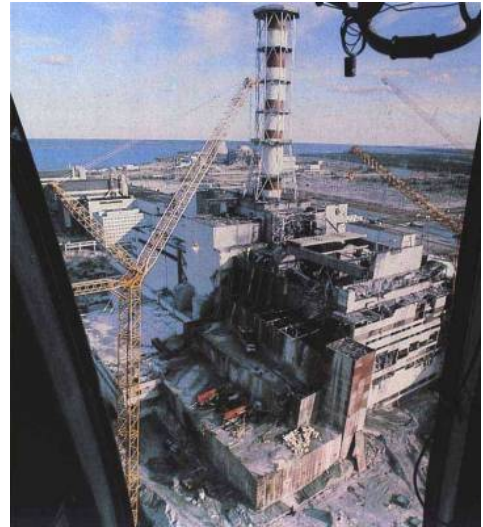


FIGURE 1.10 – Centrale électrique de Tchernobyl.

Retenez encore qu'aujourd'hui sur 100 systèmes méritant d'être asservis :

- 10 le sont effectivement,
- mais 9 sont mal asservis.

1.3 Mise en œuvre des asservissements numériques

Le schéma général d'un asservissement analogique est représenté en figure 1.11, sa transposition en commande numérique est représentée en figure 1.12.

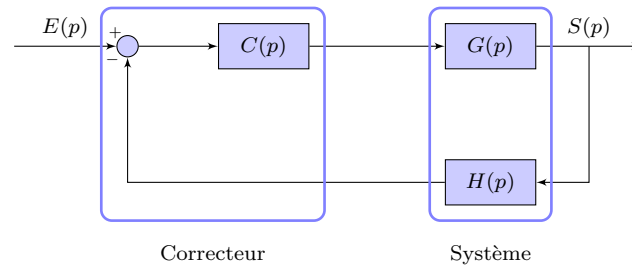


FIGURE 1.11 – Système asservi linéaire continu.

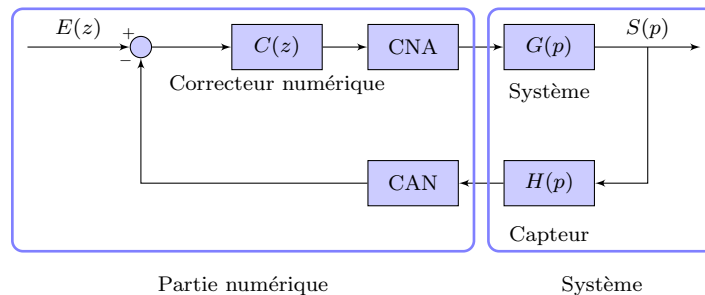


FIGURE 1.12 – Système asservi linéaire échantillonné. (Ne cherchez pas les boîtes CAN et CNA sous simulink, elles n'existent pas ! CAN est intrinsèque en passant de continu à échantillonné, CNA s'appelle en fait ZOH pour "Zero Order Hold".)

Les avantages de l'asservissement numérique sont nombreux, en voici quelques uns.

- Réalisation aisée de régulateurs complexes, lois de commande raffinées.
- Facilité de mise en œuvre de commandes anticipatrices (compensation par rapport à la consigne ou à certaines perturbations).
- Mise en œuvre d'algorithmes de régulation sans équivalent analogique.
- Insensibilité de la caractéristique entrée-sortie du régulateur aux parasites, aux variations de température, au vieillissement, etc.
- Pas de dispersion des paramètres du régulateur en cas de fabrication en série.
- Prise en compte de défauts, des limites et comportements particuliers du système à régler (non linéarités, saturations) par simple programmation.
- Linéarisation autour d'un point de fonctionnement ajustable.
- Générateur de trajectoires intégré.
- Changement de correcteur souple et rapide.
- Interface utilisateur conviviale.
- Plusieurs systèmes corrigés par un seul microprocesseur.

Il y a aussi quelques inconvénients qu'il convient de connaître pour mieux les contourner. Notamment l'observation discontinue de la grandeur réglée, le système est en boucle ouverte entre deux instants d'échantillonnage. Sans précautions particulières, le bouclage numérique insère des non linéarités dans la boucle de régulation dues :

- à la quantification des convertisseurs,
- à la précision de calcul finie du microprocesseur,
- au procédé d'échantillonnage (recouvrement spectral).

Ces non linéarités peuvent avoir un effet déstabilisant (cycles limites) et introduisent des bruits supplémentaires, voire des battements. Un autre phénomène important est l'insertion de retards purs dans la boucle de régulation

due au temps de conversion analogique-numérique (A/N) et numérique-analogique (N/A) et au temps d'exécution de l'algorithme de régulation, or les retards purs sont très déstabilisants.

1.3.1 Technologie des asservissements

Le choix du support matériel d'un asservissement numérique est évidemment fonction de l'objet contrôlé. La gamme de supports est vaste, pour fixer les idées voici trois systèmes complets.

Dans le cas de systèmes très complexes, nécessitant plusieurs asservissements simultanés, des interfaces utilisateurs conviviales, le choix se porte sur des calculateurs industriels qui se présentent sous la forme d'un rack dans lequel on insère des cartes à microprocesseur et des cartes d'entrées sorties. La puissance de calcul n'est pas limitée.



FIGURE 1.13 – Kit de développement sur Bus VME.



FIGURE 1.14 – Carte d'acquisition haute densité. 96 voies analogiques 12 bits 3 Méc./s.

La programmation de ces systèmes fait appel à un système d'exploitation multitâche temps réel.

A l'inverse, pour des systèmes simples, un microcontrôleur¹ suffit. La programmation se fait alors en C ou en Assembleur, les microcontrôleurs plus puissants acceptent sans problème un système d'exploitation temps réel².

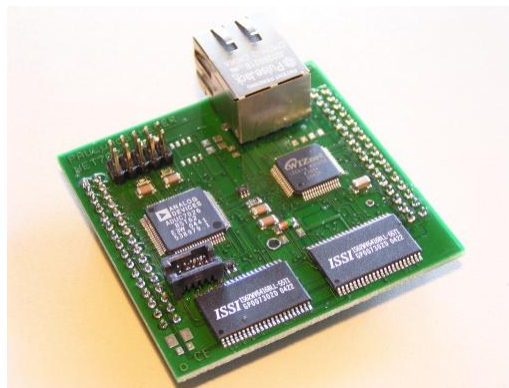


FIGURE 1.15 – Microcontrôleur ADUC.

Entre les deux, il existe des cartes de puissance intermédiaire telle que la SSV DIL/NetPC DNP/5280. Celle-ci possède 8Mo de ROM et 16 Mo de RAM (à comparer aux 8192 mots de ROM et 368 octets de RAM d'un PIC 16F877) ainsi que pratiquement tous les bus classiques (I2C, SPI, CAN et une interface Ethernet)

Enfin, il existe les DSP : Digital Signal Processing, dédiés au calcul rapide et flottant, plutôt utilisés dans des applications nécessitant du traitement du signal conséquent.

Et pour finir, sachez que les PID industriels soit disant analogiques cachent un microcontrôleur, cette technologie permettant de réaliser des constantes de temps impossibles à réaliser en analogique. Mais aussi, de gérer des

1. Microcontrôleur = sur la même puce microprocesseur+ périphériques : horloges, entrées sorties binaires et analogiques, liaisons numériques, ...

2. RTLinux par exemple qui présente l'avantage d'être gratuit.



FIGURE 1.16 – Carte microcontrôleur SSV DIL/NetPC DNP/5280.

alarmes, des saturations, des modes de défaut, etc. Vous trouverez au §4.2.1 page 57 une méthode rapide pour déterminer les coefficients de ces correcteurs.



FIGURE 1.17 – Régulateur "analogique" de type PID.

CAN

Afin de faire traiter le signal par un microprocesseur, il faut le lui rendre accessible, c'est le rôle du convertisseur analogique numérique. Plusieurs méthodes de conversion existent³.

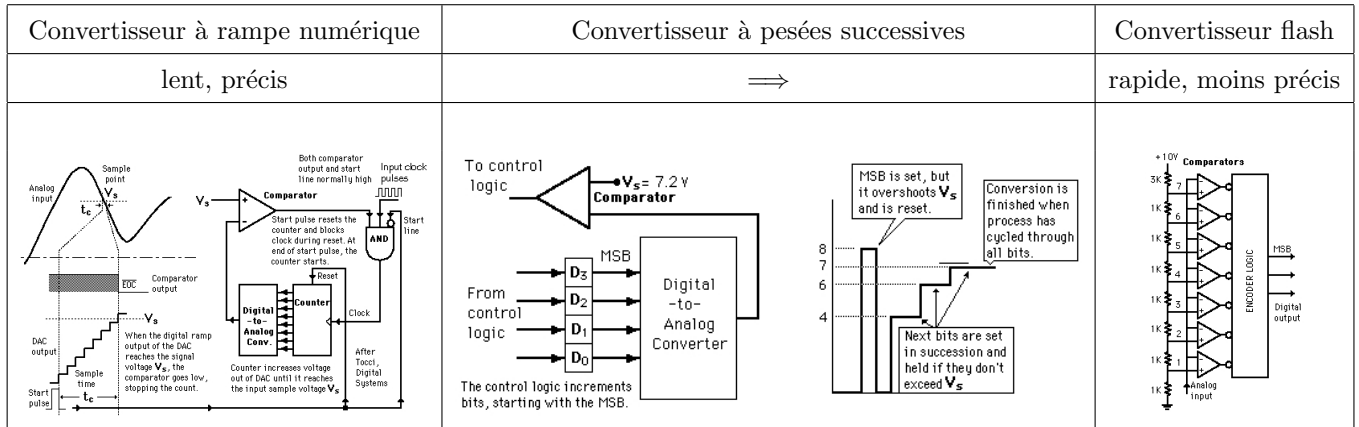


FIGURE 1.18 – Principes de conversion analogique numérique.

CNA

Le convertisseur numérique analogique le plus connu est fondé sur le principe du réseau R-2R comme illustré sur la figure 1.19. Ce principe est très consommateur de surface de silicium, aussi la grande majorité des microcontrôleurs n'en possèdent pas. Une autre méthode de conversion consiste à utiliser le principe de modulation en largeur d'impulsion (MLI, en anglais PWM). Le principe est de faire varier la valeur moyenne du signal de sortie binaire (0 - 5V) en faisant varier la largeur de l'impulsion. Un filtre RC filtrera les variations rapides, ne laissant passer que les variations lentes soit le signal désiré. Ce principe présente l'énorme avantage de ne demander qu'un bit de sortie du microcontrôleur par rapport à 16 bits pour un CNA classique !

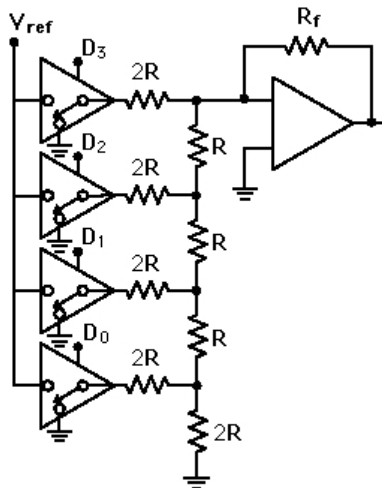


FIGURE 1.19 – Convertisseur numérique analogique de type réseau R-2R.

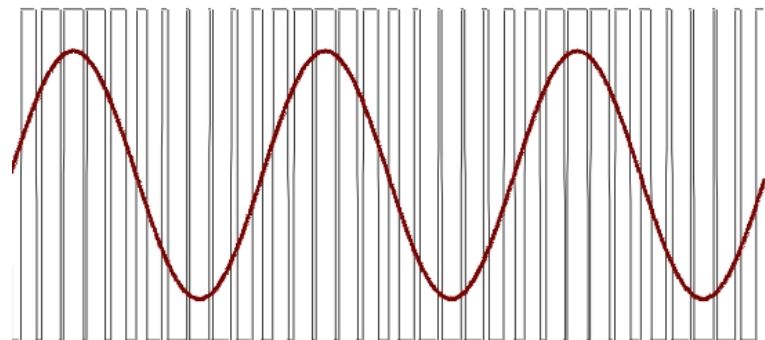


FIGURE 1.20 – Signal modulé en modulation de largeur d'impulsion avant et après filtrage haute fréquence.

3. dessins tirés de : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/adc.html>

1.4 Echantillonnage et quantification

La figure 1.21 montre la différence fondamentale entre le signal analogique et le signal échantillonné et quantifié que le microcontrôleur "perçoit". Ce signal est en fait une suite de nombres codés sur n bits (typiquement 8 à 16 bits)

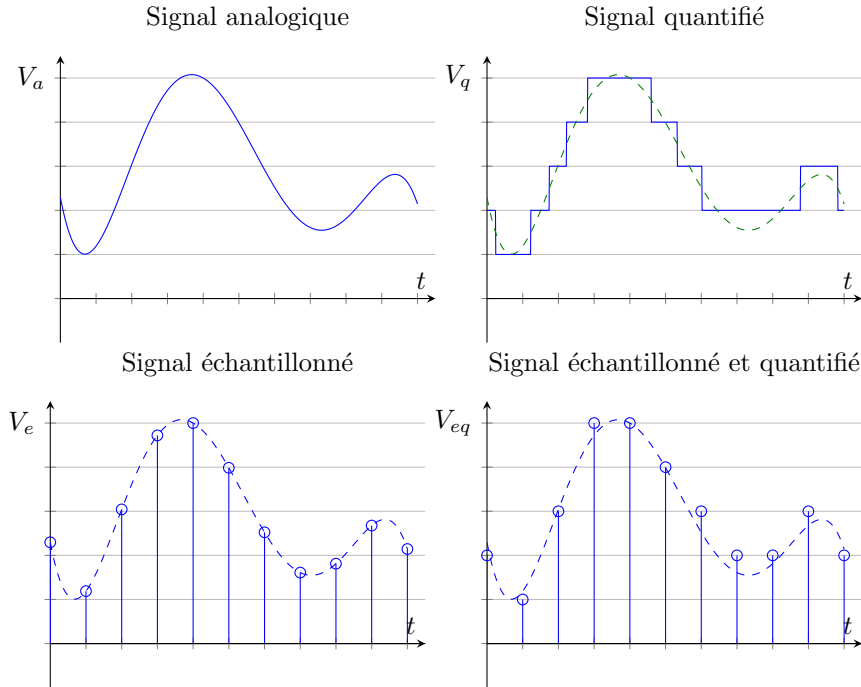


FIGURE 1.21 – Echantillonnage et quantification d'un signal.

En observant le signal échantillonné et quantifié (en bas à droite de la figure 1.21), la tentation est grande de vouloir s'approcher du signal analogique en essayant de faire du "quasi-continu" par un surdimensionnement des deux paramètres principaux que sont la fréquence d'échantillonnage et le pas de quantification. Les deux parties suivantes, je l'espère, vous en dissuaderont.

1.4.1 Le bruit de quantification

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude égale à la dynamique du convertisseur, le rapport signal à bruit SNR^4 est de :

$$SNR = 6n - 4,76$$

où n est le nombre de bits du convertisseur

En pratique on choisit n tel que le rapport signal à bruit de l'ensemble ne soit pas trop diminué par la quantification. Il existe des convertisseurs de : 8, 10, 12, 16, 24 bits. Il existe aussi des convertisseurs ayant une caractéristique logarithmique.

1.5 Période d'échantillonnage

1.5.1 Le problème de la période d'échantillonnage

La figure 1.23 montre un même signal échantillonné à plusieurs fréquences, lorsque la période d'échantillonnage T_e est égale à la moitié de la fréquence du signal, on voit qu'il devient impossible de reconstituer le signal original.

En augmentant encore la période d'échantillonnage on tombe sur des aberrations comme illustré en figure 1.24.

4. SNR : Signal to Noise Ratio

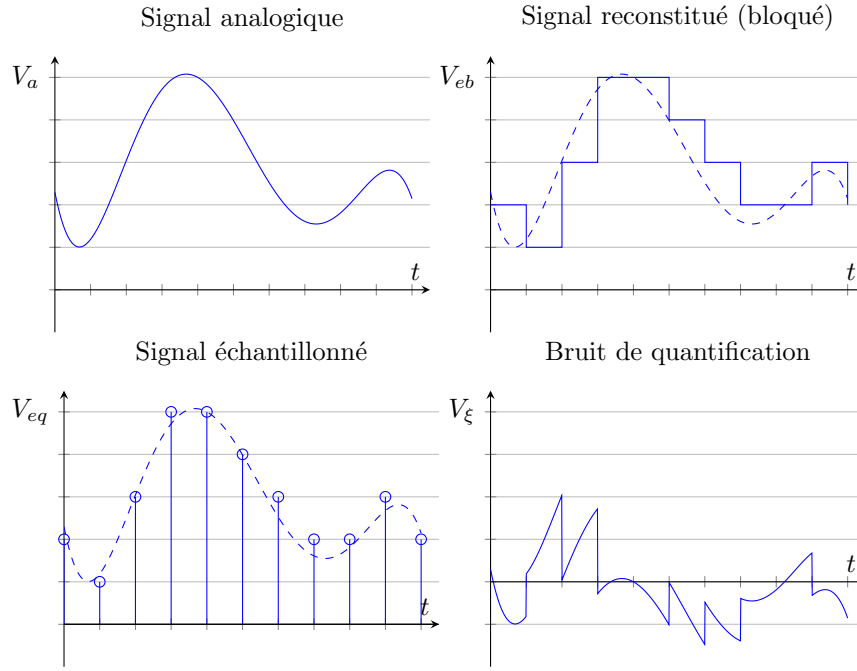


FIGURE 1.22 – Bruit de quantification d'un signal.

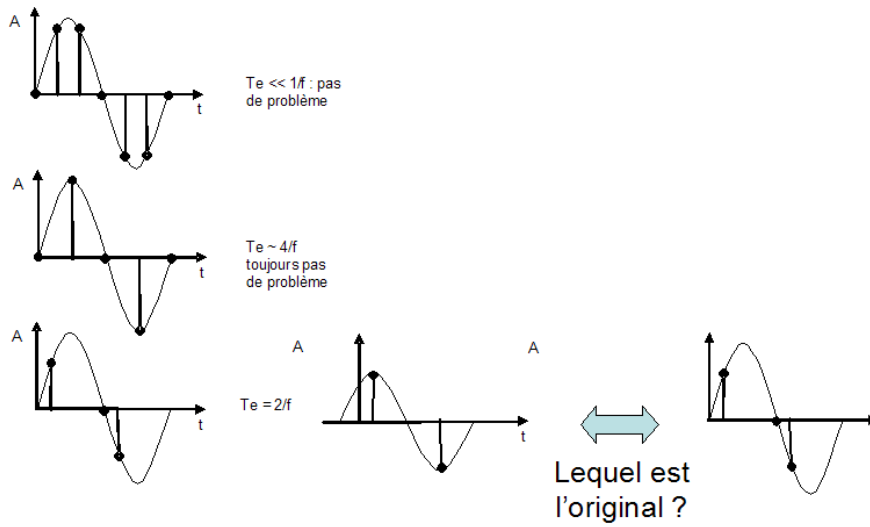


FIGURE 1.23 – Signaux échantillonnés à différentes fréquences.

1.5.2 Le recouvrement de spectre avec les mains

Sans entrer dans les détails du traitement du signal rappelons une constante des transformées usuelles, Laplace, Fourier et bientôt z : le produit de fonctions temporelles est transformé en un produit de convolution dans l'espace opérationnel. En particulier pour la transformée de Fourier :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) \times Y(f) \quad (1.1)$$

$$x(t) \times y(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) * Y(f) \quad (1.2)$$

La relation 1.1 est illustrée en figure 1.25.

En fonction des valeurs relatives de F_{max} et F_e on obtient deux types de spectres différents comme illustré en figure 1.26.

Lorsque $F_{max} > F_e/2$, il se produit le phénomène de *recouvrement* de spectre, à ne pas confondre avec le

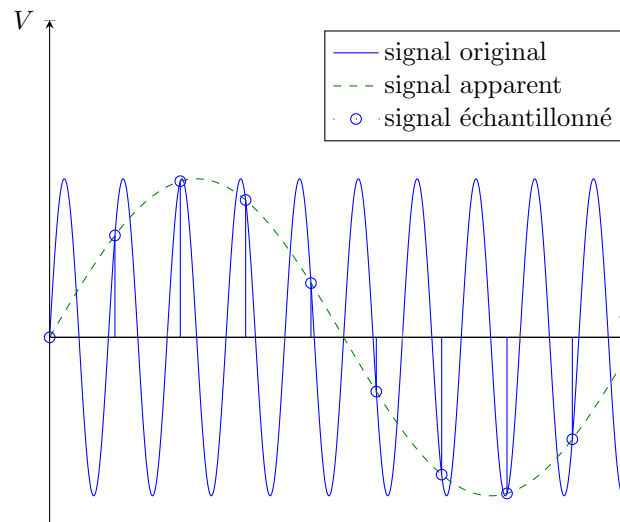


FIGURE 1.24 – Signal ostensiblement sous-échantillonné (Repliement de spectre).

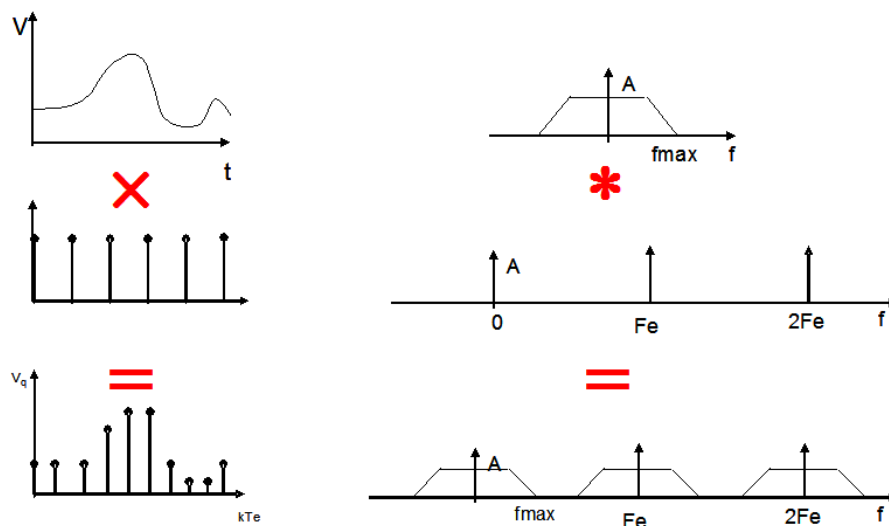


FIGURE 1.25 – Spectre d'un signal échantillonné (échantillonnage parfait).

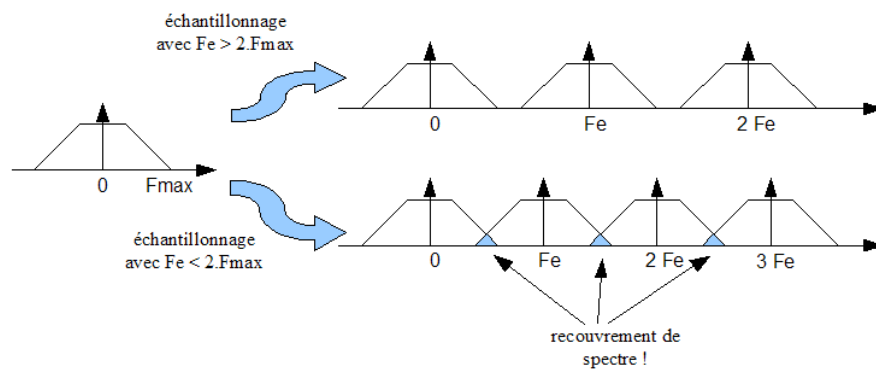


FIGURE 1.26 – Phénomène de recouvrement de spectre.

repliement de spectre. Si ce phénomène se produit, il est alors impossible de reconstituer le signal original, d'où le théorème de Shannon :

Le théorème de Shannon *Toute fonction du temps $f(t)$ possédant un spectre de fréquence limitée à $\pm F_{max}$ peut être transformée par échantillonnage périodique, de fréquence F_e supérieure ou égale à $2F_{max}$, sans aucune perte d'information.*

Ce théorème n'est qu'une limite infranchissable, d'autres phénomènes vont intervenir bien avant dans le choix de la période d'échantillonnage.

Notez que l'idée d'un spectre limité à F_{max} est illusoire, tous les signaux en automatique ont un spectre infini. On ne peut alors que minimiser ce phénomène de recouvrement de spectre. Il sera parfois nécessaire d'ajouter un filtre dit filtre "anti-recouvrement" ou "filtre anti-repliement"⁵.

Le calcul de ce filtre mériterait un chapitre à lui seul. Disons pour faire extrêmement simple, qu'il s'agit le plus souvent d'un filtre électronique passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est choisie entre F_{max} et F_e .

5. Ces deux phénomènes ne sont pas identiques mais une certaine confusion existe dans la littérature...

1.5.3 Choix de la période d'échantillonnage

Les considérations précédentes montrent :

- une limite fondamentale : le théorème de Shannon,
- que l'idée de suréchantillonner provoque énormément de bruit sur le calcul des dérivées et demande un microcontrôleur puissant donc cher.

Entre les deux, il existe un vaste choix de fréquences d'échantillonnage. Plusieurs auteurs proposent une formalisation de ce choix, le plus souvent quasi-empirique mais donnant de bons résultats du point de vue du compromis précision - vitesse de calcul nécessaire.

Sevely [3]

Yves choisit T_e , la période d'échantillonnage telle qu'elle soit

$$\frac{2\pi}{18\omega_0} \leq T_e \leq \frac{2\pi}{9\omega_0}$$

$$\frac{\tau}{9} \leq T_e \leq \frac{\tau}{4,5}$$

Bühler [4]

Hansruedi choisit T_e , la période d'échantillonnage telle qu'elle soit

- 5 fois plus petite que la constante de temps la plus rapide que l'on veut contrôler en boucle fermée

$$T_e \simeq \frac{\tau}{5}$$

- 8 fois plus petite que la pseudo-période, s'il s'agit de pôles complexes conjugués

$$T_e \simeq \frac{1}{8} \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Critère fréquentiel [9]

On choisit F_e , la fréquence d'échantillonnage telle qu'elle soit 6 à 24 fois plus grande que la fréquence de coupure du système. Soit pour un système d'ordre 1 :

$$\tau \geq T_e \geq \frac{\tau}{4}$$

Pour un système d'ordre 2 : $\frac{k}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$
soit :

$$0.25 < \omega_0 T < 1\xi = 0.7$$

$$0.4 < \omega_0 T < 1.75\xi = 1$$

Exemple

Soit $G(p)$ une fonction de transfert possédant 4 pôles en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)(1 + \tau_4 p)}$$

Après mise en œuvre de l'asservissement vous espérez accélérer le système, la fonction de transfert devient donc

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{1}{(1 + \frac{2}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2})(1 + \tau_3' p)(1 + \tau_4' p)}$$

Quelques valeurs numériques pour fixer les idées :

- $\tau_3' = 1s$,
- $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\xi=0.43$ (réglage classique à 20% de dépassement),
- on ne cherche pas à contrôler τ_4 .

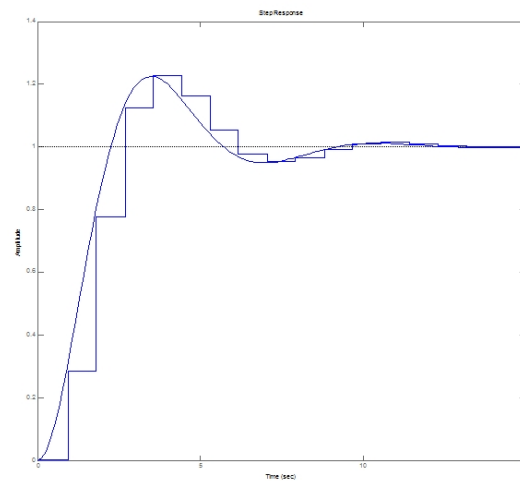


FIGURE 1.27 – Réponse d'un second ordre échantillonné (mais pas quantifié!). Observez le retard introduit par l'échantillonnage.

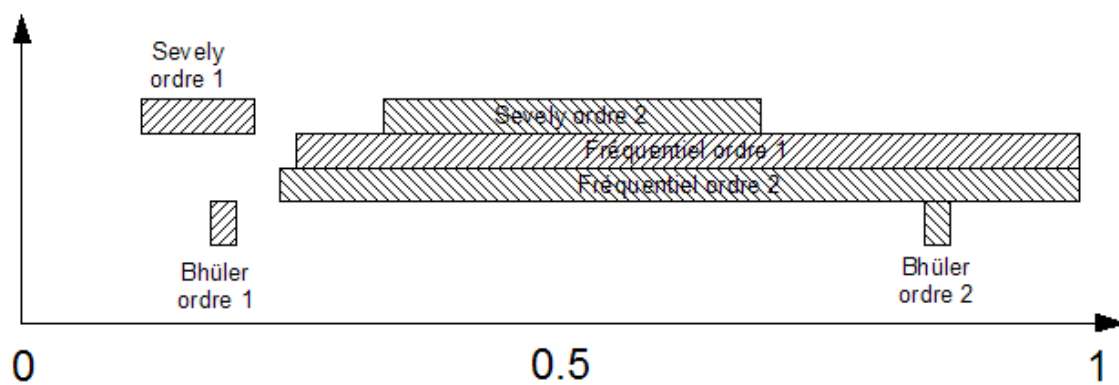
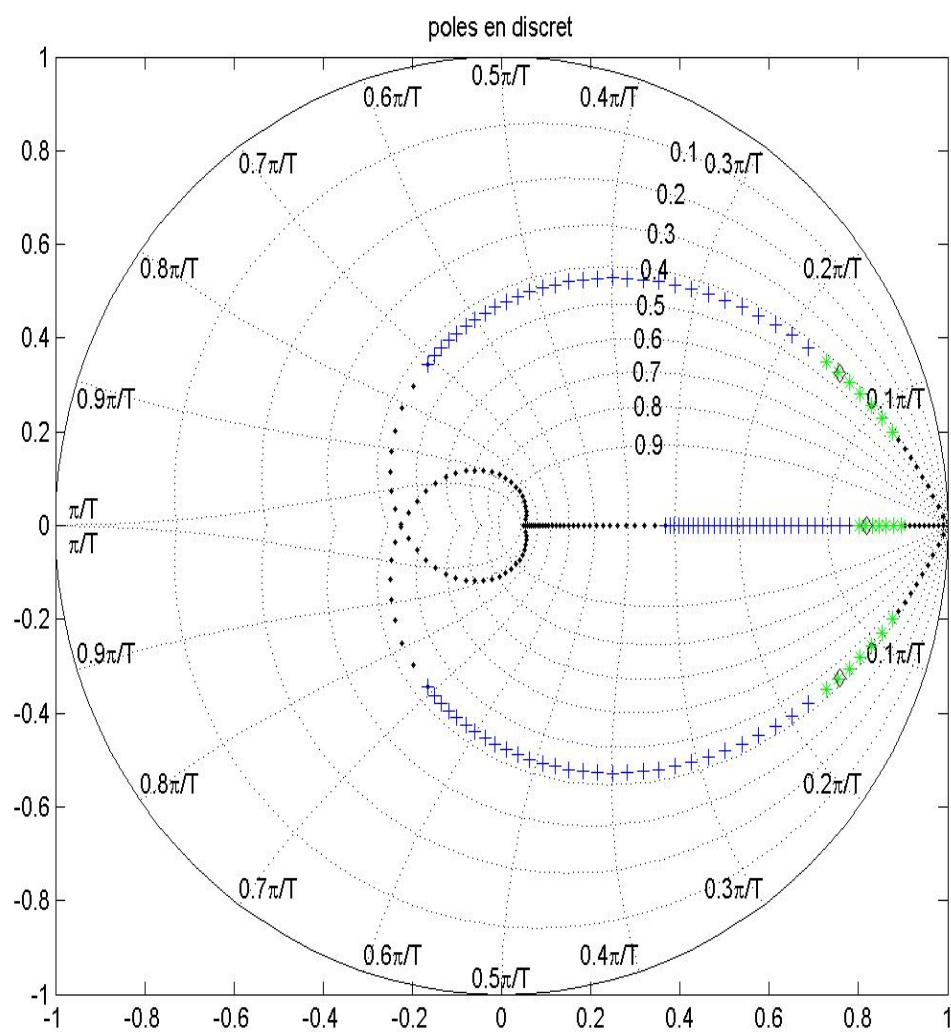


FIGURE 1.28 – Comparaison des périodes d'échantillonnages préconisées par différents auteurs.

FIGURE 1.29 – Lieu des pôles en z en fonction de la période d'échantillonnage.... T_e varie de 0.01s à 3s.

◇ Bühler

*** Sevely

+++ critère fréquentiel

Chapitre 2

Transformée en z

2.1 Définition de la transformée en z

On appelle transformée en z d'un signal $f(t)$ la transformée de Laplace $F^*(p)$ du signal échantillonné $f^*(t)$, dans laquelle on effectue la substitution

$$\boxed{z = e^{T_e p}} \quad (2.1)$$

Notation : $\mathcal{Z}[F(p)]$ ou $\mathcal{Z}[f(t)]$

Rappel : transformée de Laplace d'un signal

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$$

le signal $f(t)$ échantillonné s'écrit $f^*(t)$ avec :

$$f^*(t) = f(t)\delta_{T_e}(t)$$

avec $\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(t - kT_e)$ $k \in \mathbb{Z}$ peigne de Dirac

Ainsi la transformée de Laplace du signal échantillonné est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^*(t)] &= \int_0^\infty \left(f(t) \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(t - kT_e) \right) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty \int_0^\infty f(t) \delta(t - kT_e) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty f(kT_e) e^{-kT_e p} \end{aligned}$$

la fonction f étant nulle pour tout $t < 0$,

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^\infty f(kT_e) e^{-kT_e p}$$

puis en posant $z = e^{T_e p}$

$$\boxed{F(z) = \sum_{k=0}^\infty f(kT_e) z^{-k}} \quad (2.2)$$

Exemple :

$f(t) = U(t)$ échelon d'Heaviside

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty f(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^\infty z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Rappel : Somme d'une suite géométrique :

premier terme qui y est moins premier terme qui n'y est pas sur un moins la raison.

2.2 Propriétés de la transformée en z

Comme la transformée en z est la transformée de Laplace suivie d'un changement de variable, ses propriétés se déduisent de celles de la transformée de Laplace.

Linéarité

$$\mathcal{Z}[af(t) + bg(t)] = aF(z) + bG(z) \quad (2.3)$$

où a et b sont des constantes

Translations réelles

Retard de k périodes

$$\mathcal{Z}[f(t - kT_e)U(t - kT_e)] = z^{-k}F(z) \quad (2.4)$$

Notez l'opérateur "retard" z^{-1}

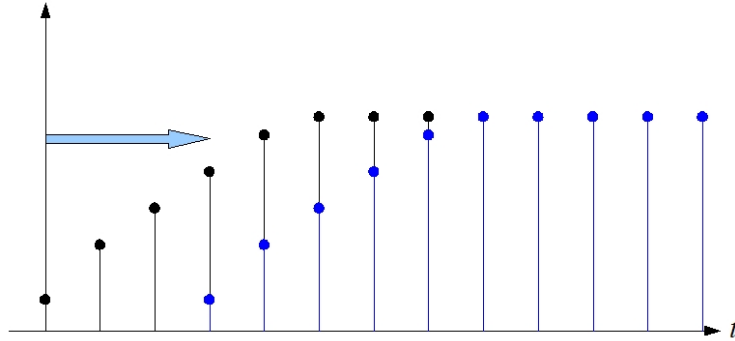


FIGURE 2.1 – Illustration de la propriété du retard.

Avance de k périodes

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(T_e) - z^{k-2} f(2T_e) - \dots - z f((k-1)T_e) \\ \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT_e) z^{-n} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les valeurs initiales sont enlevées, sinon, le principe de causalité n'est plus respecté.

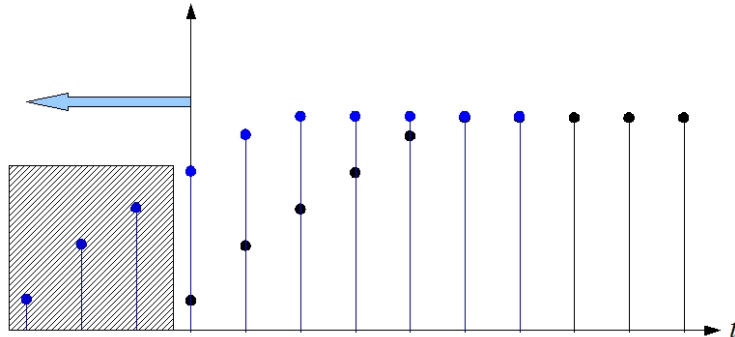


FIGURE 2.2 – Illustration de la propriété de l'avance.

Translation complexe

$$\mathcal{Z}[e^{-aT_e} f(t)] = \mathcal{Z}[F(p + a)] = F(ze^{aT_e}) \quad (2.6)$$

Changement d'échelle en z

$$\mathcal{Z}[a^k f(kT_e)] = F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (2.7)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (2.8)$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (2.9)$$

Théorème de la convolution discrète

$$\mathcal{Z}[f(kT_e) \star g(kT_e)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)g((k-n)T_e)\right] = F(z)G(z) \quad (2.10)$$

C'est le théorème fondamental qui permet de transformer l'équation de la sortie d'un système,

en temporel : *sortie = convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle du système,*

en z : *sortie = produit de l'entrée avec la transmittance du système.*

Multiplication par t

$$\mathcal{Z}[tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z) \quad (2.11)$$

Très utile pour démontrer la forme des signaux canoniques

Théorème de sommation

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^n f(kT_e)\right] = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (2.12)$$

Pour aller plus loin : Démontrez le théorème de la convolution discrète

2.3 Calcul de la transformée en z

2.3.1 Par la formule de définition

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \quad (2.13)$$

Cette méthode est souvent lourde à mettre en œuvre.

Exemples :

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k T_e} z^{-k} = 1 + e^{\lambda T_e} z^{-1} + e^{2\lambda T_e} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{\lambda T_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\lambda T_e}}$$

$$f(t) = t$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k T_e z^{-k} = T_e \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z T_e \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k-1} \\ &= -z T_e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^{-k} = -z T_e \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= -z T_e \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z T_e z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{T_e z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

2.3.2 Par la théorie des résidus

C'est la méthode la plus à même de traiter tous les cas ! Néanmoins elle implique la connaissance de la théorie des résidus. Elle n'est donc donnée qu'à titre informatif.

$$F(z) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus} \left\{ \frac{F(\xi)}{1 - e^{\xi T_e} z^{-1}} \right\}_{\xi=\xi_i}$$

où les ξ_i sont les pôles de la fonction de transfert $F(p)$

Rappel : Théorie des résidus.

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2j\pi \sum \text{Res}$$

avec

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right)$$

si le pôle a est un pôle simple d'ordre n

2.3.3 Par l'utilisation des tables

Ce sera la méthode utilisée dans le cadre de ce cours. Le plus souvent on possède la transformée de Laplace du système. On procède à une décomposition en éléments simples puis, à l'aide du tableau A.1 donné en page 94, on obtient la transformée en z . Notez que la connaissance des propriétés de la transformée en z est souvent nécessaire.

Exemple

Soit à transformer en z , le système donné par sa fonction de transfert en p :

$$F(p) = \frac{4p^3}{(p^2 + 1)(p + 1)^3}$$

Décomposition en éléments simples

La forme de sa décomposition en éléments simples se déduit de la valeur et de la multiplicité de ses pôles. Il existe des réels a, b, c, d, e, f et un polynôme réel E tels que :

$$\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3} = E + \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} + \frac{c}{(p+1)^3} + \frac{(dp+e)}{(p^2+1)}$$

Il s'agit désormais de déterminer la valeur de chaque coefficient indéterminé.

- Le degré du numérateur de F est strictement inférieur au degré de son dénominateur, donc $E = 0$.
- On multiplie de part et d'autre par $(p+1)^3$ et on fait $p = -1$ pour obtenir $c = -2$.
- De même, on multiplie de part et d'autre par (p^2+1) et on fait $p = i$ pour obtenir $d = 1$ et $e = -1$.
- On étudie ensuite la limite de $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$, ce qui donne $a + d = 0$ d'où $a = -1$.
- Puis on calcule $F(0) = 0$ d'où $0 = a + b + c + e$ et donc $b = 4$.

Vérification, calculer par exemple $F(1) = 1/4$.

Ainsi la décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3} = -\frac{1}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2} - \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{(p-1)}{(p^2+1)}$$

Transformation en z

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p+1} &\longrightarrow -\frac{z}{z-e^{-T_e}} \\ \frac{4}{(p+1)^2} &\longrightarrow 4 \frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\ \frac{p-1}{(p^2+1)} &= \frac{p}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+1)} \longrightarrow \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z \sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1} \\ -\frac{2}{(p+1)^3} &\longrightarrow \end{aligned}$$

mais

$$\frac{1}{(p+a)^2} \longrightarrow te^{-at} \longrightarrow \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$$

et

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{2} t^2 e^{-at} \right] = \frac{1}{(p+a)^3} \quad \mathcal{Z} [tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z)$$

donc

$$\mathcal{Z} [t \times te^{-at}] = -T_e z \frac{d}{dz} \left[\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2} \right] = \frac{T^2 e^{-aT} z (z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3} \right] &= -\frac{z}{z-e^{-T_e}} + 4 \frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\ &+ \frac{T^2 e^{-aT} z (z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3} \\ &+ \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z \sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1} \end{aligned}$$

2.4 Transformée inverse

Il s'agit, le plus souvent de revenir à l'original temporel, soit pour tracer la sortie d'un système échantillonné soit pour retrouver l'équation récurrente, d'un correcteur pour l'implanter dans le calculateur.

2.4.1 Théorie des résidus

Celle-ci n'est donnée à titre informatif, elle ne sera jamais utilisée dans le cadre de ce cours. C'est la méthode la plus complexe à appliquer à la main, par contre elle est extrêmement simple à utiliser avec les logiciels de calcul symbolique tels que Maple ou Mathematica. C'est en outre la plus apte à "aller plus loin".

$$f(kT_e) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus} \{ z^{k-1} F(\xi) \}_{\xi=\xi_i}$$

où les ξ_i sont les pôles de la fonction de transfert $F(z)$

Exemple :

$$F(z) = \frac{z}{z-a} \frac{z}{z-1}$$

Il y a deux résidus en $z = a$ et en $z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z-a} z^{k-1} = \frac{1}{1-a} \\ \text{Res}_{z=a} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^2}{z-1} z^{k-1} = \frac{a^{k+1}}{a-1} \end{aligned}$$

donc

$$F(kT_e) = \frac{1}{1-a} + \frac{a^{k+1}}{a-1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

2.4.2 Par division polynomiale

On ne cherche alors que les premiers échantillons de la réponse d'un système à une entrée spécifiée.

Exemple : original de $\frac{z}{z-0.5}$

$$\begin{array}{r|l} z & z - 0.5 \\ \hline -z & + \quad 0.5 \\ \hline 0 & + \quad 0.5 \\ & -0.5 \quad + \quad 0.25z^{-1} \\ \hline & 0 \quad + \quad 0.25z^{-1} \end{array} \quad (2.14)$$

$f^*(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T_e) + 0.25\delta(t - 2T_e) + \dots$ donc $f(0) = 1$, $f(T_e) = 0.5$, $f(2T_e) = 0.25, \dots$

2.4.3 Par l'utilisation des tables

Méthode : décomposer $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples

Puis à l'aide du tableau A.1 donné en page 94 retrouver les originaux $f_i(t)$

- Décomposer $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples,
- rechercher les racines du dénominateur z_1, z_2, \dots, z_n ,
- construire

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_1}{z - z_1} + \frac{C_2}{z - z_2} + \frac{C_3}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n}{z - z_n},$$

- revenir à

$$F(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n z}{z - z_n}.$$

- Puis en utilisant

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z - a} \right] = a^k,$$

- on obtient :

$$f(kT_e) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k + \dots + C_n z_n^k.$$

Remarque : les z_i peuvent être complexes, mais sont complexes conjugués deux à deux.

En résumé

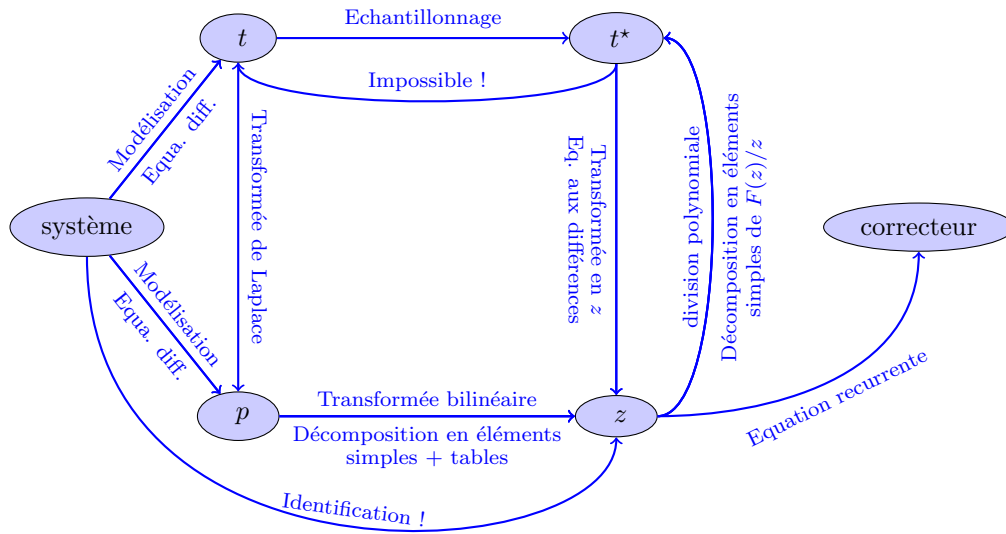


FIGURE 2.3 – Ensemble des transformations.

2.5 Transmittances échantillonnées

Il existe plusieurs façons de calculer la transmittance échantillonnée d'un système. Nous verrons tour à tour deux méthodes différentes. La transformée d'un système précédé d'un bloqueur d'ordre 0, qui fait l'hypothèse que l'entrée du système est constante entre deux instants d'échantillonnage (ce qui est vrai, c'est même la fonction du bloqueur d'ordre 0!). Puis, nous verrons la transformée bilinéaire au paragraphe 4.1.3, qui reproduit un peu mieux la réponse fréquentielle d'un système.

2.5.1 Notions de schéma bloc

Rappels sur la réduction des schémas-blocs

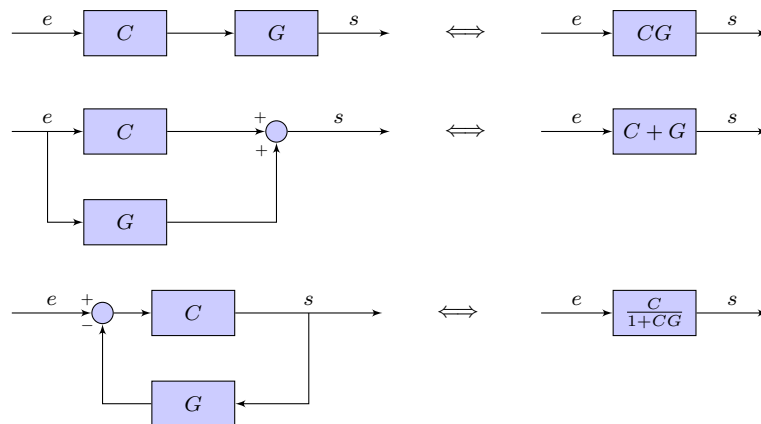


FIGURE 2.4 – Opérations fondamentales de réduction des graphes. Le schéma de droite est équivalent à celui de gauche.

Pour aller plus loin : Donner la fonction de transfert du système décrit à la figure 2.5.

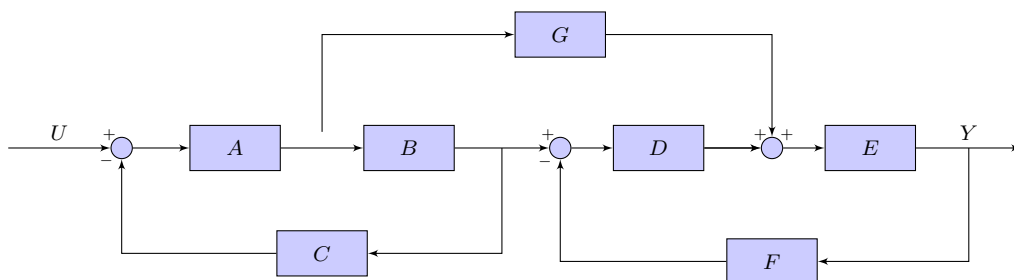


FIGURE 2.5 – Exercice : montrer que ce schéma se réduit à un bloc de transmittance : $\frac{Y}{U} = \frac{ABDE + AGE}{(1 + ABC)(1 + DEF)}$.

2.5.2 Transformée en z d'un schéma bloc

La figure 2.6 décrit une partie de schéma bloc en p , il s'agit alors de transformer ce schéma en un schéma bloc en z . La tentation est grande de transformer terme à terme, mais c'est faux !

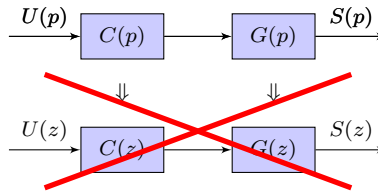


FIGURE 2.6 – Il est impossible de transformer un graphe en p en un graphe en z par transformation des différents blocs !

$$\begin{aligned} G_1(p) &\rightarrow G_1(z) \\ G_2(p) &\rightarrow G_2(z) \\ G(p) = G_1(p)G_2(p) &\nrightarrow G(z) = G_1(z)G_2(z) \end{aligned}$$

Pour que cela soit vrai il faut que le signal entre G_1 et G_2 soit un signal échantillonné.

Exemple : soit : $G_1(p) = \frac{1}{p}$ et $G_2(p) = \frac{1}{p+a}$ alors $G_1(z) = \frac{z}{z-1}$ et $G_2(z) = \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$
et $\mathcal{Z}[G_1(p)G_2(p)] = \frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})} \neq \frac{z}{z-1} \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$

2.5.3 Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0

Le bloqueur d'ordre 0 (en anglais "Zero Order Hold") est l'objet physique qui permet de passer d'un signal numérique échantillonné, qui ne contient que de l'information et seulement aux instants d'échantillonnage, à un signal analogique continu par morceaux.

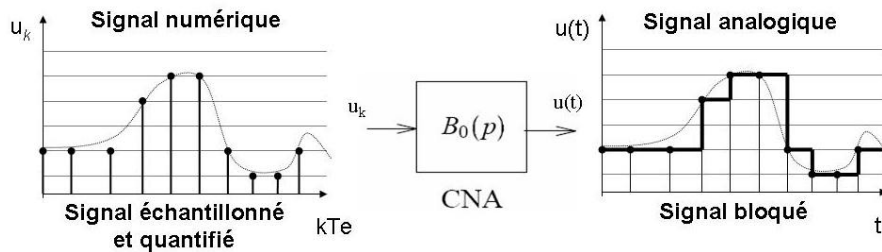


FIGURE 2.7 – Signaux d'entrée et de sortie d'un bloqueur d'ordre 0.

On cherche la transformée en z du schéma bloc donné en figure 2.8.

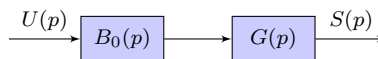


FIGURE 2.8 – Transmittance continue précédée d'un bloqueur d'ordre 0 (en anglais ZOH).

En premier lieu, il nous faut la transmittance en p du bloqueur d'ordre 0, ensuite nous verrons comment déterminer la transformée en z de l'ensemble.

Fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre 0

Rappel : La transformée de Laplace d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Si l'on soumet un bloqueur d'ordre 0 à une impulsion, on obtient la sortie illustrée en figure 2.9.

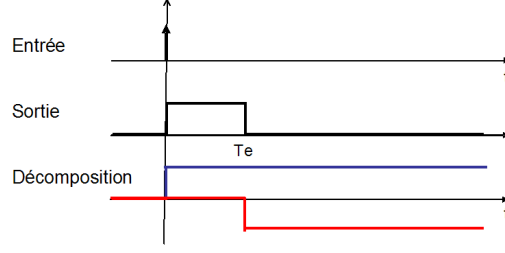


FIGURE 2.9 – Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre 0.

$$B_0(t) = U(t) - U(t - T_e)$$

$$B_0(p) = U(p) - U(p)e^{-T_e p}$$

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

Calcul de la transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0

$$G(z) = \mathcal{Z} [\mathcal{L}^{-1} [B_0(p)G(p)]]$$

Par souci de simplification d'écriture nous écrirons :

$$G(z) = \mathcal{Z} [B_0(p)G(p)]$$

donc

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-T_e p}}{p} G(p) \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} - \frac{e^{-T_e p}}{p} G(p) \right] \end{aligned}$$

En appliquant la linéarité de la transformation puis le théorème du retard, on obtient :

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right] - \mathcal{Z} \left[\frac{e^{-T_e p}}{p} G(p) \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right] \quad (2.15)$$

Une table des transformées usuelles de systèmes précédés d'un bloqueur d'ordre 0 est donnée dans le tableau A.2 en page 95.

Pour aller plus loin : Vérifier quelques lignes du tableau A.2

2.5.4 Transmittances échantillonnées de systèmes bouclés

Le problème posé en figure 2.10 est qu'il n'y a pas d'échantillonneur bloqueur entre la sortie s et la transmittance $H(p)$. Qu'à cela ne tienne, la transmittance en boucle fermée d'un système s'écrit :

$$\text{BoucleFermée} = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{chaîne directe} \times \text{chaîne de retour}}$$

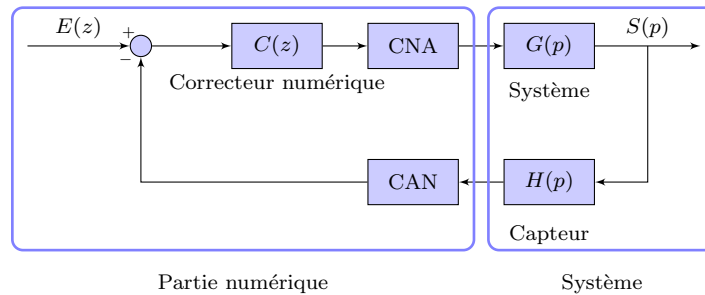


FIGURE 2.10 – Système bouclé échantillonné.

Ici

$$F(z) = \frac{C(z)Z[B_0(p)G(p)]}{1 + C(z)Z[B_0(p)G(p)H(p)]}$$

2.5.5 Avec Matlab

Matlab ne sait transformer qu'en utilisant une "méthode", ici : faire précéder le système d'un bloqueur d'ordre 0.

```
>> Te=1; % définition de la période d'échantillonnage
>> sys=tf([1],[1 1 0] ) % définition du système continu
>> sysd=c2d(sys,Te, 'zoh'); % transformée en z avec B0Z
>> present(sysd); % présentation du résultat
>> sysc=d2c(sysd,'zoh'); % transformée inverse avec B0Z
>> present(sysc); % présentation du résultat
```

```
>> Te=1;
>> sys=tf([1],[1 1 0] )
```

Transfer function:

```
1
-----
s^2 + s
```

```
>> sysd=c2d(sys,Te, 'zoh');
>> present(sysd);
```

Transfer function:

```
0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679
```

Sampling time: 1

```
>> sysc=d2c(sysd,'zoh');
>> present(sysc);
```

Transfer function:

```
-9.84e-016 s + 1
-----
s^2 + s + 1.776e-015
```


Chapitre 3

Analyse des systèmes

Avant de faire une correction quelconque il faut analyser le système. Dans ce chapitre nous aborderons le lien entre les pôles en p et les pôles en z afin de comprendre comment le système réagit à une entrée de consigne et dans quelle mesure il est possible de transformer cette réaction. Deux points sont fondamentaux, la stabilité du système et sa précision. En effet on cherche toujours à améliorer ces deux points lorsque l'on asservit un système.

Notez que ces analyses sont totalement indépendantes du fait que l'on parle d'un système en boucle ouverte ou en boucle fermée. Hormis l'analyse de la stabilité par le critère de Nyquist (non abordé dans ce cours) qui prédit la stabilité d'un système bouclé par un retour unitaire, l'ensemble des autres points s'appliquent sur une fonction de transfert, celle-ci représentant soit un système en boucle ouverte soit en boucle fermée.

3.1 Stabilité

Définition 1 *Un système est dit stable si, écarté de sa position de repos, celui-ci revient à cette position lorsque la cause qui l'en a écarté cesse.*

Définition 2 *Un système est dit stable si sa réponse à toute entrée bornée est bornée.*

Note : en appliquant ces définitions l'intégrateur pur n'est pas stable !

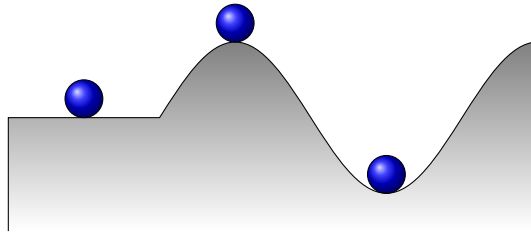


FIGURE 3.1 – Stabilité des systèmes au sens de Lyapounov [12] : illustration de la stabilité d'une bille sur un profil.

3.1.1 Conditions de stabilité

Appliquons la définition 1 sur un système quelconque.

Soit un système donné par sa transformée en z , $G(z)$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b^m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + b^n z^n} \quad \text{avec } m < n$$

ainsi la sortie $S(z)$ est donnée par :

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b^m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + b^n z^n} E(z)$$

Le système étant initialement en équilibre, soit en 0, si on applique une petite perturbation sur l'entrée, le système doit revenir à sa position d'équilibre, soit 0. En prenant comme perturbation $e(t) = \delta(t)$, soit $E(z) = 1$, la sortie $S(z)$ devient :

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b^m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + b^n z^n}$$

Nous avons vu au §2.4.3 que le signal $S(z)$ se décompose sous la forme :

$$S(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n z}{z - z_n}$$

et par conséquent, $s(kT_e)$ est de la forme :

$$s(kT_e) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k + \dots + C_n z_n^k$$

les C_i et les z_i étant complexes.

Pour que le système soit stable, il faut alors que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(kT_e) = 0$$

donc que :

$$|z_i| < 1$$

En d'autres termes, pour qu'un système soit stable, il faut et il suffit que les pôles de la fonction de transfert soient tous de module inférieur à 1.

Par abus de langage, nous inclurons dans l'ensemble des systèmes stables ceux ayant un ou plusieurs pôles en 1.¹

Pour connaître la stabilité d'un système il suffit alors de calculer le module des pôles du système. Ce calcul est le plus souvent fastidieux voire impossible. C'est pourquoi, il existe des critères de stabilité ne faisant pas directement le calcul des pôles mais qui permettent de savoir s'ils sont, ou pas, de module inférieur à 1.

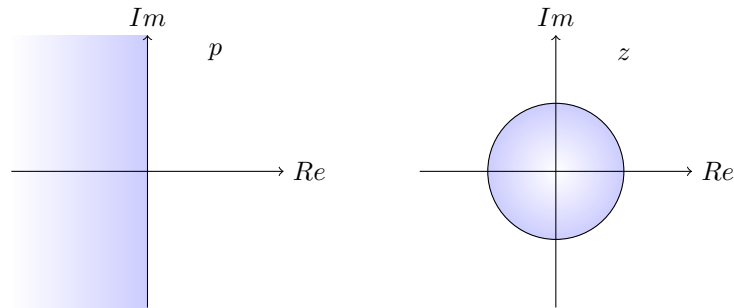


FIGURE 3.2 – Zones où les pôles sont stables en p et en z .

1. Ceux-ci sont *marginalelement stables*.

3.1.2 Critère de Jury

Soit $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ la fonction de transfert d'un système échantillonné.

$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \dots + a_n^0 z^n$$

On construit la matrice de dimensions $(n-1) \times (n+1)$ suivante :

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{n-1}^0 & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & 0 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0^{n-2} & a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dont les éléments sont définis comme suit :

$$a_k^{j+1} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_0^j & a_{n-j-k}^j \\ a_{n-j}^j & a_k^j \end{vmatrix} & \text{pour } 0 \leq k \leq n-j-1 \\ 0 & \text{pour } k > n-j-1 \end{cases}$$

Le polynôme $D(z)$ n'a aucun zéro de module supérieur à 1 si les $n+1$ conditions suivantes sont respectées :

1. $\sum_{i=0}^n a_i^0 = D(1) > 0$
2. $(-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0$
3. $|a_0^0| - a_n^0 < 0$
4. $|a_0^j| - |a_{n-j}^j| > 0$ pour $j = 1, \dots, n-2$

Note : Si $D(1) = 0$, cela veut dire que 1 est racine de $D(z)$ donc qu'il y a un pôle en 1, le système est au mieux *marginalelement stable*. On factorise alors $D(z)$ sous la forme $D(z) = (z-1)D'(z)$ et étudie la stabilité de $D'(z)$.

Exemple à l'ordre 3 ($n = 3$) :

$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + a_3^0 z^3$$

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $\sum_{i=0}^3 a_i^0 = D(1) > 0$
2. $(-1)^3 \sum_{i=0}^3 (-1)^i a_i^0 = (-1)^3 D(-1) > 0$ soit $D(-1) < 0$
3. $|a_0^0| - a_3^0 < 0$
4. $|a_0^1| - |a_2^1| > 0$ soit $(a_0^0)^2 - (a_3^0)^2 < a_0^0 a_2^0 - a_1^0 a_3^0$

Déterminer les conditions de stabilité du système :

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + 2z^2 + 4z + 7}$$

3.1.3 Critère de Routh-Hurwitz appliqué sur la transformée en w

Transformée en w La transformée en w est une transformation homographique qui fait correspondre exactement l'intérieur du cercle unité au demi plan gauche du plan complexe.

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

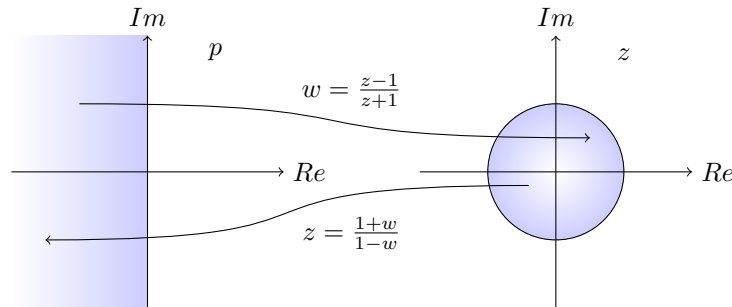


FIGURE 3.3 – Illustration de la transformée homographique w .

En appliquant la transformée en w au système, les racines en z de module inférieur à 1 sont transformées en des racines à partie réelle négative, il suffit alors d'appliquer le critère de Routh-Hurwitz sur la transformée en w pour connaître le signe des racines du polynôme considéré et donc la stabilité du système.

Déterminer les condition de stabilité du système par l'application du critère de Routh sur la transformée en w :

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + 2z^2 + 4z + 7}$$

3.1.4 Avec Matlab

Ou tout autre logiciel de calcul numérique (Scilab, Octave...²)

```
>> P=[1 2 4 7];      % définition du polynôme
>> abs(roots(P))     % calcul du module (abs) des racine (roots) de P
```

Il suffit de regarder si les modules de toutes les racines sont inférieurs à 1.

2. Logiciels gratuits!

3.2 Correspondance des plans z et p

L'objectif est de déterminer le type de comportement du système à la vue des pôles du système tracés dans le plan complexe.

Etudions le lien entre un pôle simple en p et son transformé par la transformation en z

Pôles simples

$$\frac{1}{p+a} \longrightarrow \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

Le pôle en $-a$ est transformé en un pôle en e^{-aT_e}

L'axe des réels en p est transformé en l'axe des réels positifs en z . l'axe des réels négatifs en z n'a pas de correspondant en p .

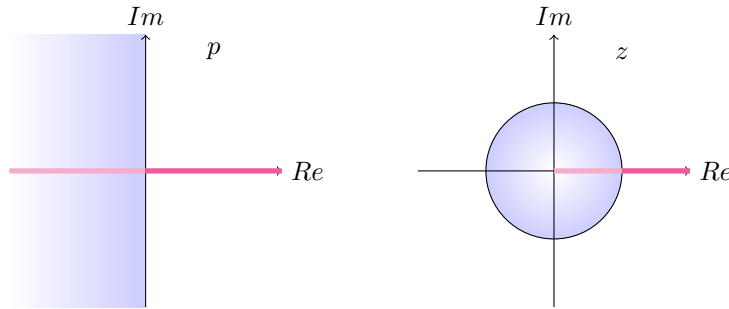


FIGURE 3.4 – Transformation des pôles simples de p vers z .

Pôles complexes conjugués

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \longrightarrow B_0 G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 - 2(e^{-\xi\omega_k T_e} \cos(\omega_d T_e))z + e^{-2\xi\omega_k T_e}} \\
 p_1, \bar{p}_1 &= -\xi\omega_n \pm i\omega_d \longrightarrow z_1, \bar{z}_1 = e^{-\xi\omega_k T_e} \cos(\omega_d T_e) \pm \sqrt{e^{-2\xi\omega_k T_e} \cos^2(\omega_d T_e) - e^{-2\xi\omega_k T_e}} \\
 \text{où } \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} &= e^{-\xi\omega_k T_e} (\cos(\omega_d T_e) \pm i \sin(\omega_d T_e)) \\
 & &= e^{-\xi\omega_k T_e} e^{\pm i\omega_d T_e}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

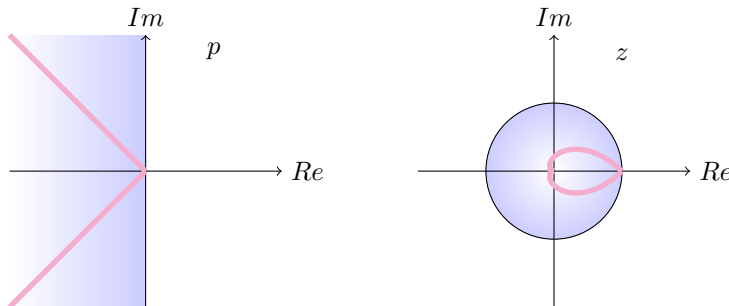


FIGURE 3.5 – Transformation des pôles complexes conjugués de p vers z .

Généralisation Dans les deux cas nous avons bien la relation :

$$\begin{aligned}
 \text{Pôle du système continu} &\longrightarrow \text{Pôle du système échantillonné} \\
 p_i &\longrightarrow z_i = e^{T_e p_i}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les figures 3.6 et 3.7 montre cette relation.

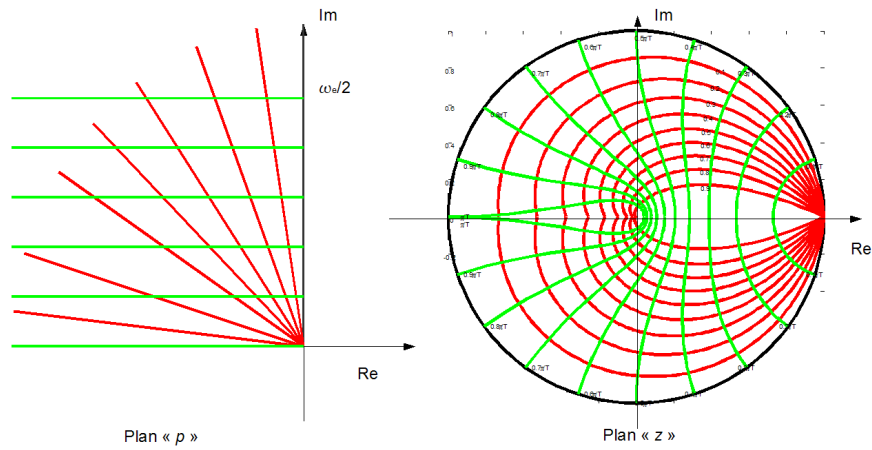


FIGURE 3.6 – Lieu des pôles iso-amortissement.

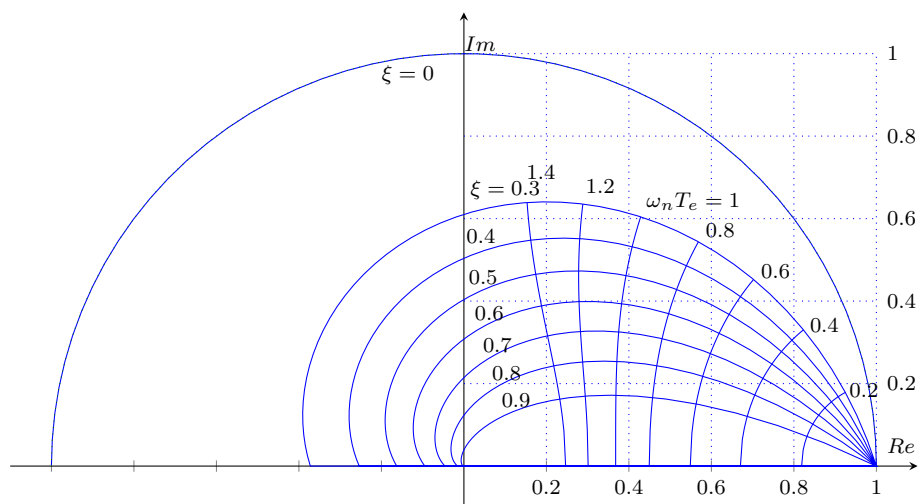


FIGURE 3.7 – Lieu des pôles iso-amortissement.

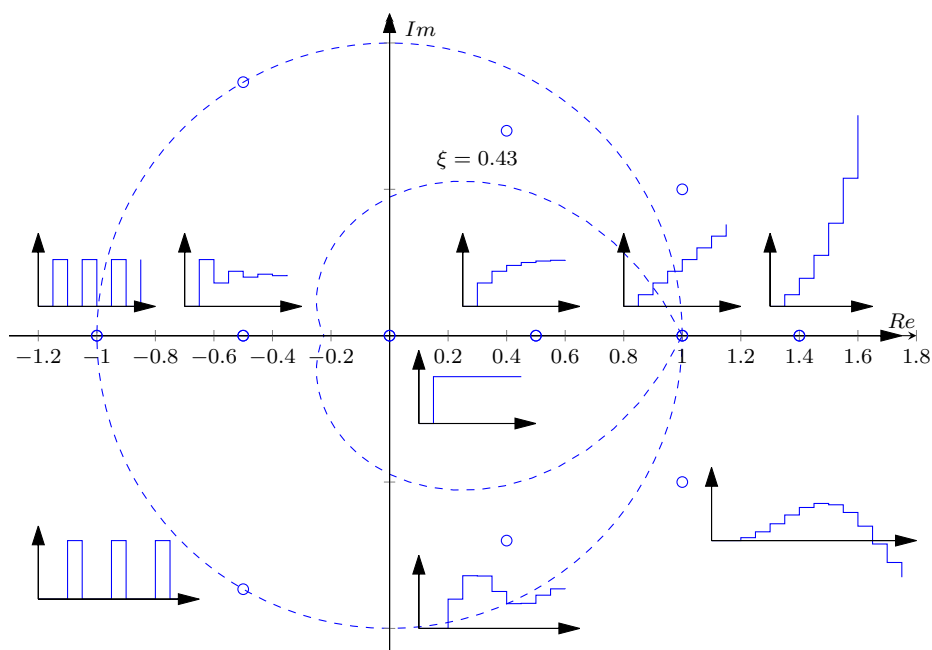


FIGURE 3.8 – Réponses indicielles des pôles en fonction de leur position.

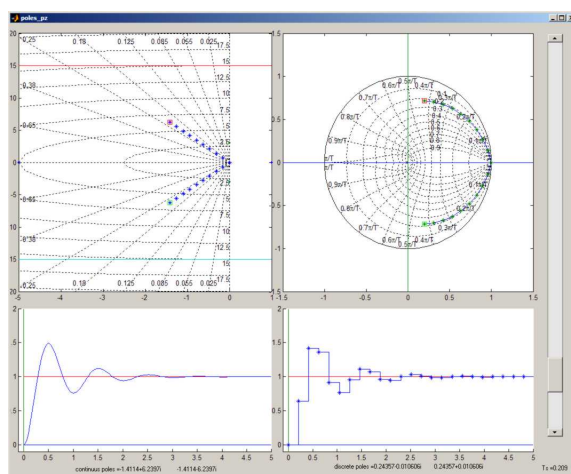


FIGURE 3.9 – Relation entre pôles du système continu et ceux du système échantillonné.

3.3 Le lieu d'Evans

3.3.1 Définition

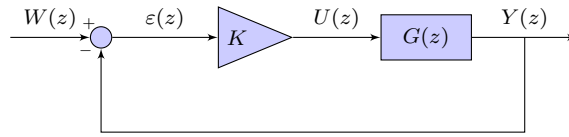


FIGURE 3.10 – Le lieu d'Evans : calcul des pôles du système en boucle fermée par un gain K .

Le lieu d'Evans est le lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée lorsque le gain K varie de 0 à l'infini.

Ce lieu est donc un moyen de choisir un gain K pour obtenir, en boucle fermée, des performances pré-spécifiées. La construction du lieu est assez complexe et fait appel à 8 règles que vous trouverez dans [3]. La synthèse de correcteurs à l'aide de cette méthode est parfaitement possible mais demande un peu d'expérience pour le choix des pôles et des zéros du correcteur. Néanmoins avec une méthode de type "try and error" on arrive à de bons résultats.

Exemple de code Matlab

```
>> sysd=zpk([], [0.1 0.9], 1, 1) %période d'échantillonnage = 1s
>> rlocus(sysd);
>> zgrid
```

3.3.2 Exemples

TABLE 3.1 – Exemple 1

$$G(z) = \frac{1}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque k est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque k augmente, le système "accélère", les pôles se rapprochent et deviennent complexes conjugués
- lorsque k dépasse la valeur de 0.9, les pôles ont un module > 1 , le système est instable

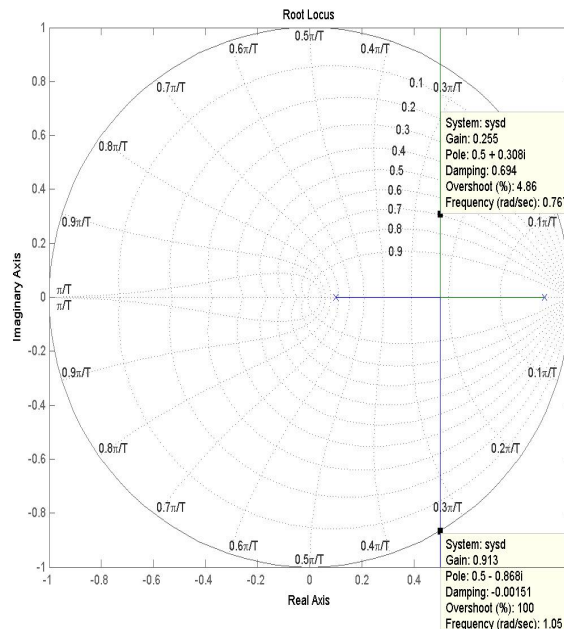


TABLE 3.2 – Exemple 2

$$G(z) = \frac{z-0.5}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque k est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque k augmente, le pôle en 0.9 tend vers le zéro en 0.5, l'autre pôle tend vers $-\infty$
- la limite de stabilité est obtenue pour $k = 1.39$

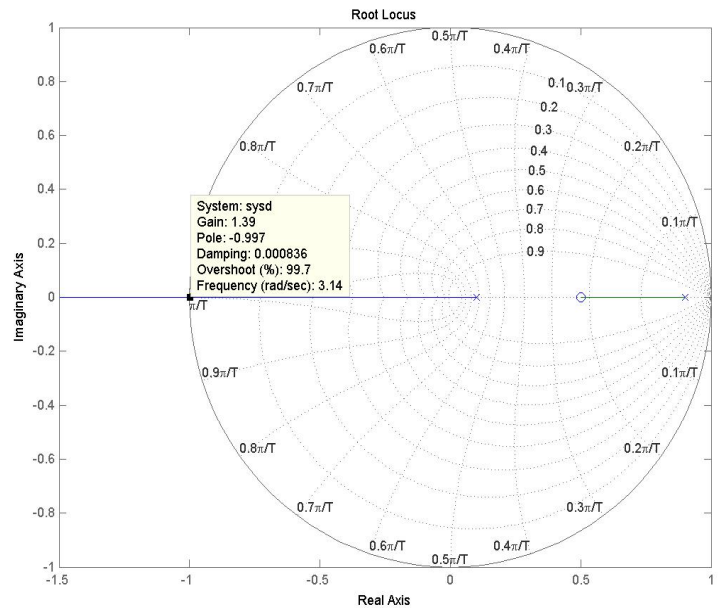


TABLE 3.3 – Exemple 3

$$G(z) = \frac{z+0.5}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque k est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque k augmente, les pôles se rapprochent l'un de l'autre, puis deviennent complexes conjugués
- lorsque k est très grand l'un des pôles tend vers le zéro, l'autre vers $-\infty$

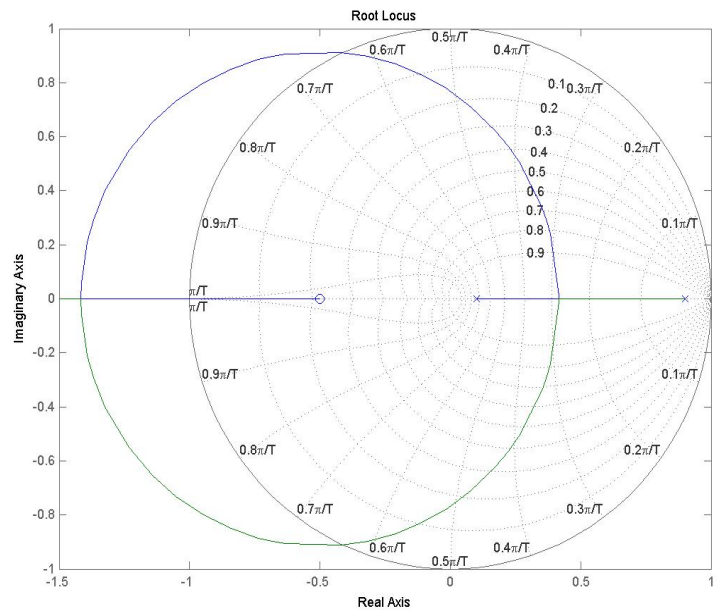


TABLE 3.4 – Exemple 4

$$G(z) = \frac{(z+0.7)(z+0.2)}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque k est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque k augmente, les pôles se rapprochent l'un de l'autre, puis deviennent complexes conjugués
- lorsque k est très grand les pôles en B.F. tendent vers les zéros en B.O..

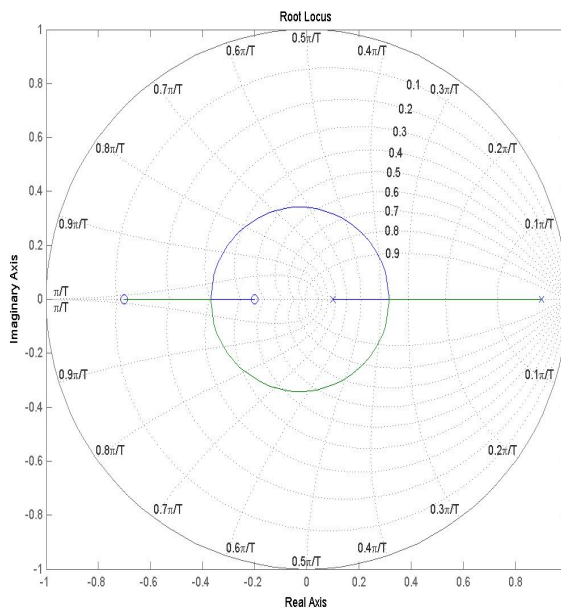
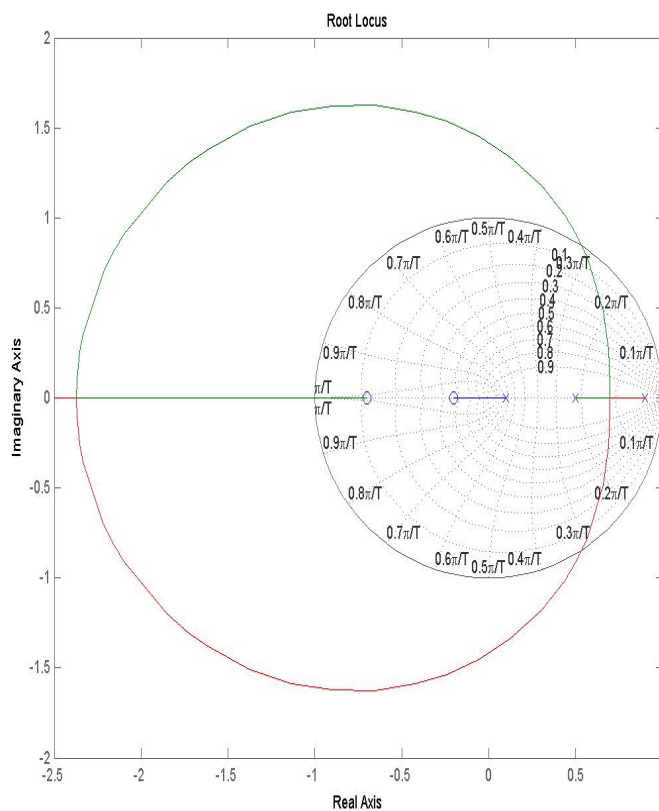


TABLE 3.5 – Exemple 5

$$G(z) = \frac{(z+0.7)(z+0.2)}{(z-0.1)(z-0.5)(z-0.9)}$$

- On retrouve les mêmes tendances que pour les exemples précédents
- les pôles se rapprochent l'un de l'autre avant de devenir complexes conjugués
- lorsque k est très grand les pôles en B.F. tendent vers les zéros en B.O. ou vers l'infini.



3.4 Précision des systèmes échantillonnés

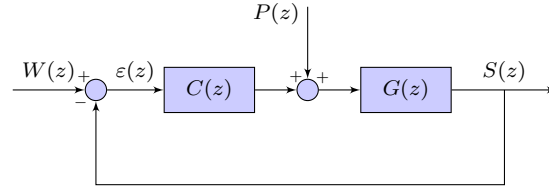


FIGURE 3.11 – Schéma général pour l'étude de la précision des systèmes.

On considère le schéma présenté en figure 3.11. Calculons l'erreur statique du système pour une entrée $W(z)$ en échelon et une perturbation $P(z)$ nulle.

3.4.1 Erreur vis-à-vis de la consigne

L'erreur est :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= W(z) - S(z) \\ &= W(z) - \varepsilon(z)C(z)G(z) \\ \varepsilon(z)[1 + C(z)G(z)] &= W(z)\end{aligned}$$

$$\varepsilon(z) = \frac{W(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Calculons maintenant la limite de $\varepsilon(kT_e)$ lorsque $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Avec une entrée en échelon unité

$$W(z) = \frac{z}{z - 1}$$

on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z - 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)}$$

l'objectif étant d'avoir une erreur statique nulle, il faut que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = 0$$

et par conséquent que :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = 0$$

Supposons maintenant que $C(z)$ ou $G(z)$ possède un intégrateur pur. La transmittance en boucle ouverte peut s'écrire :

$$C(z)G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z - 1)D'(z)}$$

donc

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)D'(z)}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)D'(z)}{(z - 1)D'(z) + N(z)} = 0$$

Conclusion : pour qu'un système présente une **erreur statique nulle** pour une entrée en échelon, il faut que la transmittance en boucle ouverte présente **au moins un intégrateur pur**.

3.4.2 Erreur vis-à-vis de la perturbation

Supposons cette fois que l'entrée $W(z)$ est nulle et que la perturbation $P(z)$ est un échelon unité. L'erreur est :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= W(z) - S(z) \\ &= 0 - (P(z)G(z) + \varepsilon(z)C(z)G(z)) \\ \varepsilon(z)(1 + C(z)G(z)) &= -P(z)G(z)\end{aligned}$$

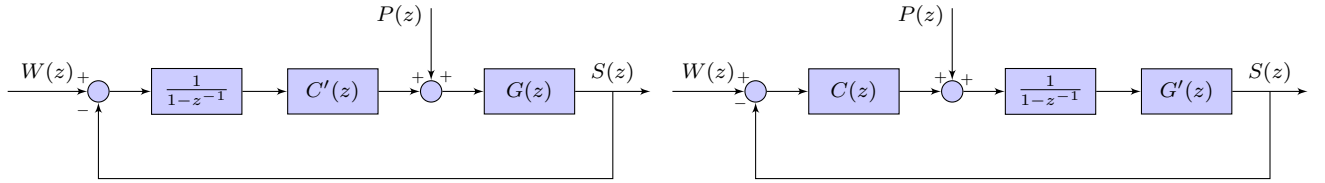
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} \frac{-G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Supposons que le système en boucle ouverte possède un seul intégrateur pur et étudions les deux cas suivants

- Cas 1 : l'intégrateur pur est dans $C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)}$.
- Cas 2 : l'intégrateur pur est dans $G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)}$.

Dans les deux cas :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\frac{N_G(z)}{D_G(z)}}{1 + \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \frac{N_G(z)}{D_G(z)}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)D_C(z)}{D_C(z)D_G(z) + N_C(z)N_G(z)}$$



Cas 1 : l'intégrateur pur est dans $C(z)$.

Cas 2 : l'intégrateur pur est dans $G(z)$.

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} C'(z) = \frac{-N_C(z)}{(z-1)D'_C(z)}$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} G'(z) = \frac{-N_G(z)}{(z-1)D'_G(z)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)(z-1)D'_C(z)}{(z-1)D'_C(z)D_G(z) + N_C(z)N_G(z)} &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)D_C(z)}{D_C(z)(z-1)D'_G(z) + N_C(z)N_G(z)} &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-D_C(z)}{N_C(z)} \neq 0\end{aligned}$$

Conclusion : pour qu'un système présente une **erreur statique nulle** pour une perturbation en échelon, il faut au moins **un intégrateur pur en amont de la perturbation**.

3.4.3 Extension du raisonnement à tous types d'entrées

Calcul de l'erreur vis-à-vis de la consigne, le système étant soumis à une entrée canonique quelconque de la forme $w(t) = t^m$ donc :

$$W(z) = \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}}$$

où $A(z)$ est un polynôme en z n'ayant pas $(z-1)$ en facteur.

La transmittance en boucle ouverte peut s'écrire :

$$CG(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}$$

L'expression de l'erreur est alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{1}{1 + CG(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{1}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}}$$

soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{(z-1)^n D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z} \frac{(z-1)^n}{(z-1)^m} \frac{A(z)D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)}$$

Cas : $n > m$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = 0$$

Cas : $n = m = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(1)D(1)}{D(1) + N(1)} = \frac{A(1)}{1 + \frac{N(1)}{D(1)}} = \frac{1}{1 + K}$$

Note 1 : K est le gain en boucle ouverte (système + correcteur), $K = \frac{N(1)}{D(1)}$.

Note 2 : si $n = m = 0$ alors l'entrée est un échelon unité donc $A(z) = z$.

Cas : $n = m \geq 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{N(z)} = \frac{A(1)D(1)}{N(1)} = \frac{A(1)}{K} = \frac{T_e}{K}$$

Note 1 : K est le gain en boucle ouverte (système + correcteur), $K = \frac{N(1)}{D(1)}$.




Note 2 : $A(1) = m!T_e^m$ (voir tables A.1 page 94).

Cas : $n < m$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \infty$$

Les valeurs de $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e)$ sont résumées dans le tableau 3.6.

TABLE 3.6 – Erreur permanente en fonction de l'entrée et de la classe du système en l'absence d'entrée de perturbation.⁴

classe du système	échelon	rampe	parabole	...
=				...
nb d'intégrateurs purs	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$...
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞	...
1	0	$\frac{T_e}{K}$	∞	...
2	0	0	$\frac{2T_e^2}{K}$...
3	0	0	0	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

4. Une certaine confusion existe dans la littérature concernant ce tableau. Ici, il est donnée pour des entrées canoniques en temps soit $\{1, t, t^2, t^3 \dots\}$ qui se traduisent dans le domaine de Laplace par $\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{2}{p^3}, \frac{6}{p^4} \dots\right\}$ et en z par $\left\{\frac{z}{z-1}, \frac{T_e z}{(z-1)^2}, \frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3}, \frac{T_e^3 z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4} \dots\right\}$.

Pour aller plus loin : Quelle est l'erreur permanente du système représenté en figure 3.12 dans les conditions décrites ?

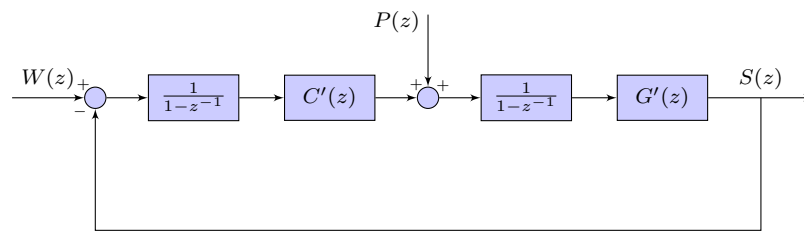


FIGURE 3.12 – Système soumis à une entrée en rampe et une perturbation en échelon.

3.4.4 Cycle limite

Les résultats obtenus précédemment ne tiennent pas compte de la quantification du signal. Cette quantification provoque une non linéarité déstabilisante et par conséquent, une petite oscillation autour de la valeur finale comme illustré en figure 3.13. La précision est alors fonction du pas de quantification.

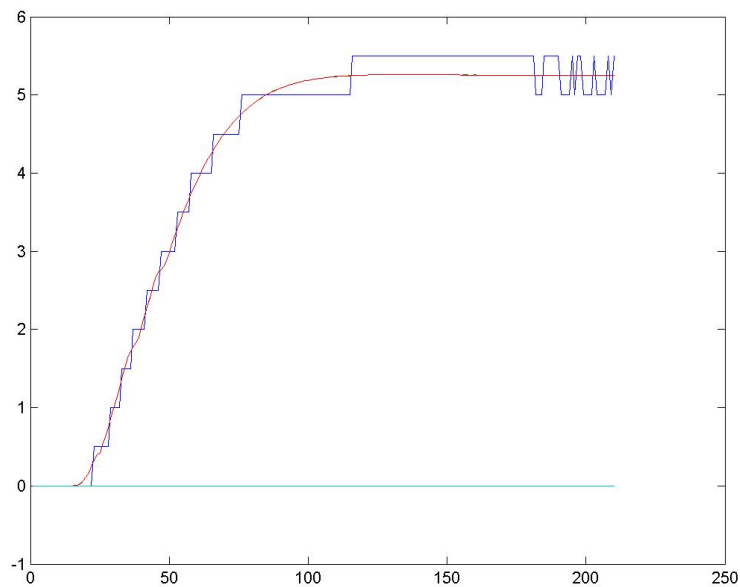


FIGURE 3.13 – Cycle limite dû à la quantification du signal.

Dans le cas de systèmes instables en boucle ouverte, le cycle limite, véritable oscillation entretenue est inévitable. Par contre l'amplitude de cette oscillation est contrôlable par le choix du pas de quantification.

Chapitre 4

Transposition des correcteurs analogiques

Il est, *a priori*, dommage de synthétiser un correcteur analogique puis de le convertir en correcteur numérique. Les méthodes de synthèses numériques abondent et donnent de meilleurs résultats en termes de performances (robustesse, précision, rejet de perturbation). Néanmoins dans le cas où le correcteur analogique est déjà synthétisé et qu'il ne s'agit que de le transposer en numérique, la transformée bilinéaire donnée ci-après se révèle fort utile¹.

Par ailleurs, cette méthode de synthèse de correcteurs numériques couplée à une méthode de synthèse type Ziegler-Nichols permet de synthétiser en quelques minutes un correcteur pour un système dont on ignore tout ou presque et qui plus est, pratiquement sans comprendre l'automatique !

4.1 Les différentes approximations de la dérivée

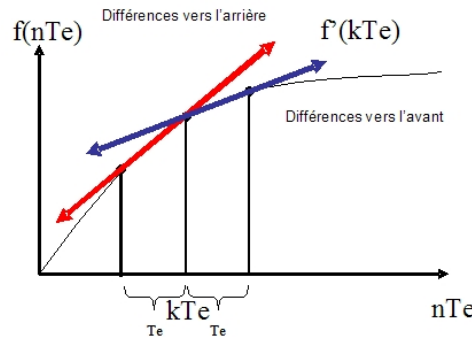


FIGURE 4.1 – Principe de calcul de la dérivée par différences finies : différences vers l'avant et vers l'arrière.

En introduisant l'opérateur retard q .

4.1.1 Différences vers l'arrière

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t) - x(t - T_e)}{T_e} = \frac{1 - q^{-1}}{T_e} x(t) = \frac{q - 1}{qT_e} x(t)$$

$$\text{Dérivation : } p \longrightarrow \frac{z - 1}{zT_e}$$

$$\text{Intégration : } \frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e z}{z - 1}$$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq \frac{1}{1 - T_e p} \implies p \simeq \frac{z - 1}{zT_e}$$

1. La synthèse de correcteur analogiques sort du cadre de ce cours, reportez vous au poly d'automatique linéaire continue de B. Lang

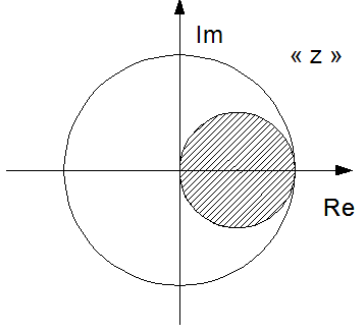


FIGURE 4.2 – Transformée du domaine de stabilité en p . Un système continu instable peut être transformé en un système discret stable.

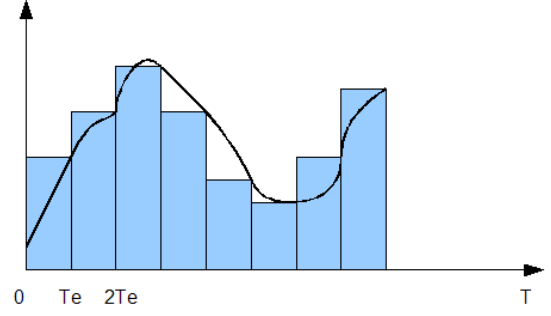


FIGURE 4.3 – Méthode des rectangles : approximation par excès.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=1}^n x(kT_e) T_e \quad i_n = i_{n-1} + T_e x_n$$

4.1.2 Différences vers l'avant

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t + T_e) - x(t)}{T_e} = \frac{q - 1}{T_e} x(t)$$

$$\text{Dérivation : } p \longrightarrow \frac{z - 1}{T_e}$$

$$\text{Intégration : } \frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e}{z - 1}$$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq 1 + T_e p \implies p \simeq \frac{z - 1}{T_e}$$

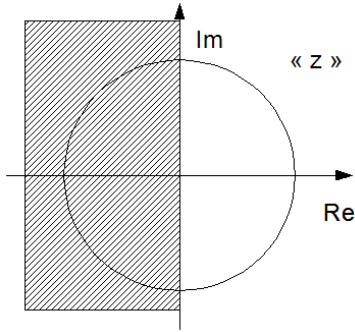


FIGURE 4.4 – Transformée du domaine de stabilité en p . Un système continu stable peut être transformé en un système discret instable.

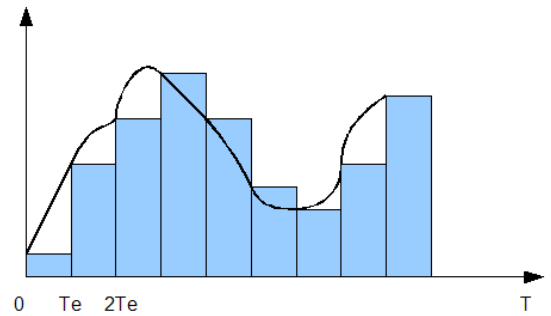


FIGURE 4.5 – Méthode des rectangles : approximation par défaut.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=0}^{n-1} x(kT_e) T_e \quad i_n = i_{n-1} + T_e x_{n-1}$$

4.1.3 Transformation bilinéaire

La dérivée numérique est proche de la moyenne des dérivées au point considéré et au point précédent.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d x(t+T_e)}{dt} + \frac{d x(t)}{dt} \right] \simeq \frac{x(t+T_e) - x(t)}{T_e} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{q+1}{2} \right] \simeq \frac{q-1}{T_e} x(t)$$

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{2}{T_e} \frac{q-1}{q+1} x(t)$$

$$\text{Dérivation : } p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

$$\text{Intégration : } \frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq \frac{e^{\frac{T_e p}{2}}}{e^{-\frac{T_e p}{2}}} \simeq \frac{1 + \frac{T_e p}{2}}{1 - \frac{T_e p}{2}} \simeq \frac{2 + T_e p}{2 - T_e p}$$

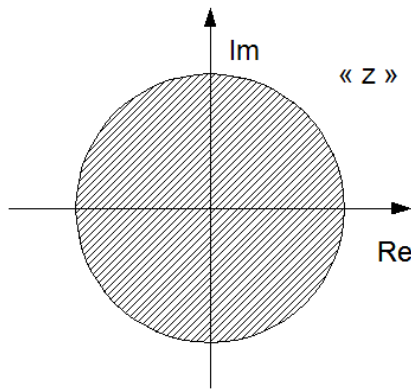


FIGURE 4.6 – Transformée du domaine de stabilité en p . Les deux régions se correspondent rigoureusement.

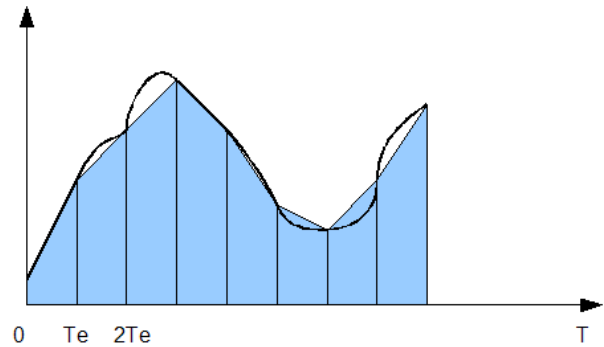


FIGURE 4.7 – Méthode des trapèzes.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=1}^n \frac{x((k-1)T_e) + x(kT_e)}{2} T_e \quad i_n = i_{n-1} + \frac{T_e}{2} (x_{n-1} + x_n)$$

Remarque : La transformation bilinéaire introduit une distorsion des fréquences. Cette distorsion peut être compensée à une pulsation donnée ω_1 par l'utilisation de

$$\text{Dérivation : } p \longrightarrow \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T_e/2)} \frac{z-1}{z+1}$$

4.1.4 Avec Matlab

Seule la transformée bilinéaire est directement implantée, les différences avant et arrière ne le sont pas !

```
>> Te=1;
>> sys=tf([1],[1 1 1])           % définition du système continu
>> sysd=c2d(sys,Te, 'tustin');    % transformée en z par transformée bilinéaire
>> present(sysd);                 % présentation du résultat
>> sysdp=c2d(sys,Te, 'prewarp', 2); % transformée bilinéaire avec précompensée (f1=2rad/s)
>> present(sysdp);                % présentation du résultat
>> sysdb=c2d(sys,Te, 'zoh');       % transformée avec BOZ
>> present(sysdb);                % présentation du résultat
>> W=logspace(-1, 0.5, 200);
>> bode(sys,'r',sysd,'y--',sysdp,'gx',sysdb,'k.', W);
```

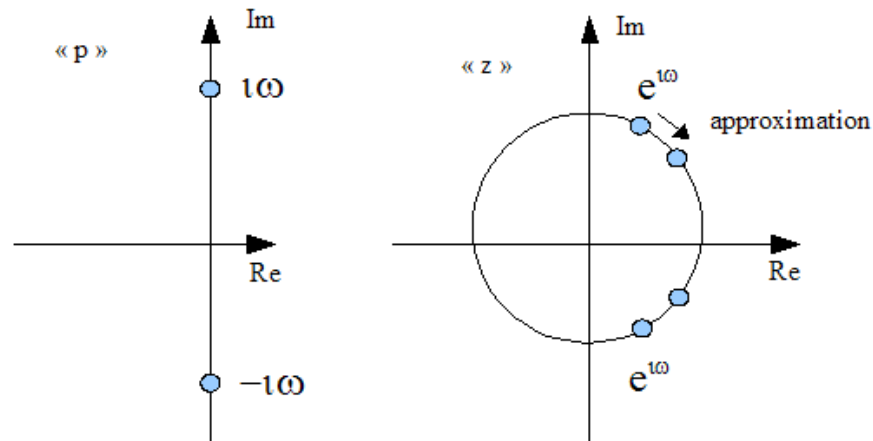
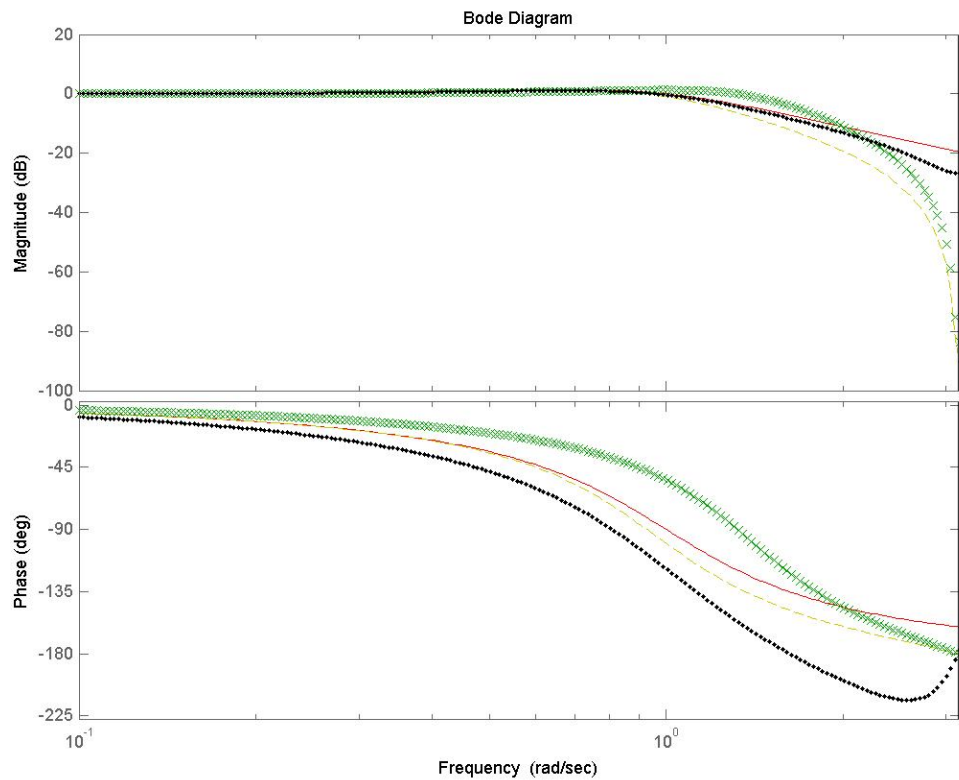


FIGURE 4.8 – Phénomène de distorsion de la transformation bilinéaire.

FIGURE 4.9 – Comparaison des transformées en z d'un point de vue fréquentiel.

—— Système original analogique

..... Transformée avec BOZ

- - - Transformée bilinéaire

+ + + Transformée bilinéaire avec précompensation (en $f = 2$ rad/s.)

4.2 PID analogique

Tous les correcteurs analogiques sont transformables en correcteurs numériques, le plus connu d'entre eux étant le PID. De nombreuses méthodes permettent de calculer les coefficients du correcteur PID à partir d'un modèle du système. Cependant, dans la plupart des cas, un tel modèle n'existe pas. On procède alors des choix de paramètres calculés à partir d'essais effectués sur le système.

4.2.1 Réglages de Ziegler-Nichols

Le correcteur PID s'écrit :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = k_p + \frac{k_i}{p} + k_d p$$

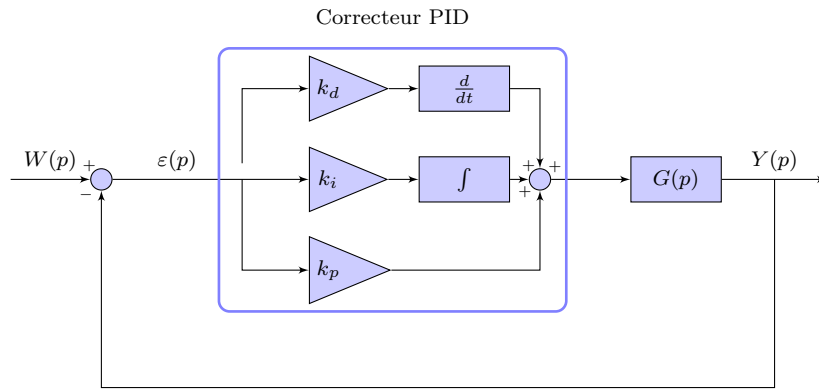


FIGURE 4.10 – Schéma d'un correcteur PID.

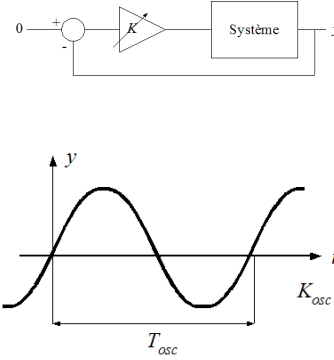
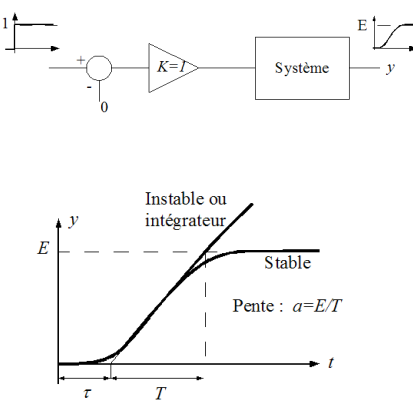
Il faut ensuite transformer le correcteur analogique $C(p)$ en un correcteur numérique par l'une des méthodes de transformation vues précédemment (§4.1 ou §2.5.3).

La transformée bilinéaire est la plus utilisée et donne de bons résultats à condition de choisir une période d'échantillonnage proche du "quasi-continu", c'est-à-dire les limites basses des valeurs communément admises (voir fig. 1.28).

Le tableau 4.1 n'est qu'un bref aperçu de l'ensemble des réglages développés par divers auteurs et qui s'adaptent à une majorité de systèmes. Pour des systèmes plus particuliers ou des réglages plus fins tenant compte des caractéristiques de votre système, voyez les références [13] ou [14] qui proposent plus de 200 réglages !

1. Si le système a un comportement de type intégrateur pur.

TABLE 4.1 – Coefficients d'un PID réglé par les méthodes de Ziegler-Nichols et Chien-Hrones-Reswick : essai indiciel et méthode du pompage.

	Méthode de pompage Boucle fermée	Méthodes apériodiques Boucle ouverte		
	Systèmes stables ou instables en boucle ouverte	Systèmes stables, instables ou intégrateurs		
				
	Ziegler-Nichols	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswick	
	Régulation ou Poursuite	Régulation ou Poursuite	Régulation	Poursuite
P	$K = 0.5K_{osc}$	$K = \frac{1}{a\tau}$	$K = 0.3\frac{1}{a\tau}$	$K = 0.3\frac{1}{a\tau}$
P.I	$K = 0.45K_{osc}$ $T_i = 0.83T_{osc}$	$K = 0.9\frac{1}{a\tau}$ $T_i = 3.3\tau$	$K = 0.6\frac{1}{a\tau}$ $T_i = 4\tau$	$K = 0.35\frac{1}{a\tau}$ $T_i = 1.2T$ ou 10τ ¹
P.I.D	$K = 0.6K_{osc}$ $T_i = 0.5T_{osc}$ $T_d = 0.125T_{osc}$	$K = 1.2\frac{1}{a\tau}$ $T_i = 2\tau$ $T_d = 0.5\tau$	$K = 0.95\frac{1}{a\tau}$ $T_i = 2.4\tau$ $T_d = 0.42\tau$	$K = 0.6\frac{1}{a\tau}$ $T_i = T$ ou 6τ ¹ $T_d = 0.5\tau$

4.2.2 P, PI, ou PID ?

Le choix est toujours un peu ambigu. Le principe de choix communément admis, qui s'applique d'ailleurs à tous les choix de régulateur et correcteurs, est le principe du minimum : si un correcteur P donne les résultats escomptés, on ne met pas un PI, moins encore un PID ! Les tableaux 4.2 et 4.3 donnent un critère de choix en fonction de la réponse temporelle du système à un échelon d'entrée.

Notez la proposition de correcteur de type "tout ou rien", qui fonctionne bien dans les cas où la précision requise est faible ou que le système supporte bien les fortes variations de commande. Si le système est en limite de réglabilité par un PID, il faudra alors revoir la conception de la commande soit par des boucles imbriquées, soit synthétiser un correcteur numérique fondé sur d'autres approches.

Dernier point, mais non le moindre, sachez que les réglages de PID proposés, Ziegler-Nichols (voir page 57) ou Takahashi (voir page 61) sont avant tout des réglages de **régulation** et non pas d'**asservissement**. En d'autres termes, ces réglages sont choisis lorsque l'objectif principal est d'asservir une grandeur à une consigne constante et d'être insensible aux perturbations.

1. voir §4.4.2 page 63

TABLE 4.2 – choix d’une méthode de correction en fonction de l’indice de réglabilité

Réglabilité T/τ	> 20	10 à 20	5 à 10	2 à 5	< 2
Régulateur	Tout ou rien	P	PI	PID	limite du PID ¹

TABLE 4.3 – choix d’une méthode de correction en fonction de l’indice de réglabilité : cas des systèmes instables

Réglabilité $a\tau$	$0.05 < a\tau$	$0.05 < a\tau < 0.1$	$0.1 < a\tau < 0.2$	$0.2 < a\tau < 0.5$	$a\tau > 0.5$
Régulateur	Tout ou rien	P	PI	PID	limite du PID ¹

4.3 Le PID numérique

En continu, la sortie d’un PID s’écrit :

$$u(t) = k_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

L’équivalent en numérique s’écrit alors :

$$u_k = k_p \left(\varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=0}^k \varepsilon_j + T_d \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right)$$

$$u_{k+1} - u_k = k_p \left(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_{k+1} + T_d \frac{(\varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right)$$

$$(z - 1)U(z) = k_p \left(z - 1 + \frac{T_e}{T_i} z + T_d \frac{(z - 2 + z^{-1})}{T_e} \right) \varepsilon(z)$$

d’où la transmittance du PID numérique

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + k_i T_e \frac{z}{z - 1} + \frac{k_d}{T_e} \frac{z - 1}{z}$$

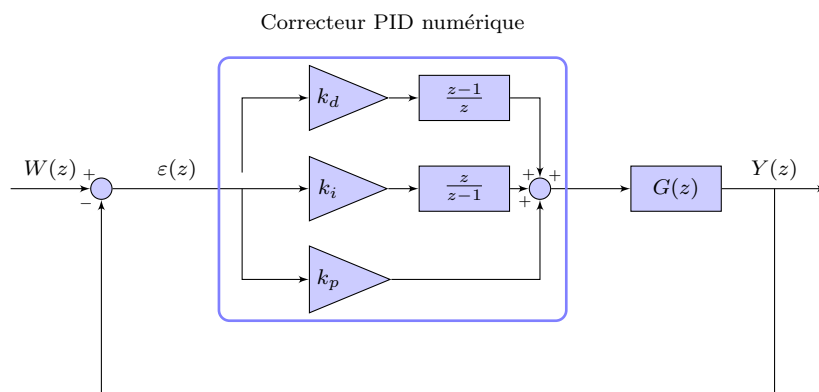


FIGURE 4.11 – Schéma d’un correcteur PID numérique pédagogique.

Ce correcteur reste ”pédagogique”, dans une application industrielle on préférera les formes suivantes :

Applications industrielles des correcteurs PID

1. L'action dérivée idéale provoque une forte augmentation du bruit hautes fréquences, on utilise en pratique une dérivée filtrée. Ceci conduit en discret au régulateur PID filtré :

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + k_i T_e \frac{z}{z-1} + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha}$$

Le choix de α est classiquement de 0.1

2. Lors d'un changement de consigne de type échelon, la dérivée du signal d'erreur entre la consigne et la sortie est très grande (pratiquement une dérivée d'échelon soit un Dirac). La commande PID sur l'écart va engendrer une commande proportionnelle à la variation de l'erreur via le module dérivateur. L'amplitude de cette commande risque d'être inadmissible en pratique. Une solution pour limiter ce phénomène est d'appliquer l'action dérivée seulement sur la sortie du procédé d'où le PID avec la dérivée sur la mesure seule :

$$U(z) = k_p \varepsilon(z) + k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha} Y(z)$$

3. Même remarque que précédemment mais cette fois sur la partie proportionnelle d'où le PID avec l'action proportionnelle et dérivée sur la mesure seule :

$$U(z) = k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \left[k_p + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha} \right] Y(z)$$

Cette dernière solution est bien entendu la meilleure.

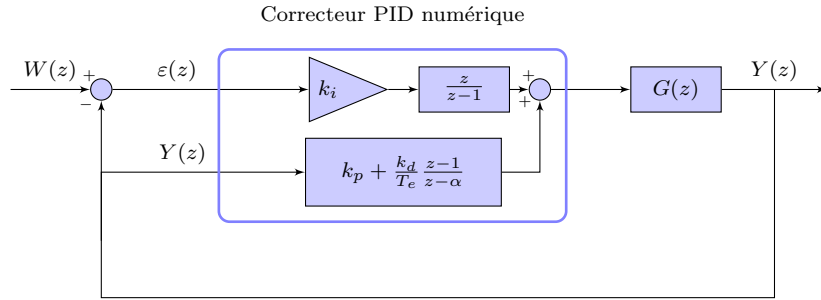


FIGURE 4.12 – Schéma d'un correcteur PID numérique industriel.

4.3.1 Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré

La forme du PID utilisé est :

$$\begin{aligned} U(z) &= k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \left[k_p + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right] Y(z) && \text{PI ou PID} \\ U(z) &= k_p \varepsilon(z) && \text{P} \end{aligned}$$

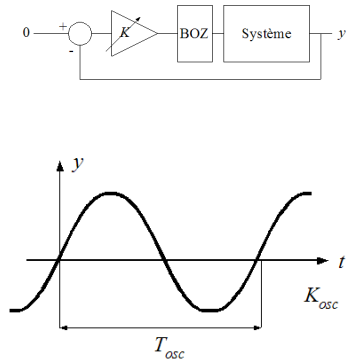
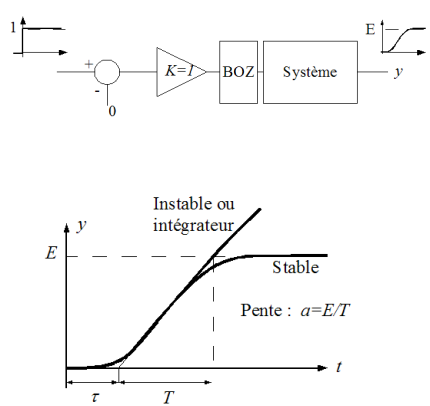
dont les équations récurrentes sont :

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + k_i T_e (y_k^c - y_k) - k_p (y_{k-1} - y_k) - \frac{k_d}{T_e} (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) && \text{PI ou PID} \\ u_k &= k_p (y_k^c - y_k) && \text{P} \end{aligned}$$

Comme pour la méthode de Ziegler-Nichols, il faut alors soumettre le système à l'un des deux essais :

- un essai indiciel qui donne les valeurs de τ et a ,
- un essai en boucle fermée avec un gain K : on augmente K jusqu'à K_{osc} valeur du gain pour laquelle on obtient une oscillation entretenue de période T_{osc} .

TABLE 4.4 – Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré.

	Méthode de pompage Boucle fermée	Méthodes apériodiques Boucle ouverte
	Systèmes stables ou instables en boucle ouverte	Systèmes stables, instables ou intégrateurs
		
P	$k_p = 0.5 K_{osc}$	$k_p = \frac{1}{a(\tau + T_e)}$
P.I	$k_p = 0.45 K_{osc} - 0.5 k_i T_e$ $k_i = 0.54 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$	$k_p = \frac{0.9}{a(\tau + 0.5 T_e)} - 0.5 k_i T_e$ $k_i = \frac{0.27}{a(\tau + 0.5 T_e)^2}$
P.I.D	$k_p = 0.6 K_{osc} - 0.5 k_i T_e$ $k_i = 1.2 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$ $k_d = \frac{3}{40} K_{osc} T_{osc}$	$k_p = \frac{1.2}{a(\tau + T_e)} - 0.5 k_i T_e$ $k_i = \frac{0.6}{a(\tau + 0.5 T_e)^2}$ $k_d = \frac{0.5}{a}$

Ces réglages sont en fait les coefficients qui minimisent l'erreur $\sum_{k \geq 0} |\varepsilon_k|$

4.4 Mise en œuvre d'un asservissement

4.4.1 Anti-windup

Après application du correcteur précédent, la première imperfection qui apparaît est due aux non linéarités du système et en particulier les saturations de l'organe de commande (amplificateur, vanne, ...).

En particulier lorsque l'erreur est importante (démarrage par exemple), l'intégrateur intègre une erreur grande et donc sa sortie est très grande. Lorsque le système arrive à la valeur de consigne, l'intégrateur est encore "plein" et donc le système dépasse largement cette valeur de consigne.

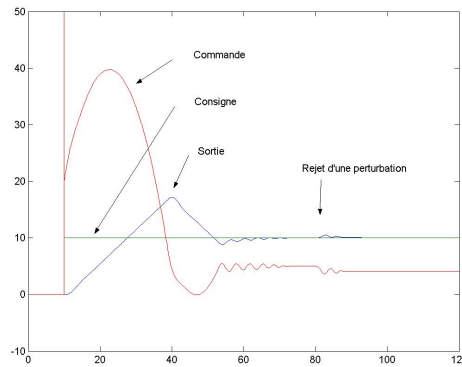
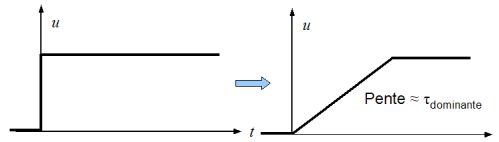


FIGURE 4.13 – Effet de l'absence de saturation sur le terme intégral.

Pour éviter ce phénomène deux méthodes sont de loin les plus utilisées, souvent simultanément :

- la mise en place d'un générateur de trajectoire (ex : bras de robot), afin que le système ne quitte pas son domaine de linéarité.



- la mise en place d'un anti-windup qui limite la valeur stockée dans l'intégrateur pur au maximum de commande admissible par le système.

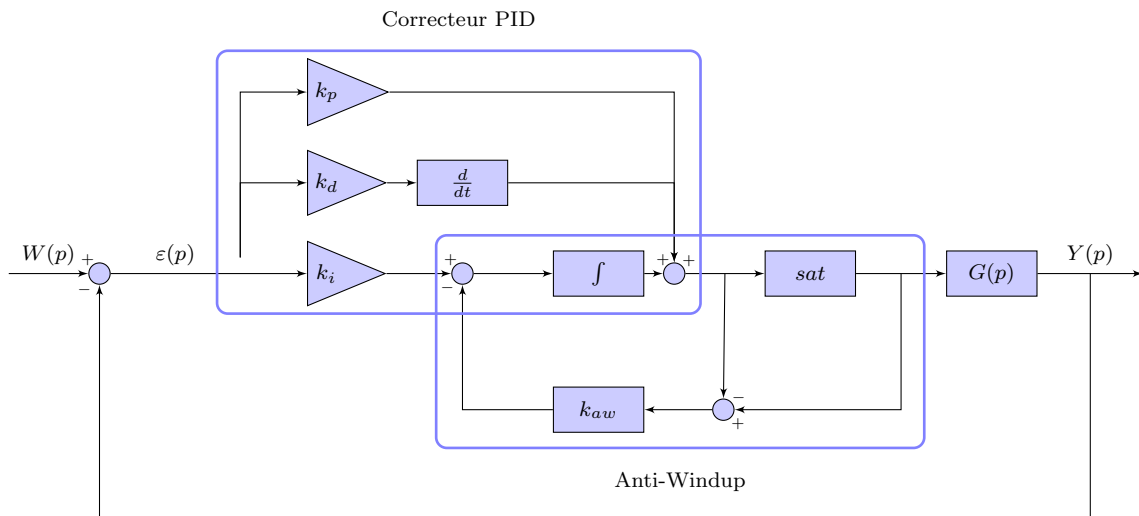


FIGURE 4.14 – PID classique avec anti-windup.

4.4.2 Prédicteur de Smith

Dans le cas de systèmes très retardés, ce qui arrive souvent dans les applications industrielles, les méthodes précédentes ne fonctionnent pas bien. En fait un réglage classique de PID conduit à un système plus lent en boucle fermée qu'en boucle ouverte si le retard pur dépasse la moitié de la constante de temps dominante.

Soit $G(z)$ un système très retardé de la forme.

$$G(z) = G_1(z)z^{-k}$$

Le principe de synthèse est le suivant : on synthétise un correcteur $C_1(z)$ pour le système non retardé $G_1(z)$ puis on adapte ce correcteur pour le système réel $G(z)$.

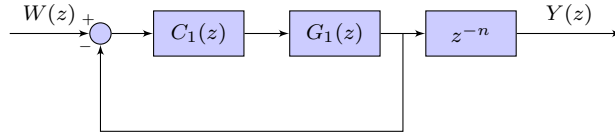


FIGURE 4.15 – Schéma idéal de correction de systèmes très retardés. Utopique car le retard pur n'est pas dissociable du reste de la transmittance du système.

Bien que totalement irréalisable en l'état car le retard pur n'est pas dissociable du reste de la transmittance du système, calculons tout de même la fonction de transfert du système présenté en figure 4.15.

$$F(z) = \frac{C_1(z) G_1(z)}{1 + C_1(z) G_1(z)} z^{-k}$$

En introduisant la transmittance $G(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{C_1(z) G(z)}{1 + C_1(z) G_1(z) - C_1(z)G(z) + C_1(z)G(z)} \\ F(z) &= \frac{C_1(z) G(z)}{1 + C_1(z) G_1(z)(1 - z^{-k}) + C_1(z)G(z)} \\ F(z) &= \frac{\frac{C_1(z)}{1+(1-z^{-k})G_1(z)C_1(z)} G(z)}{1 + \frac{C_1(z)}{1+(1-z^{-k})G_1(z)C_1(z)} G(z)} \end{aligned}$$

qui est de la forme :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

En posant :

$$C(z) = \frac{C_1(z)}{1 + (1 - z^{-k})G_1(z)C_1(z)}$$

$C(z)$ est un correcteur est parfaitement réalisable : voir schéma 4.16.

Exemple de calcul de la boucle de retour du prédicteur de Smith avec Matlab Le système à asservir présente un retard pur de 2 secondes :

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 3p} e^{-2p}$$

```
>> sysc=tf([1],[1 4 3 0]);           % saisie de la fonction de transfert en p
>> sysd=c2d(sysc, 0.1, 'zoh');       % transformée en z avec un BOZ et Te = 0.1
% retour = produit de la transformée du système sans retard par (1-z^-n)
>> retour=sysd*(1-tf(1,1,0.1,'Outputdelay',20));
>> [nu, de]=tfdata(retour,'v')       % récupération du numérateur et du dénominateur
```

Note : la mise en œuvre d'un prédicteur de Smith implique de posséder un très bon modèle du système. Les systèmes présentant des variations de paramètres ne peuvent pas être corrigés par ce type de correcteur.

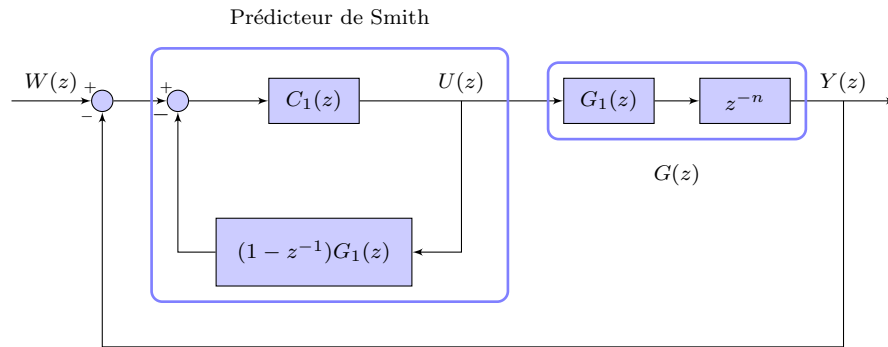


FIGURE 4.16 – Schéma d'un prédicteur de Smith.

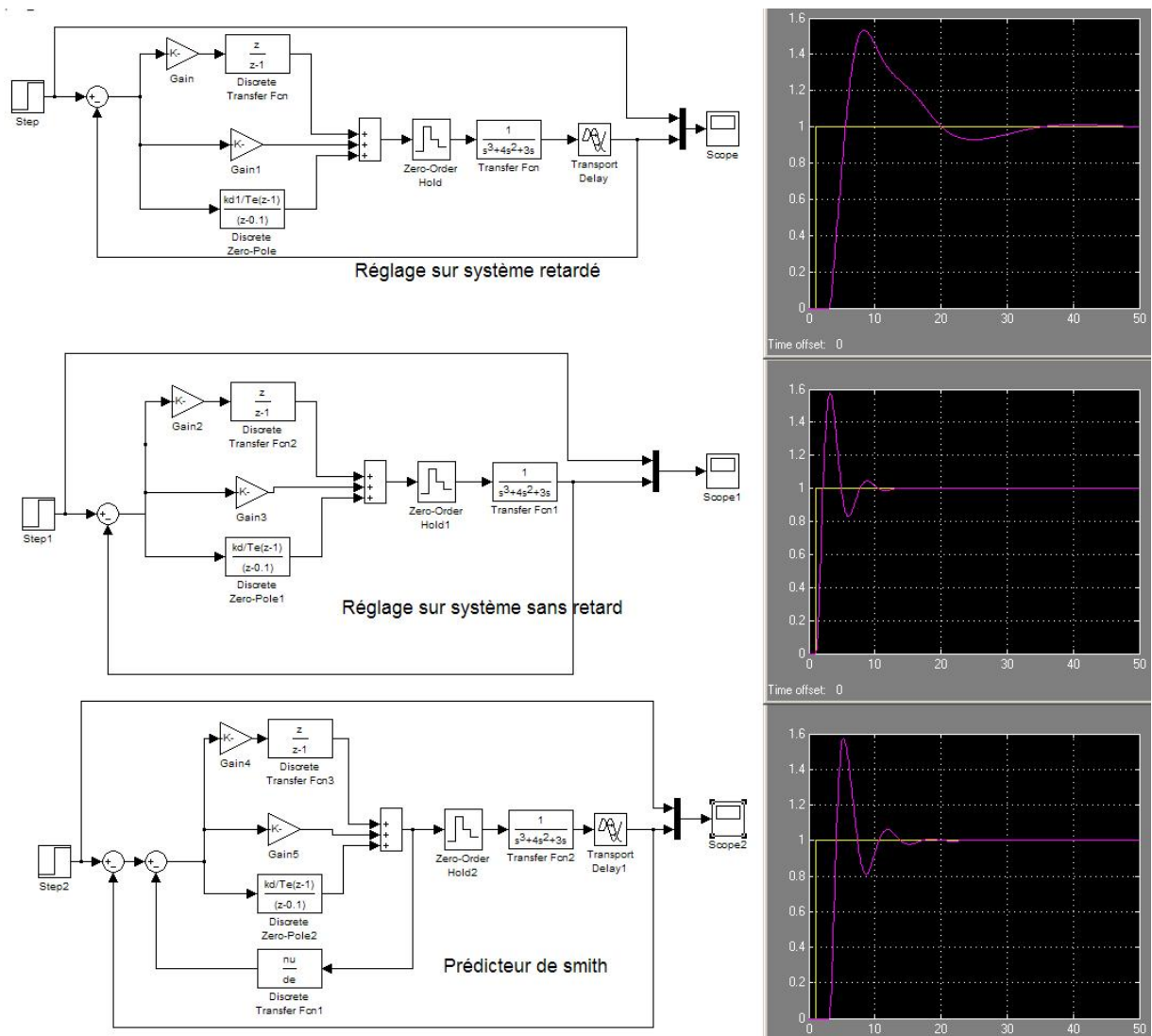


FIGURE 4.17 – Performances d'un prédicteur de Smith.

4.4.3 Algorithme

Le cadencement d'une routine d'asservissement est donné en figure 4.18. Lors de la réalisation du logiciel de commande, deux points sont importants :

- La minimisation du temps entre échantillonnage des capteurs et sortie des commandes. En effet, toute la théorie de la commande échantillonnée suppose que ce temps est nul !
- La minimisation des variations de période d'échantillonnage. Là encore, T_e est supposé constant.

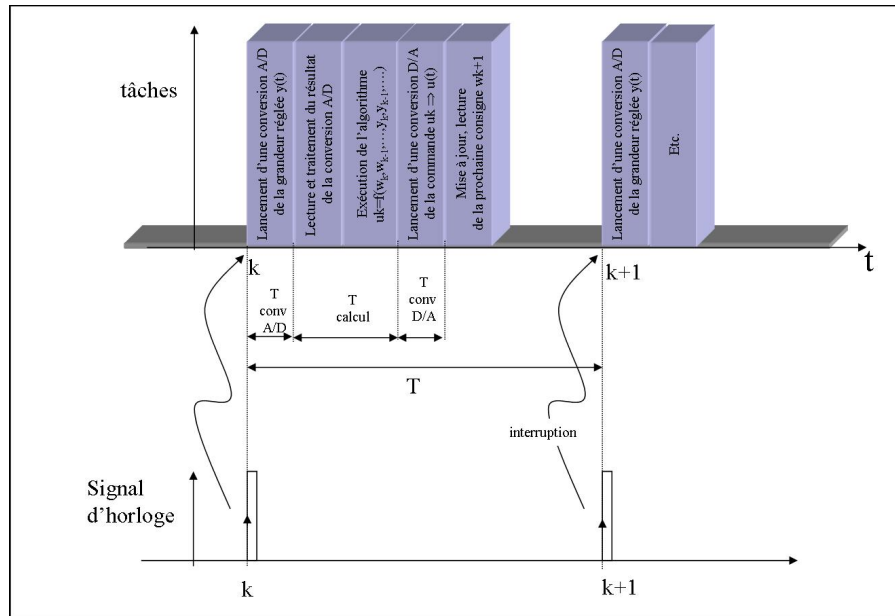


FIGURE 4.18 – Cadencement d'une routine de régulation.

Le cas A de la figure 4.19 est presque idéal. Le cas B est le cas limite, le retard pur introduit par le temps de calcul est de $T_e/2$. Si le temps de calcul est vraiment trop important, il vaut mieux attendre le coup d'horloge suivant pour envoyer la commande. Bien entendu ce cas introduit un retard pur dans le système qui doit être pris en compte au moment de la synthèse (cas C). Un peu d'astuce permet presque toujours de se ramener au cas D où tout ce qui peut être pré-calculé pour la commande suivante l'est juste après la sortie de la commande en cours.

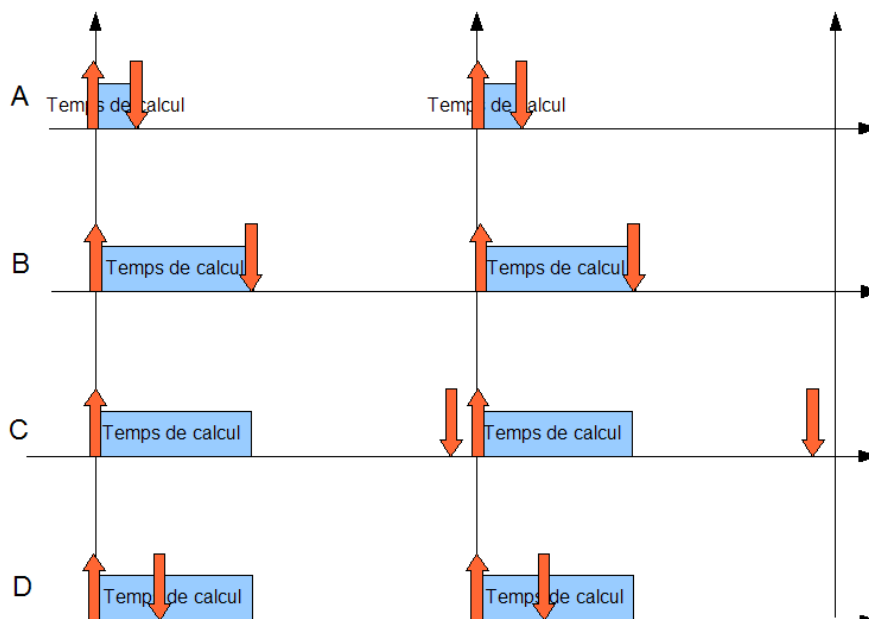


FIGURE 4.19 – Répartition du temps de calcul.

```

Fonction interruption PID( : void) : void
|
|  result : void
|  /* Mesure de la sortie */
|   $y_n \leftarrow \text{CAN};$ 
|
|  /* Calcul de l'erreur */
|   $\varepsilon_n \leftarrow w_n - y_n;$ 
|  /* Calcul des termes du PID */
|   $p_n \leftarrow K_p \varepsilon_n;$ 
|   $d_n \leftarrow K_d(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1});$ 
|   $i_n \leftarrow i_{n-1} + K_i \varepsilon_n;$ 
|  /* Calcul de la commande */
|   $v_n \leftarrow p_n + d_n + i_n;$ 
|  /* Modèle de l'actionneur */
|  Si ( $v_n \leq U_{inf}$ ) Alors
|  |   $u_n \leftarrow U_{inf};$  /* Commande réelle = saturation basse */
|  |
|  |  Sinon
|  |  |  Si ( $v_n \geq U_{sup}$ ) Alors
|  |  |  |   $u_n \leftarrow U_{sup};$  /* Commande réelle = saturation haute */
|  |  |  |
|  |  |  |  Sinon
|  |  |  |  |   $u_n \leftarrow v_n;$  /* Commande réelle = commande PID */
|  |  |  |  Fin Si
|  |  |  Fin Si
|  |  Fin Si
|  /* Sortie de la commande */
|   $\text{CNA} \leftarrow u_n;$ 
|  /* Désaturation du terme intégral */
|   $i_n \leftarrow i_n + u_n - v_n;$ 
|  /* Mise à jour des variables */
|   $\varepsilon_{n-1} \leftarrow \varepsilon_n;$ 
|   $i_{n-1} \leftarrow i_n;$ 
|
Fin

```

Algorithme 1: Algorithme de PID classique avec anti-windup.

Chapitre 5

Synthèses à temps d'établissement fini

5.1 Synthèse en z de correcteurs

5.1.1 Exemple idiot... mais riche d'enseignements

Soit à corriger un système $G(z)$:

$$G(z) = \frac{(z-2)(z-0.5)}{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}$$

On se propose de créer un correcteur parfait, c'est-à-dire, la compensation parfaite du système par le correcteur $C(z)$ soit :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Le système corrigé en boucle ouverte devient donc :

$$C(z) G(z) = \frac{1}{G(z)} G(z) = 1$$

C'est bien un système parfait, il est même inutile de boucler ! Bien entendu cela ne peut pas fonctionner et ce pour deux raisons.

Stabilité

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Inutile de se lancer dans une étude, le correcteur $C(z)$ est ostensiblement instable à cause du pôle en 2, donc extérieur au cercle unité.

Causalité Etudions l'équation récurrente de ce correcteur :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

donc

$$U(z)[(z-2)(z-0.5)] = \varepsilon(z)[(z+0.7)(z-0.8)(z-1)]$$

$$U(z)[z^2 - 2.5z + 1] = \varepsilon(z)[z^3 - 1.1z^2 - 0.46z + 0.56]$$

En multipliant droite et gauche par z^{-2}

$$U(z)[1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}] = \varepsilon(z)[z - 1.1 - 0.46z^{-1} + 0.56z^{-2}]$$

$$U(z) = \varepsilon(z)[z - 1.1 - 0.46z^{-1} + 0.56z^{-2}] + U(z)[2.5z^{-1} - z^{-2}]$$

En revenant à l'original :

$$u(k) = \varepsilon(k+1) - 1.1 \varepsilon(k) - 0.46 \varepsilon(k-1) + 0.56 \varepsilon(k-2) + 2.5u(k-1) - u(k-2)$$

$u(k)$ est une fonction de la commande à l'instant suivant $\varepsilon(k+1)$! Ce correcteur n'est pas causal, il est donc impossible à réaliser.

Les synthèses de correcteurs numériques conduisent souvent à des correcteurs non causaux et/ ou instables, il faut donc systématiquement vérifier :

- la causalité
- la stabilité

La méthode précédente ayant échoué, on se propose de réaliser un autre correcteur pratiquement aussi "idéal" que le précédent mais utilisant le bouclage.

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

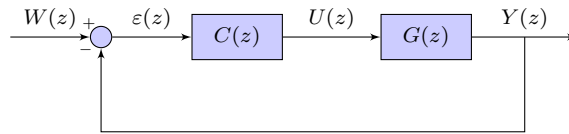


FIGURE 5.1 – Système bouclé.

Première tentative :

$$F(z) = 1 \Rightarrow \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = 1$$

$$\Rightarrow \dots 1 = 0$$

C'est encore impossible !

Deuxième tentative : La perfection étant impossible à atteindre, essayons de déterminer un correcteur qui rendrait le système corrigé équivalent à un retard pur. La sortie suivrait parfaitement l'entrée mais décalée d'une période d'échantillonnage.

On résout donc :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = z^{-1}$$

$$C(z) = \frac{z^{-1}}{G(z)(1 - z^{-1})}$$

Application numérique :

$$C(z) = 0.04 \frac{50.0 z^2 - 5.0 z - 28.0}{2.0 z^2 - 5.0 z + 2.0}$$

causalité : oui

stabilité : non (pôles en 0.5 et 2 !)

Le résultat de cette correction est présenté en figure 5.2. Comme prévu le système est bien instable, mais observez que la réponse continue du système passe bien par 1 aux instants d'échantillonnage !

Essayons de formaliser un peu plus cette approche à l'aide des synthèses à temps d'établissement fini.

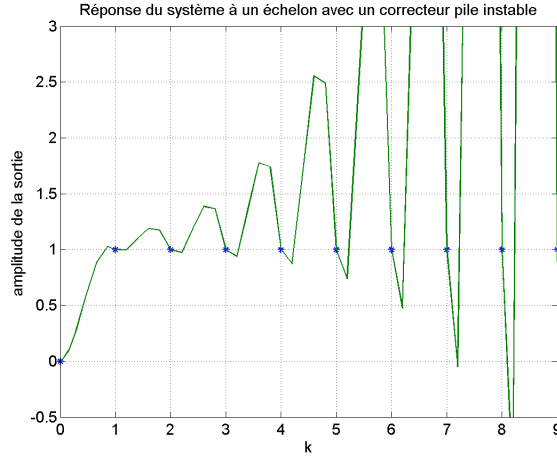


FIGURE 5.2 – Réponse du système à un échelon.

5.2 Synthèses à temps d'établissement fini

Un système est dit "à temps d'établissement fini" lorsque son erreur $\varepsilon^*(k) = 0$ en un nombre fini de périodes d'échantillonnage, l'entrée étant un polynôme en t spécifié (le plus souvent un échelon : t^0).

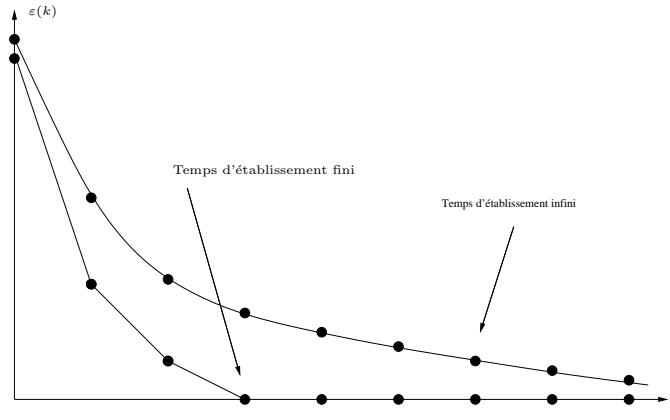


FIGURE 5.3 – Comparaison de l'erreur permanente entre un système à temps d'établissement fini ou infini.

Définition Un système est dit à temps d'établissement fini si l'erreur $\varepsilon^*(t)$ s'annule en un nombre fini d'échantillons, pour une entrée $w(t) = t^m$ spécifiée.

Corollaire $\varepsilon(z)$ est donc un polynôme en z (donc pas une fraction rationnelle)¹.

La transformée en z de $w(t) = t^m$ est de la forme² $W(z) = \frac{W_N(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}}$ avec $W_N(z)$ polynôme en z de degré $d \leq m$.

$$\varepsilon(z) = W(z) - Y(z) = W(z) [1 - F(z)] = \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} \quad (5.1)$$

Où $F(z)$ est la transmittance en boucle fermée.

Pour que $\frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}}$ soit un polynôme il faut et il suffit que $1 - F(z)$ contienne $(1 - z^{-1})^{m+1}$ en facteur, donc $1 - F(z)$ s'écrit sous la forme :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1} K(z) \quad (5.2)$$

1. Calculons $\varepsilon(z)$ de la figure 5.3 par la formule de définition de la transformées en z (2.13)
 $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z^{-1} + \varepsilon_2 z^{-2}$: c'est bien un polynôme.

2. voir eq. 2.11 page 27

où $K(z)$ est un polynôme.

Pour vérification, appliquons le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1 - z^{-1})^{m+1} K(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = 0$$

5.2.1 Synthèse à temps d'établissement minimal absolu

Définition Un système est dit à temps d'établissement minimal lorsque le degré de $\varepsilon(z)$ est minimal.

En reprenant les équations (5.1) et (5.2)

$$\varepsilon(z) = \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = W_N(z)K(z)$$

Si $K(z) = 1$, alors le système est dit minimal absolu. Dans ce cas :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}$$

$$\varepsilon(z) = W_N(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + w_m z^{-m}$$

Donc $\varepsilon^*(t)$ s'annule pour $t = (m + 1)T_e$

Le correcteur $C(z)$ est alors :

$$C(z) = \frac{1 - (1 - z^{-1})^{m+1}}{(1 - z^{-1})^{m+1} G(z)}$$

Remarque 1 : Le correcteur compense les pôles et les zéros de $G(z)$ donc cette méthode de commande ne s'applique qu'aux systèmes ne possédant que des pôles et des zéros stables !

Remarque 2 : seul $\varepsilon^*(t)$ s'annule, pas $\varepsilon(t)$!

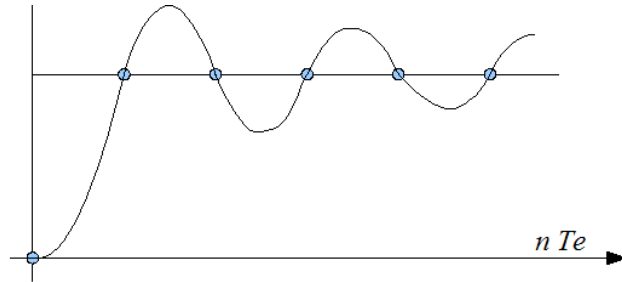


FIGURE 5.4 – L'erreur échantillonnée est bien nulle mais l'erreur continue ne l'est pas.

5.2.2 Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu

Si le système modélisé par $G(z)$ possède des pôles ou des zéros extérieurs au cercle unité, la synthèse à temps d'établissement minimal absolu n'est plus applicable. La synthèse en temps d'établissement minimal consiste alors à chercher $K(z)$ de degré minimal respectant les deux conditions suivantes :

- $F(z)$ doit posséder parmi ses racines les zéros de $G(z)$ extérieurs au cercle unité
- $1 - F(z)$ doit posséder parmi ses racines les pôles de $G(z)$ extérieurs au cercle unité

Démonstration : posons

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), B^-(z), A^+(z), A^-(z)$ sont des polynômes tels que :

$B^+(z)$ contient tous les zéros de $G(z)$ intérieurs au cercle unité (dits "stables")
 $B^-(z)$ contient tous les zéros de $G(z)$ extérieurs au cercle unité (dits "instables")
ainsi que les retards purs du système

$A^+(z)$ contient tous les pôles de $G(z)$ intérieurs au cercle unité (stables)

$A^-(z)$ contient tous les pôles de $G(z)$ extérieurs au cercle unité (instables)

alors :

$$C(z) = \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

Comme $C(z)$ ne peut pas contenir $B^-(z)$ au dénominateur (pôles instables) alors $F(z)$ doit contenir en facteur la partie instable $B^-(z)$. De même, $C(z)$ ne peut pas contenir au numérateur $A^-(z)$ (ce serait de la compensation de pôles de $G(z)$ instable!) donc $1 - F(z)$ doit contenir en facteur $A^-(z)$.

Remarque : les pôles et zéros sur le cercle unité sont à considérer comme instables.

Le problème posé se ramène à la résolution de 3 équations :

$$F(z) = B^-(z)L(z) \quad (\text{non compensation des zéros instables par le correcteur}) \quad (5.3)$$

$$1 - F(z) = A^-(z)J(z) \quad (\text{non compensation des pôles instables par le correcteur}) \quad (5.4)$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}K(z) \quad (\text{temps d'établissement fini}) \quad (5.5)$$

qui se condense en :

$$F(z) = B^-(z)L(z) \quad (5.6)$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z) \quad (5.7)$$

$$K(z) = A^-(z)K'(z) \quad (5.8)$$

Cela revient à résoudre l'équation diophantienne

$$(1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z) + B^-(z)L(z) = 1$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{\text{système}} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.9)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)A'^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.10)$$

$$= \frac{A^+(z)A'^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{B^-(z)L(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z)} \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{B^+(z)(1 - z^{-1})^{m+1}K'(z)}$$

Si la résolution donne

$$K(z) = A^-(z)K'(z) = k_0 + k_1z^{-1} + k_2z^{-2} + \dots + k_nz^{-k}$$

alors

$$\varepsilon(z) = W(z)K(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1z^{-1} + \varepsilon_2z^{-2} + \dots + \varepsilon_{m+n}z^{-(m+n)}$$

Le transitoire est bien de durée finie, mais de $m + n + 1$ périodes d'échantillonnage.

5.2.3 Réponse pile

La réponse pile est un cas particulier des systèmes à temps d'établissement minimal non absolu.

Définition Un système est dit à réponse pile lorsque la sortie continue atteint son régime permanent pour une entrée canonique en un nombre fini d'échantillons.

Conditions Pour pouvoir réaliser un correcteur à réponse pile pour une entrée de type $w(t) = t^m$, il faut que le système présente au moins m intégrateurs purs.

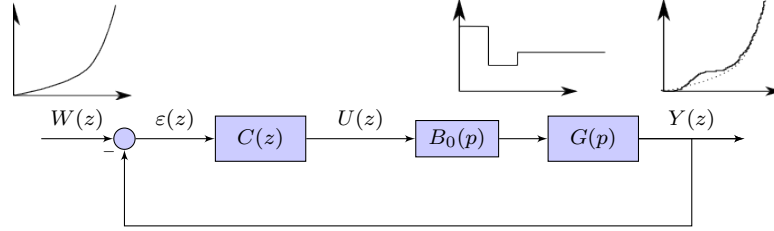


FIGURE 5.5 – Principe et signaux de la réponse pile.

La figure 5.5 montre un exemple classique avec les différents signaux. On veut, pour une entrée en parabole, que la sortie soit une parabole. Le système présentant deux intégrateurs purs, il faut que la sortie du correcteur soit une constante au bout d'un certain temps (le temps d'établissement).

Puisque la sortie du correcteur est constante au bout du temps d'établissement, cette sortie s'écrit comme la somme d'un nombre q fini d'échelons soit :

$$U(z) = \sum_{i=0}^q \frac{u_i z^{-i}}{1 - z^{-1}} = \frac{U_N(z)}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec} \quad U_N(z) : \text{polynôme en } z$$

La sortie du système en boucle fermée est :

$$S(z) = \underbrace{\frac{U_N(z)}{1 - z^{-1}}}_{\text{sortie correcteur}} \underbrace{\frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)(1 - z^{-1})^m}}_{\substack{\text{système décomposé en} \\ \text{num, den et IT purs}^3}} = \underbrace{\frac{W_N(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}}}_{\substack{\text{entrée en } t^m \\ \text{FT en B.F.}}} \underbrace{F(z)}_{\text{FT en B.F.}}$$

Après simplification des termes en $(1 - z^{-1})$ la deuxième partie de l'égalité devient :

$$U_N(z) \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)} = W_N(z)F(z)$$

$$U_N(z) = W_N(z)F(z) \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)}$$

$U_N, F, W_N, A^+, A^-, B^+, B^-$ étant des polynômes, il vient immédiatement que F s'écrit :

$$F(z) = B^+(z)B^-(z)L(z)$$

où $L(z)$ est un polynôme.

La synthèse revient donc à déterminer deux polynômes $L(z)$ et $K(z)$ ($K(z) = A^-'K'(z)$) tels que :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}A^-'K'(z) \quad (5.13)$$

$$F(z) = B^+(z)B^-(z)L(z) \quad (5.14)$$

Ce qui revient à résoudre l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1})^{m+1}A^-'K'(z) + B^+(z)B^-(z)L(z) = 1 \quad (5.15)$$

3. Seuls les m intégrateurs purs nécessaires sont extraits de A^- , si le système présente plus d'intégrateurs purs, ceux-ci sont donc dans A^- , sans perte de généralité dans le raisonnement.

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{\text{système}} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.16)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)A^{-'}(z)(1 - z^{-1})^m}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.17)$$

$$= \frac{A^+(z)A^{-'}(z)(1 - z^{-1})^m}{B^+(z)B^-(z)} \frac{B^+(z)B^-(z)L(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}A^{-'}K'(z)} \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}K'(z)}$$

5.2.4 Applications des synthèses à temps d'établissement fini

- Applications sur systèmes physiques
 - Rarissimes
 - Peu de systèmes restent linéaires avec de telles commandes avec l'exception notable de la boucle de courant dans le cas de l'asservissement des machines à courant continu.
- Applications sur systèmes informatifs
 - Plus courantes
 - Pas de physique, tout reste numérique donc pas de problème entre les instants d'échantillonnage par exemple les observateurs (voir cours de deuxième année) ou le contrôle des systèmes d'information.

5.2.5 Exemples de réponse pile

Le système continu étudié est :

$$T(p) = \frac{5}{p^2 + 2p + 5}$$

Pour $T_e=1s$, sa transformée en z avec un bloqueur d'ordre 0 est :

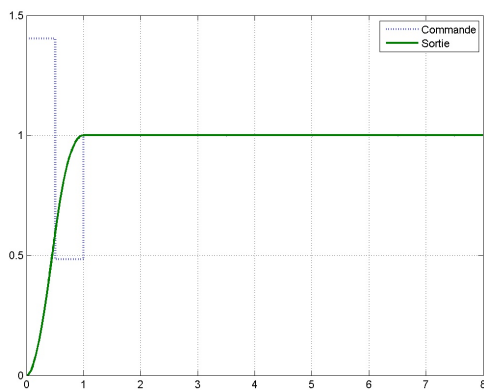
$$T(z) = \frac{0.9858z + 0.4557}{z^2 + 0.3062z + 0.1353}$$

Le correcteur "pile", calculé pour avoir une erreur à l'échelon d'entrée nulle est :

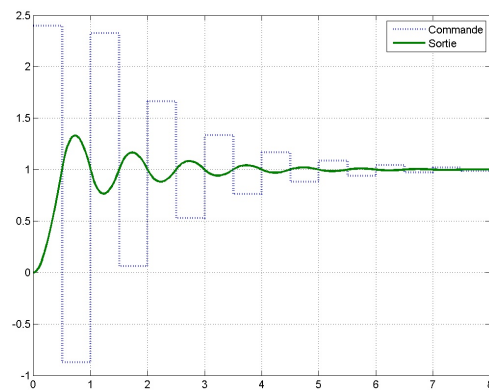
$$C_p(z) = \frac{0.6937z^2 + 0.2124z + 0.09388}{z^2 - 0.6839z - 0.3161}$$

Le correcteur pour avoir un temps d'établissement minimal est :

$$C_{em}(z) = \frac{z^2 + 0.3062z + 0.1353}{0.9858z^2 - 0.5302z - 0.4557}$$

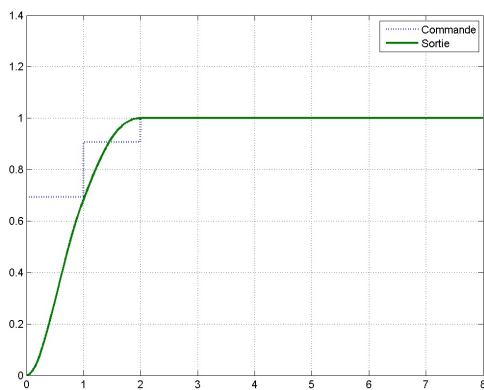


Réponse pile

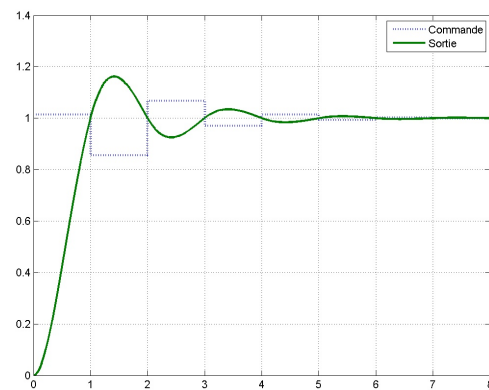


Réponse à temps d'établissement minimal

FIGURE 5.6 – Comparaison des commandes et sorties pour un correcteur "pile" et à temps d'établissement minimum : $T_e=0.5s$.



Réponse pile



Réponse à temps d'établissement minimal

FIGURE 5.7 – Comparaison des commandes et sorties pour un correcteur "pile" et à temps d'établissement minimum : $T_e=1s$.

5.3 Résolution de l'équation diophantienne

Quelle que soit la méthode adoptée pour le calcul du correcteur (Zdan, pile RST, ...), cela revient à la résolution d'une équation diophantienne de la forme :

$$\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$$

où : \mathbb{A} , \mathbb{X} , \mathbb{B} , \mathbb{Y} et \mathbb{C} sont des polynômes en z^{-1}

Cette équation n'admet de solutions que ssi :

$$d^\circ \mathbb{X} + d^\circ \mathbb{Y} + 1 = \max\{d^\circ \mathbb{A}\mathbb{X}, d^\circ \mathbb{B}\mathbb{Y}, d^\circ \mathbb{C}, \}$$
 (5.20)

S'il existe une solution alors :

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{X} &\geq d^\circ \mathbb{B} - 1 \\ d^\circ \mathbb{Y} &\geq d^\circ \mathbb{A} - 1 \end{aligned}$$

Ces conditions étant respectées, deux cas peuvent se présenter :

l'équation est régulière	l'équation est non régulière	
$d^\circ \mathbb{C} < d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B}$	$d^\circ \mathbb{C} \geq d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B}$	
	Solution minimale en \mathbb{X}	Solution minimale en \mathbb{Y}
$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1$ $d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1$	$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1$ $d^\circ \mathbb{Y} = \max\{(d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{B}), (d^\circ \mathbb{A} - 1)\}$	$d^\circ \mathbb{X} = \max\{(d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{A}), (d^\circ \mathbb{B} - 1)\}$ $d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1$

Soit

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-k})(x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k}) + (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})(y_0 + y_1 z^{-1} + \dots + y_l z^{-l}) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_p z^{-p}$$

où $p \leq n + \sup(k, l)$

Par identification terme à terme :

$$\begin{cases} a_0 x_0 + b_0 y_0 = c_0 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 + b_1 y_0 + b_0 y_1 = c_1 \\ a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2 + b_2 y_0 + b_1 y_1 + b_0 y_2 = c_2 \\ \dots \end{cases}$$

soit sous forme matricielle :

$$\max(n+k, m+l)+1 \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & & \vdots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & \vdots & & & b_1 \\ 0 & a_n & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_m & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \\ y_0 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k+1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{l+1}$

Pour que cette matrice soit inversible, il faut que

$$\max(n+k, m+l)+1 = k+l+1$$

Ce qui correspond à l'équation 5.20. Si toutefois cette dernière condition est respectée mais que son déterminant est nul, c'est que les polynômes \mathbb{A} et \mathbb{B} ne sont pas premiers entre eux.

Exemple 1 Soit à résoudre :

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})\mathbb{X} + (0.5 + 0.01z^{-1})\mathbb{Y} = 1$$

$$d^\circ \mathbb{C} \quad ? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \tag{5.21}$$

$$0 < 3+1 \tag{5.22}$$

l'équation est régulière donc :

$$d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 = 2$$

$$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 = 0$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0) + (2 + 3z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2}) = 1$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7297 \\ 0.8649 \\ -0.5676 \\ -0.2432 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 Soit à résoudre :

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})\mathbb{X} + (0.5 + 0.01z^{-1})\mathbb{Y} = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

$$d^\circ \mathbb{C} \quad ? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \quad (5.23)$$

$$4 \geq 3 + 1 \quad (5.24)$$

l'équation est non régulière. On choisi la première forme :

$$d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 = 2$$

$$d^\circ \mathbb{X} = \max\{(d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{A})\}, (d^\circ \mathbb{B} - 1) = \max\{(4 - 3, 0)\} = 1$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0 + x_1z^{-1}) + (0.5 + 0.01z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2}) = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0.01 & 0.5 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0.01 & 0.5 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2930 \\ -1.0000 \\ -4.5860 \\ -7.0803 \\ 19.2996 \end{bmatrix}$$

Si on avais choisi le deuxième forme :

$$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 = 0$$

$$d^\circ \mathbb{Y} = \max\{(d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{B})\}, (d^\circ \mathbb{A} - 1) = \max\{(4 - 1, 2)\} = 3$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0) + (0.5 + 0.01z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3}) = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.01 & 0.5 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0.01 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.01 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4958 \\ 0.9916 \\ 1.9634 \\ -1.6140 \\ 0.8407 \end{bmatrix}$$

Chapitre 6

Méthodes de commande avancées

6.1 Choix des pôles en boucle fermée

C'est un choix qui ne peut être fondé que sur des considérations physiques, on n'asservit pas de la même façon un avion de combat et un avion de ligne ! Quelques règles peuvent pourtant être données, vous saurez les adapter à votre cas particulier.

Si vous avez correctement choisi votre fréquence d'échantillonnage et que votre cahier des charges n'est pas utopique, les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte sont à peu près dans la zone grisée de la figure 6.1.

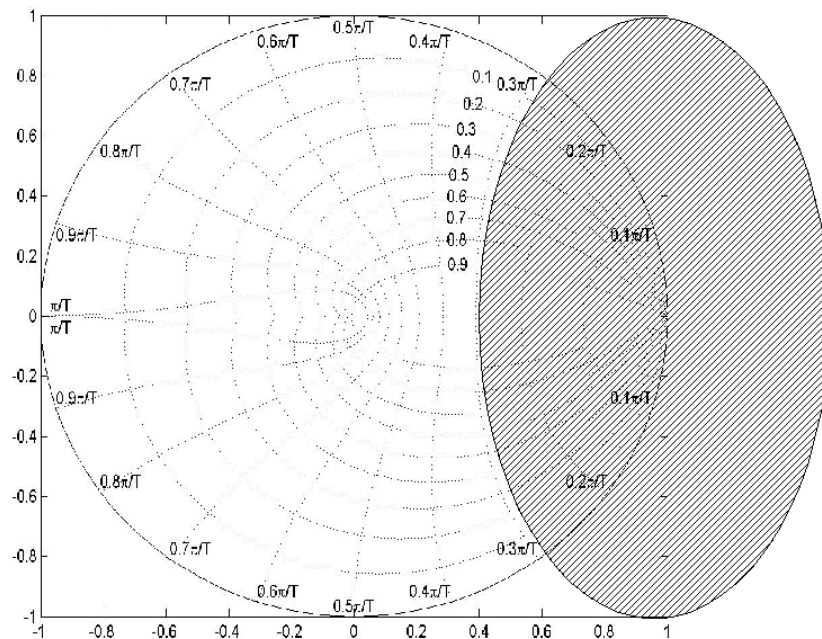


FIGURE 6.1 – Emplacement des pôles en boucle ouverte.

En boucle fermée, vous pouvez espérer accélérer le système d'un facteur 3 à 10. Après cela, vous quitterez le cadre de l'hypothèse fondamentale de ce cours : le système est *linéaire*.

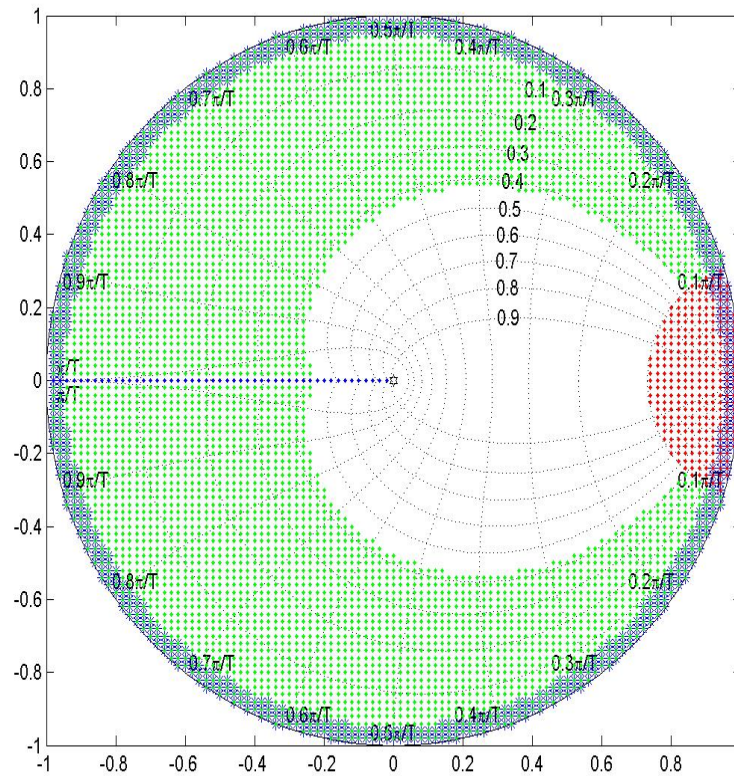


FIGURE 6.2 – Zones de placement des pôles en boucle fermée à éviter.

Les pôles du système en boucle fermée seront choisis en évitant les zones grisées de la figure 6.2. En voici les raisons :

- Pas trop proches du cercle unité. En effet une petite variation de modèle (vieillessement, variation de masse, ...) pourrait engendrer une instabilité du système.
- Pas trop proches du point 1. Sinon, vous ne diminuez pas le temps d'établissement ou alors vous avez mal choisi la fréquence d'échantillonnage.
- Pas de facteur d'amortissement trop petit, cela conduit à des dépassements importants de la consigne et allonge le temps d'établissement.
- Pas de pôles réels négatifs, car ces pôles génèrent une oscillation amortie non souhaitable.

Un pôle est très souvent utilisé, le retard pur (en $z = 0$), pôle le plus "rapide".

Si vous respectez ces critères, vos pôles en boucle fermée devraient être dans la zone non grisée de la figure 6.2. Nous parlons peu des zéros de la fonction de transfert. Non pas qu'ils soient négligeables, bien au contraire ! Ils ont une influence sur le comportement du système mais sont difficiles à contrôler. En fait, leur contrôle demande un correcteur un peu plus complexe. Deux méthodes de synthèse vous sont proposées ci-après.

La première, la méthode de Zdan, ne s'occupe que des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. En présence de zéros, une première synthèse donne un correcteur aux performances assez éloignées du cahier des charges que vous vous êtes posé. Une deuxième synthèse tenant compte de ce premier résultat donne alors de bonnes performances.

6.2 Méthode de Zdan

Les méthodes à temps d'établissement fini conduisent le plus souvent à des correcteurs qui génèrent des commandes trop importantes. Tous comptes faits, on cherche rarement d'aussi bonnes performances pour le système bouclé. En général, une amélioration d'un facteur 3 sur le temps d'établissement et une erreur statique voire de traînage nulle sont suffisantes, compte tenu des saturations du système.

La méthode de Zdan propose de calculer un correcteur tel que le système en boucle fermée se comporte comme un système du second ordre de pulsation propre ω_n et de facteur d'amortissement ξ donnés.

6.2.1 Principe

On impose au système bouclé :

- en régime transitoire : un comportement type second ordre (ω_n et ξ)
- en régime permanent : erreur nulle pour une entrée canonique $w(t) = t^m$ et éventuellement une erreur donnée pour $w_1(t) = t^{m+1}$. Exemple : erreur nulle à l'échelon, erreur spécifiée pour une rampe.

La transmittance à asservir est mise sous la forme suivante :¹

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^l A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), B^-(z), A^+(z), A^-(z)$ sont des polynômes tels que :

- $B^+(z)$ contient tous les zéros de $G(z)$ intérieurs au cercle unité (dits "stables")
- $B^-(z)$ contient tous les zéros de $G(z)$ extérieurs au cercle unité (dits "instables")
ainsi que les retards purs du système
- $A^+(z)$ contient tous les pôles de $G(z)$ intérieurs au cercle unité (stables)
- $A^-(z)$ contient tous les pôles de $G(z)$ extérieurs au cercle unité (instables)

6.2.2 Correcteur de Zdan

Le correcteur est décomposé en trois parties, sous la forme :

$$C(z) = C_1(z) C_2(z) C_3(z)$$

$C_1(z)$ doit annuler l'erreur permanente, compte tenu des l intégrateurs purs déjà contenus dans $G(z)$ donc, en l'absence de perturbations² :

$$C_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{m+1-l}}$$

$C_2(z)$ doit compenser les pôles et les zéros stables de $G(z)$ donc :

$$C_2(z) = \frac{A^+(z)}{B^+(z)}$$

$C_3(z)$ doit imposer le comportement en boucle fermée et comporte au moins autant de paramètres que de spécifications à satisfaire.

Posons :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

$\Delta_1(z)$ et $\Delta_2(z)$ polynômes en z .

1. La synthèse en z est parfaitement possible mais conduit à des erreurs faciles à éviter en utilisant la forme en z^{-1} .
2. En cas de perturbations, le nombre d'intégrateurs purs ne suis pas la formule donnée. Reportez-vous au §3.4.

Donc $C(z)$ est de la forme :

$$C(z) = \underbrace{\frac{1}{(1-z^{-1})^{m+1-l}}}_{\text{erreurs}} \underbrace{\frac{A^+(z^{-1})}{B^+(z^{-1})}}_{\text{compensation dynamique}} \underbrace{\frac{\Delta_1(z^{-1})}{\Delta_2(z^{-1})}}_{\text{compensation dynamique}}$$

La transmittance en boucle ouverte s'écrit alors :

$$C(z) G(z) = C_1(z) C_2(z) C_3(z) G(z) = \frac{B^-(z)\Delta_1(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z)}$$

La transmittance en boucle fermée est :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{B^-(z)\Delta_1(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z) + B^-(z)\Delta_1(z)} = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$

En écrivant l'égalité des dénominateurs on obtient :

$$D_F(z) = (1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z) + B^-(z)\Delta_1(z) \quad (6.1)$$

Choix de $D_F(z)$ Comme indiqué précédemment, on cherche un comportement de type second ordre. Aussi, $D_F(z)$ sera de la forme :

$$D_F(z) = \underbrace{(1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2})}_{\text{pôles dominants}}$$

avec :
$$\begin{cases} p_1 &= -2e^{-\xi\omega_0 T_e} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1-\xi^2}) \\ p_2 &= e^{-2\xi\omega_0 T_e} \end{cases}$$

Voici quelques relations pour la détermination des pôles :

TABLE 6.1 – Valeurs approximatives de l'angle ψ des pôles et du dépassement indiciel en fonction du coefficient d'amortissement ξ

ξ	ψ	Dépassement
1	0°	0 %
0.707	45°	5 %
0.45	60°	20 %
0.20	80°	50 %

Pour

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Temps de réponse à 5% :

$$T_{r5\%} = \frac{3}{\xi\omega_0}$$

Temps de montée (10 à 90% de la valeur finale) :

$$T_m = \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

Premier dépassement

$$D1 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

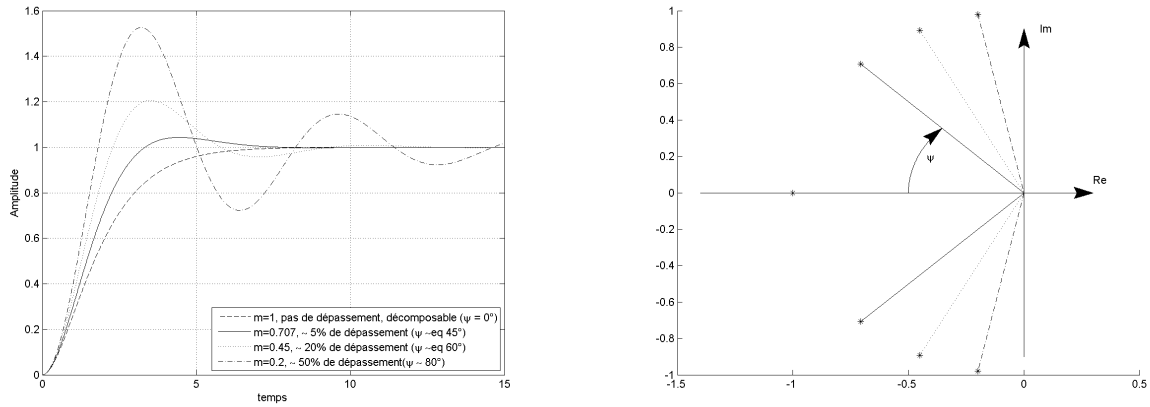


FIGURE 6.3 – Relation entre dépassement et position des pôles dans le plan complexe

Résolution de l'équation 6.1 La méthode de résolution de cette équation est donnée au §5.3 75.

Quelques remarques

Remarque 1 : En prenant $D_F(z) = 1$ on retrouve le correcteur astatique.

Remarque 2 : Rien dans la méthode de synthèse n'oblige à choisir un comportement en boucle fermée de type second ordre, ordre 1 ou 3 ou n marchent aussi, on parle alors de méthode du modèle. Le degré de $D(f)$ n'influe pas sur la complexité du correcteur, tant qu'il reste inférieur à $d^\circ((1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)) + d^\circ(B^-(z))$.

Remarque 3 : En utilisant la décomposition en z^{-1} vous verrez apparaître les retards purs du système. Ceux-ci ne sont pas compensables, en effet un système ayant n retards purs ne répondra jamais en moins de n échantillons. A ce titre, les retards purs doivent figurer dans $B^-(z)$ et se retrouveront dans la fonction de transfert en boucle fermée : $N_F(z) = B^-(z)\Delta_1(z)$.

6.3 Commande RST

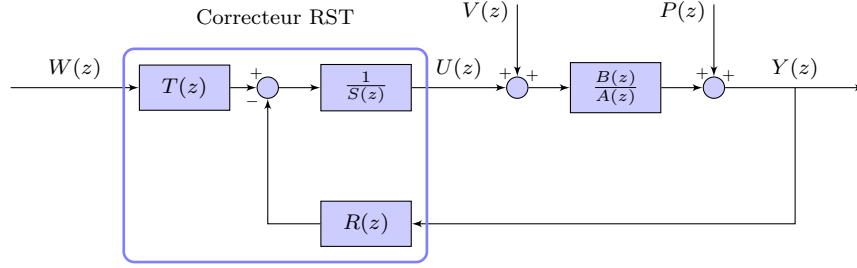


FIGURE 6.4 – Principe de correcteur par correcteur RST. $V(z)$ est une perturbation de charge, $P(z)$ est une perturbation de sortie.

La forme générale de la loi de commande d'un correcteur de type RST est : (voir schéma 6.4)

$$S(z)U(z) = T(z)W(z) - R(z)Y(z) \quad (6.2)$$

donc :

$$U(z) = \frac{T(z)}{S(z)}W(z) - \frac{R(z)}{S(z)}Y(z) \quad (6.3)$$

La sortie du système bouclé est donnée par :

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{B(z)}{A(z)}V(z) + P(z)$$

Afin d'alléger les notations, les arguments des polynômes ne seront plus notés.

En réécrivant (6.2) et (6.3),

$$S U(z) = T W(z) - R Y(z) \quad (6.4)$$

$$A Y(z) = B U(z) + B V(z) + A P(z) \quad (6.5)$$

Explicitons $U(z)$:

$$\begin{aligned} AS U(z) &= AT W(z) - AR Y(z) \\ AS U(z) &= AT W(z) - BR U(z) - BR V(z) - AR P(z) \\ (AS + BR) U(z) &= AT W(z) - BR V(z) - AR P(z) \end{aligned}$$

$$U(z) = \frac{AT}{AS + BR} W(z) - \frac{BR}{AS + BR} V(z) - \frac{AR}{AS + BR} P(z) \quad (6.6)$$

et $Y(z)$

$$\begin{aligned} AS Y(z) &= BS U(z) + BS V(z) + AS P(z) - AR Y(z) \\ AS Y(z) &= BT W(z) - BR Y(z) + BS V(z) + AS P(z) \\ (AS + BR) Y(z) &= BT W(z) + BS V(z) + AS P(z) \end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{BT}{AS + BR} W(z) - \frac{BS}{AS + BR} V(z) - \frac{AS}{AS + BR} P(z) \quad (6.7)$$

6.3.1 Synthèse de la loi de commande RST

Synthèse par placement de pôles On cherche une loi de commande $U(z)$ telle que le système en boucle fermée ait une fonction de transfert modèle donnée de la forme :

$$F_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

or, d'après 6.7 et en supposant $V = P = 0$

$$Y(z) = \frac{BT}{AS + BR}W(z) \quad (6.8)$$

Il faut donc réaliser :

$$\frac{BT}{AS + BR} = \frac{B_m}{A_m} \quad (6.9)$$

Compensation des zéros Afin de simplifier les calculs mais surtout afin d'obtenir une fonction de transfert d'ordre le plus faible possible, on cherche à compenser les pôles et les zéros.

Posons :

$$B = B^+ B^-$$

où :

B^+ contient tous les zéros de $G(z)$ intérieurs au cercle unité (dits "stables")

B^- contient tous les zéros de $G(z)$ extérieurs ou sur le cercle unité (dits "instables")

Note 1 : afin d'obtenir ultérieurement S sous forme monique on prendra B^+ sous forme monique.

Note 2 : concernant les retards purs, ceux-ci étant impossibles à compenser ils font donc partie de B^- , car le système ne peut réagir plus vite que son retard pur.

B^- ne pouvant être en facteur de $AS + BR$ (compensation interdite) il faut que B^- divise B_m , donc :

$$B_m = B^- B'_m$$

B^+ peut être un facteur de $AS + BR$ (compensation permise) il devra dans ce cas diviser aussi S , donc :

$$S = B^+ S'$$

Réécrivons ces résultats, (6.9) devient :

$$\frac{B^+ B^- T}{B^+ (AS' + B^- R)} = \frac{B^- B'_m}{A_m} \quad (6.10)$$

en simplifiant :

$$\frac{T}{AS' + B^- R} = \frac{B'_m}{A_m} \quad (6.11)$$

Ce qui implique que :

$$T = A_0 B'_m \quad (6.12)$$

$$AS' + B^- R = A_0 A_m \quad (6.13)$$

Où A_0 est un polynôme donné dit polynôme observateur par analogie avec la commande par retour d'état (Cours commande avancée 2A).

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est alors :

$$AS + BR = B^+ A_0 A_m \quad (6.14)$$

Remarque 1 : A_0 contient les modes de la boucle fermée qui ne seront pas excités par le signal de commande, par contre ces modes seront excités par une perturbation !

$$\left. \frac{Y}{W} \right|_{P=V=0} = \frac{BT}{AS + BR} = \frac{BA_0 B'_m}{B^+ A_0 A_m} = \frac{B^- B'_m}{A_m} = \frac{B_m}{A_m}$$

Par contre :

$$\left. \frac{Y}{P} \right|_{W=V=0} = \frac{AS}{AS + BR} = \frac{AB^+ S'}{B^+ A_0 A_m} = \frac{AS'}{A_0 A_m}$$

Remarque 2 :

$$\left. \frac{U}{W} \right|_{P=V=0} = \frac{AT}{AS + BR} = \frac{AA_0B'_m}{B^+A_0A_m} = \frac{AB'_m}{B^+A_m}$$

Les zéros stables du procédé apparaissent comme des pôles de la fonction de transfert de W vers U ce qui peut être néfaste (exemple pôles stables à partie réelle négative).

Annulation de l'erreur statique vis-à-vis des perturbations Ce qui suit n'est valable que pour une perturbation P , si la perturbation est en V (voir schéma 6.4), le raisonnement reste identique mais les intégrateurs purs du système (l) ne peuvent être pris en compte, car pour annuler l'erreur l'intégrateur doit être situé entre l'entrée de perturbation et l'erreur.

La fonction de transfert de la boucle est :

$$F_b = \frac{BR}{AS} = \frac{B^-R}{AS'}$$

Pour annuler une erreur statique d'ordre m il faut que F_b ait $m + 1$ intégrateurs purs (échelon : $m=0$, 1 IT pur).

La fonction de transfert du procédé possède déjà l pôles en $z = 1$ donc :

$$A(z) = (1 - z^{-1})^l A^+ A^-$$

Pour que F_b possède $m + 1$ pôles en $z = 1$, il faut que S' soit de la forme :

$$S' = (1 - z^{-1})^{m+1-l} S'_1$$

l'équation diophantienne (6.13) devient :

$$(1 - z^{-1})^{m+1} S'_1 A^+ A^- + B^- R = A_0 A_m \quad (6.15)$$

6.3.2 Choix des polynômes A_m , B_m et A_0

A_m

C'est le dénominateur de la fonction de transfert voulue. Il contient donc les pôles voulus. Comme pour la méthode de Zdan, on les choisit plutôt de la forme deux pôles complexes conjugués dominants et n pôles négligeables.

B_m

Là encore comme pour la méthode de Zdan, B_m doit contenir tous les retards purs du système à corriger. Il contient aussi tous les zéros dit "instables", c'est-à-dire extérieurs au cercle unité.

B_m peut aussi contenir d'autres zéros, en particulier ceux qui, tout en étant intérieurs au cercle unité, ont une partie réelle négative. S'ils sont compensés, donc au dénominateur du correcteur, la commande du système présentera une réponse indicielle alternée rapide, peu appréciée des systèmes (voir fig. 3.8).

A_0

Le polynôme d'"observation" A_0 est, en général, choisi égal à 1, on a alors une dynamique identique en asservissement et en régulation. On peut aussi le choisir de la forme $(1 - az^{-1})$. Dans ce cas, on filtre les perturbations, la réaction de l'asservissement sera plus "douce" mais plus longue.

6.3.3 Cas particuliers du correcteur RST

Le correcteur série

En choisissant $T = R$ on obtient le correcteur série de la forme

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

En reprenant 6.12

$$R = T = A_0 B'_m$$

Si on compense les pôles stables du procédé à l'aide de A_0 le polynôme d'observation :

$$A_0 = A^+$$

donc,

$$R = A^+ B'_m$$

et l'équation diophantienne (6.15) devient :

$$(1 - z^{-1})^{m+1} S'_1 A^+ A^- + B^- A^+ B'_m = A^+ A_m \quad (6.16)$$

soit,

$$(1 - z^{-1})^{m+1} A^- S'_1 + B^- B'_m = A_m \quad (6.17)$$

qui est en fait l'équation diophantienne de la méthode de Zdan en posant :

$$\begin{aligned} \Delta_1(z) &= B'_m(z) \\ \Delta_2(z) &= S'_1(z) \end{aligned}$$

Le correcteur avec modèle

En choisissant $T = A_m$, la fonction de transfert entre $W(z)$ et $Y(z)$ devient

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = B^-(z) B'_m(z) = B_m(z)$$

Ce qui, la plupart du temps se réduit à $B^-(z)$, soit les retards purs du système (et éventuellement les zéros extérieurs au cercle unité). Cela revient donc à une synthèse de type réponse pile. Afin d'éviter des commandes ($U(z)$) trop importantes, on place un modèle de référence en amont de $T(z)$: $\frac{N(z)}{D(z)}$.

Ainsi, la dynamique de réjection de perturbation est fixée par le choix de $A_m(z)$, la dynamique d'asservissement est elle fixée par le choix de $\frac{N(z)}{D(z)}$.

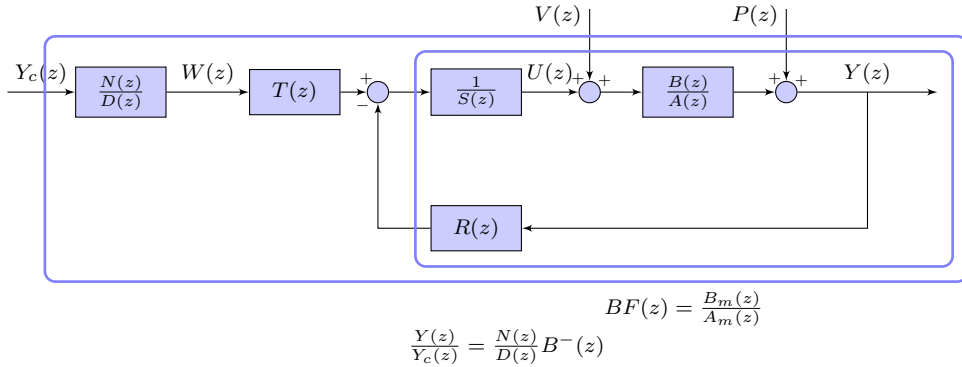


FIGURE 6.5 – Principe de correction par correcteur RST. $V(z)$ est une perturbation de charge de type échelon. $P(z)$ est une perturbation de charge de type rampe

Bibliographie

- [1] E. Ostertag, *Automatique - Systèmes et asservissements continus*. France : Ellipses, 2005.
- [2] B. Lang and V. Minzu, *Commande automatique des systèmes lineaires continus. Cours avec applications utilisant matlab*. France : Ellipses, 2001.
- [3] Y. Sevely, *Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés*. Paris : Dunod Université, 1973.
- [4] H. Bühler, *Réglages échantillonnés, volume 1, traitement par la transformation en z*. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1986.
- [5] Y. Granjon, *Automatique*. Dunod : Ellipses, 2001.
- [6] E. Godoy and E. Ostertag, *Commande numérique des systèmes*. France : Ellipses, 2005.
- [7] B. Jouvencel. Automatique échantillonnée. [Online]. Available : <http://www.lirmm.fr/jouvence/>
- [8] M. Etique. (2005, octobre) Régulation numérique. [Online]. Available : <http://iai.eivd.ch/users/mee/>
- [9] D. Peaucelle. (2003, avril) Systèmes à temps discret, commande numérique des procédés. [Online]. Available : <http://www.laas.fr/%7Epeaucell/DPpages/DPteach.html>
- [10] J. Chemla. (2005, octobre) Systèmes asservis échantillonnés. [Online]. Available : <http://auto.polytech.univ-tours.fr/automatique/SSE/ressources/cours.pdf>
- [11] S. Tliba, M. Jungers, and Y. Chitour. (2005, september) Commande des processus : asservissement numériques. [Online]. Available : <http://www.satie.ens-cachan.fr/automatique/PolyMaster-final.pdf>
- [12] D. Arzelier. Représentation et analyse des systèmes linéaires. [Online]. Available : http://www.laas.fr/arzelier/polycop/n6k1/poly_v5-2.pdf
- [13] K. J. Åström and T. Hägglund, *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning Second Edition*. Research Triangle Park, 1995.
- [14] A. O'DWYER, "Pi and pid controller tuning rules for time delay processes : a summary," 2000. [Online]. Available : citeseer.ist.psu.edu/dwyer00pi.html
- [15] A. Schopenhauer. L'art d'avoir toujours raison. [Online]. Available : <http://www.philo5.com/Mes%20lectures/Schopenhauer,%20L'art%20d'avoir%20toujours%20raison.htm>

Première partie

Annexes

Annexe A

Tables de transformées

TABLE A.1 – Table des transformées de Laplace et en z usuelles.

$\mathbf{X(p)}$	$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(z)}$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)=1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{\tau(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1 - (1 + \frac{t}{\tau})e^{-t/\tau}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_e/\tau}} - \frac{T_e z e^{-T_e/\tau}}{\tau(z-e^{-T_e/\tau})^2}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{p}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{\omega_n^2}{p(p^2+\omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_n T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega_n T_e + 1}$
$\frac{1}{1+2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$	$\frac{\omega_p}{1-\xi^2} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_p t$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$	
$\frac{1}{p(1+2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2})}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_p t + \psi)$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ $\psi = \cos^{-1} \xi$	
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}} - \frac{z}{z-e^{-bT_e}}$
$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1 - \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT_e})} - \frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT_e})}$

TABLE A.2 – Table des transformées en z des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0. T_e est la période d'échantillonnage et $a = e^{-T_e/\tau}$

Transmittance en p	Transmittance en z
$\frac{B_0(p)}{p}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{B_0(p)}{1+\tau p}$	$\frac{1-a}{z-a}, a = e^{-T_e/\tau}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau p)}$	$\frac{(T_e - \tau(1-a))z - aT_e + \tau(1-a)}{z^2 - (1+a)z + a}$
$\frac{B_0(p)}{p^2(1+\tau p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (2+a)z^2 + (1+2a)z - a}$ $b_2 = \frac{T_e^2}{2} + T_e \tau + \tau^2(1-a)$ $b_1 = (\frac{T_e^2}{2} - 2\tau^2)(1-a) + T_e \tau(1+a)$ $b_0 = \tau^2(1-a) - aT_e(\tau + \frac{T_e}{2})$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau_1} + e^{-T_e/\tau_2})z + e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2}}$ $b_1 = \frac{\tau_1(1 - e^{-T_e/\tau_1}) - \tau_2(1 - e^{-T_e/\tau_2})}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2} - \frac{\tau_1 e^{-T_e/\tau_2} - \tau_2 e^{-T_e/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e}{\tau} \frac{a(z-1)}{(z-a)^2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^3}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e(2\tau + T_e)a(z-1)}{\tau^2(z-a)^2} - \frac{T_e^2 a^2(z-1)}{\tau^2(z-a)^3}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (1+a_1+a_2)z^2 + (a_1+a_2+a_1a_2)z - a_1a_2}$ $a_i = e^{-T_e/\tau_i}$ $b_2 = T_e - \frac{\tau_1^2(1-a_1) - \tau_2^2(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_1 = -T_e(a_1 + a_2) - \frac{\tau_1^2(1+a_2)(1-a_1) - \tau_2^2(1+a_1)(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = -T_e a_1 a_2 - \frac{\tau_1^2 a_2(1-a_1) - \tau_2^2 a_1(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $\xi < 1$	$\frac{b_0 + b_1 z}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos(\omega_p T_e) + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$ $b_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} + e^{-\xi\omega_n T_e} \left(\frac{\sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \cos(\omega_p T_e) \right)$ $b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_n T_e} \left(\frac{\xi \sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \cos(\omega_p T_e) \right)$

Annexe B

Travaux dirigés

B.1 TD 1 : Etude d'un cheptel

On souhaite modéliser l'évolution du cheptel d'un éleveur de bovins. Soit :

- x_{1_k} : le nombre de vaches de 1 an,
- x_{2_k} : le nombre de vaches de 2 ans,
- x_{3_k} : le nombre de vaches de 3 ans et plus,
- y_k : le nombre total de vaches.

Ces valeurs représentant des nombres moyens au cours de l'année k .

La natalité du troupeau est telle que :

- Les vaches de 1 an ne se reproduisent pas.
- Les vaches de deux ans produisent en moyenne 0.8 veau par an.
- Celles de trois ans et plus 0.4 veau par an.

D'autre part, seules celles de trois ans et plus meurent de causes naturelles avec un taux moyen de 30 % par an. Enfin l'éleveur s'autorise à acheter ou vendre uniquement des vaches de trois ans et plus. Soit u_k le nombre de vaches achetées ($u_k > 0$) ou bien vendues ($u_k < 0$) au cours de l'année k .

Le système ainsi décrit a une cadence T_e de 1 an. Cette cadence peut s'interpréter comme une période d'échantillonnage si l'on considère que le procédé (élevage) est en réalité continu (les vaches existent entre 2 mesures). La notion d'échantillonnage correspond au choix de compter les vaches une fois par an.

1. Etablir les équations récurrentes de ce système.
2. En déduire la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ et l'équation récurrente qui relie uniquement l'entrée et la sortie du système.
3. Calculer les pôles de la transmittance. Le système est-il stable ?
4. On considère une loi de commande telle que : $u_k = K(y_c - y_k)$. Dessiner le schéma fonctionnel et calculer la transmittance en boucle fermée $G(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)}$.
5. Etudier la stabilité de ce système en fonction de K .
6. Le correcteur K est remplacé par un correcteur $C(z)$ de la forme

$$C(z) = \frac{(k_p + k_i)z - k_p}{z - 1}$$

Déterminer k_p et k_i tels que le système présente deux pôles en 0. Calculer la valeur numérique des deux autres pôles. Quel type de comportement aura alors le système en boucle fermée ?

7. Sans calcul, déterminer le gain statique du système en boucle fermée.

Pour aller plus loin :

- Par le calcul de la valeur finale de la sortie du système soumis à un échelon unité, déterminer le gain statique du système en boucle fermée.
- En supposant un petite erreur de modélisation, les vaches de trois ans et plus ne produisent plus 0.4 mais 0.5 veau par an, quelle est l'erreur statique du système en boucle fermée ?
- Etablir la relation de récurrence entre la commande u_k et la consigne y_{ck} , en déduire les commandes de vaches de 3 ans et plus sur les trois premières années.
- En utilisant Matlab tracer le lieu d'Evans de $H(z)$: Retrouver sur ce lieu le domaine des valeurs de K assurant la stabilité. Observer les réponses à un échelon de ce système pour des valeurs de K correspondant aux différents modes. Quelle est la valeur de K qui vous semble la plus satisfaisante.
- Reprendre la simulation avec Simulink en considérant que la consigne fixée par l'éleveur est d'avoir un cheptel de 30 vaches ($y_c=30$). Observer l'évolution du troupeau et des achats ou ventes de bétail par l'éleveur.

B.2 TD 2 : Etude d'un four électrique

Soit un four électrique. Autour d'un point de fonctionnement, la transmittance liant la variation de température $\theta_s(p)$ à la variation de tension de commande $U(p)$ est de la forme :

$$G(p) = \frac{\theta_s(p)}{U(p)} = \frac{K e^{-10p}}{1 + 100p}$$

Ce four est commandé par ordinateur selon le schéma fonctionnel donné en figure B.1

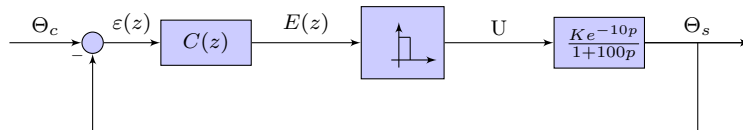


FIGURE B.1 – Schéma fonctionnel de l'asservissement du four.

1. On choisit une période d'échantillonnage $T_e=10$ secondes. Justifier ce choix.
Montrer que la transmittance $H(z)$ du système échantillonné-bloqué d'entrée $E(z)$ et sortie $\Theta_s(z)$ est de la forme :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K(1-a)}{z(z-a)}$$

2. On utilise un régulateur $C(z)$ de la forme :

$$C(z) = \frac{A(z-a)}{K(1-a)(z-\beta)}$$

- Calculer l'erreur statique. On souhaite une erreur statique nulle. Quelle valeur faut-il donner à β ?
 - Etudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de A .
 - Montrer qu'il faut $A < 0.25$ pour avoir une réponse sans dépassement.
 - Pour $A = 0.25$ calculer la réponse du système à un échelon unité. Calculer les 10 premières valeurs de cette réponse et en déduire le temps de réponse à 5%.
3. On souhaite améliorer la rapidité de la réponse indicielle. Pour cela on choisit maintenant un régulateur de la forme :

$$C(z) = \frac{A(z-a)(z-\alpha)}{K(1-a)(z-1)(z-\beta)}$$

Calculer A, α et β pour avoir une réponse en 2 périodes d'échantillonnage.

4. Le correcteur $C(z)$ est-il stable et causal ?
5. Peut-on trouver un correcteur donnant une réponse en une période ?

Pour aller plus loin :

- Calculer les valeurs de A rendant stable le système en boucle fermée par 3 méthodes différentes :
 - Critère de Jury
 - Calcul direct des pôles en boucle fermée
 - Critère de Routh sur la transformée en w
 - Calculer les 10 premières valeurs de la réponse indicielle par deux méthodes différentes.
-

B.3 TD 3 : Synthèses quasi continu

Soit le système défini par sa transmittance opérationnelle $G(p)$

$$G(p) = \frac{2}{(p+1)^3}$$

La réponse de ce système soumis à un échelon d'entrée est donnée en figure.

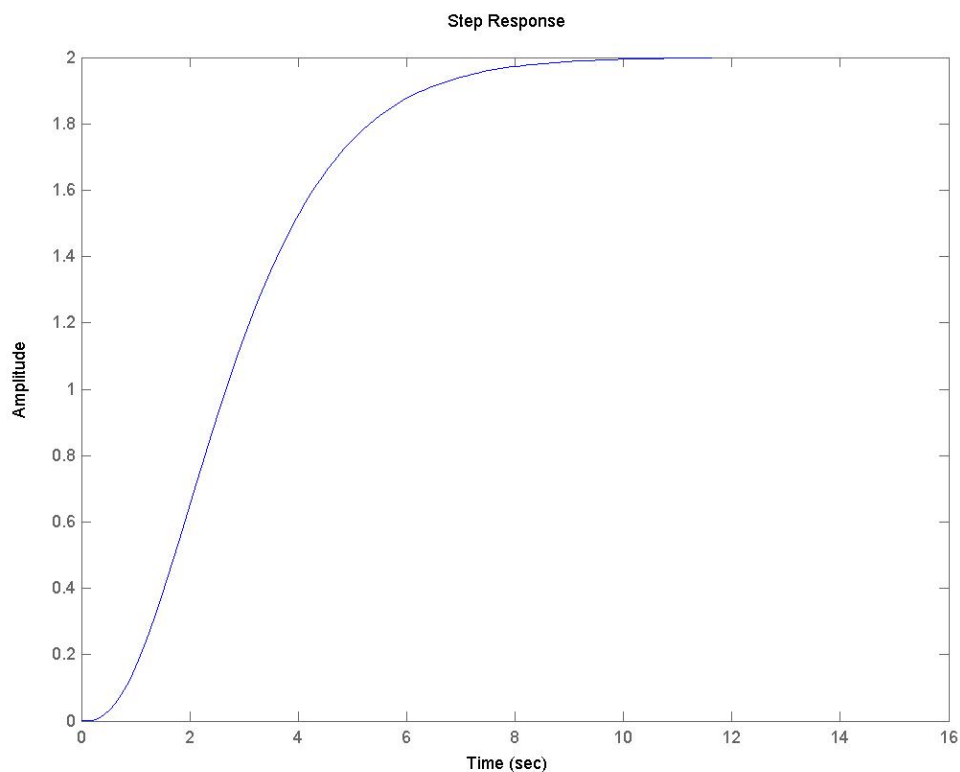


FIGURE B.2 – Réponse indicielle de $G(p)$.

B.3.1 Correcteur de type Ziegler-Nichols

1. Déterminer les valeurs numériques de la plus grande pente a et du retard pur τ (voir tableau 4.1 page 58).
2. Calculer l'indice de réglabilité. Quel correcteur faut-il implanter ?
A des fins pédagogiques, pour que les résultats soient un peu plus flagrants, on choisira $\tau = 1$
3. Calculer les paramètres (K , T_i , T_d) d'un correcteur de type PID de Ziegler-Nichols.
4. En déduire un correcteur numérique par l'application de la transformée bilinéaire.
5. Montrer que la transformée bilinéaire d'un correcteur PID parfait conduit systématiquement à un correcteur instable.
6. Afin de rendre physiquement réalisable le PID on y ajoute un terme filtrant sur le terme "dérivée"

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + p/N} \right) \quad \text{typiquement : } N = 5$$

Déterminer alors le nouveau correcteur numérique.

B.3.2 Correcteur de type Takahashi

1. Avec les valeurs de a et τ déterminées précédemment, calculer les paramètres d'un correcteur de type PI, suivant les réglages de Takahashi.

B.3.3 Implantation sous Matlab-Simulink

Cette partie utilise les fichiers "simuTD4.mdl" et "TD4.m"

Pour une entrée en échelon unité :

1. Simuler les deux correcteurs précédents avec $T_e = 0.5, 0.1, 0.01$ et $0.002s$.
2. Comparer les réponses en fonction de la période d'échantillonnage.
3. Pour $T_e = 0.1s$, comparer les sorties des systèmes corrigés par un correcteur de type Ziegler-Nichols et transformée bilinéaire avec un correcteur de Takahashi. "pédagogique". Observer les commandes.
4. Comparer les sorties des systèmes corrigés par un correcteur de type "pédagogique" avec un correcteur de type Takahashi "industriel"

B.3.4 Anti-windup

Dans cette partie, l'entrée sera un échelon d'amplitude 30. Le système présente une saturation de commande d'entrée à 17 V.

1. Observer la différence de comportement de la sortie entre un échelon unité et un échelon d'amplitude 30.
2. Mettre en place un anti-windup, tel qu'indiqué sur le schéma 4.14 page 62.
3. Déterminer le gain K_{aw} maximum tel que le système reste stable.
4. Pour minimiser encore la commande, lors de la mise en route du système, on place un générateur de trajectoire tel qu'indiqué au §4.4.1. Quelle valeur doit-on donner au "slew rate" afin que l'anti-windup ne soit plus utile ?
5. Avec une perturbation en rampe de pente 1 démarrant à $t = 20s$, interpréter ce qui se passe à $30 < t < 35s$ et $35 < t < 40s$

Pour aller plus loin : Reprendre l'ensemble des simulations avec les correcteur déterminés précédemment et le système suivant :

$$G(p) = \frac{12}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Conclure sur la robustesse des méthodes proposées.

B.4 TD 4 : Comparaison des synthèses à temps d'établissement fini

Le processus continu à contrôler est défini par sa transmittance opérationnelle $G(p)$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$$

Modélisation

1. En prenant $T_e = 1$, montrer que la transformée en z de $B_0(p)G(p)$ est :

$$G(z) = \frac{0.1577z^{-1}(1 + 0.2697z^{-1})}{(1 - 0.3679z^{-1})(1 - 0.0498z^{-1})}$$

Correction

1. Quelle est la différence fondamentale entre réponse pile et réponse à temps d'établissement minimal ?
2. Faire la synthèse dans les deux cas pour une entrée en échelon unité.
3. Vérifier la stabilité et la causalité de vos correcteurs.
4. Comparer les points suivants :
 - la valeur de l'erreur en régime permanent,
 - la valeur maximum de la commande,
 - le temps d'établissement.

Pour aller plus loin :

Comparaison à périodes d'échantillonnage différentes avec Matlab

1. Dans les deux cas, montrer la première commande appliquée $u(0)$ s'écrit sous la forme :
 - Réponse en temps minimal : $u(0) = \frac{3}{b_1}$
 - Réponse pile : $u(0) = \frac{3}{b_1 + b_0}$
2. Déterminer, par dichotomie, la période T_e pour que la première commande effectuée soit inférieure ou égale à 3.
3. En supposant que la commande sature à la valeur 3 et que l'on désire rester dans le domaine linéaire, donc que $u(0) \leq 3$, comparer les temps d'établissement du système bouclé avec chaque correcteur.

B.5 TD 5 : Méthode de Zdan

L'objectif est de mettre en œuvre un correcteur de type Zdan sur un processus simple et d'en "mesurer" les limites.

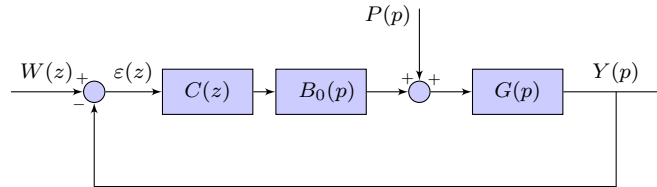


FIGURE B.3 – Système étudié.

Le processus à commander a pour transmittance opérationnelle $G(p)$, définie par :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+p)}$$

Le cahier des charges du système en boucle fermée est :

- dynamique identique à celle d'un système continu du second ordre de pulsation $\omega_n = 0.2 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur d'amortissement $\xi = 0.6$.
 - L'erreur permanente vis-à-vis d'une entrée $W(z)$ en rampe soit nulle malgré une perturbation $P(p)$ en échelon.
1. Proposer une période d'échantillonnage T_e .
 2. Déterminer un modèle $M(z)$ ayant le comportement dynamique demandé par le cahier des charges.
 3. Déterminer le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour satisfaire le cahier des charges. En déduire $C_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n}$.
 4. Après avoir décomposé $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^l A^+(z)A^-(z)}$$

déterminer $C_2(z)$ qui compense les parties compensables de $G(z)$.

5. En posant :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

écrire l'équation diophantienne reliant $\Delta_1(z)$ et $\Delta_2(z)$ aux autres paramètres du système en boucle fermée.

6. Après avoir déterminé l'ordre de $\Delta_1(z)$ et celui de $\Delta_2(z)$, résoudre cette équation diophantienne.
7. Ecrire alors $C(z) = C_1(z) \cdot C_2(z) \cdot C_3(z)$. Ce correcteur est-il stable et causal ?
8. Quelle est la valeur de l'erreur d'ordre 2 en régime permanent ?
9. Quelle est l'erreur permanente due à une perturbation $P(p)$ en rampe ?
10. Que peut-on prévoir quant au dépassement relatif à la réponse indicielle ?

B.6 TD 6 Correcteur RST

L'objectif de ce TD est de déterminer un correcteur de type RST avec des objectifs de régulation et d'asservissement différents. On choisira :

- Une régulation très rapide (rejet de perturbations).
- Un asservissement sans dépassement.

Le système à asservir possède une transmittance en boucle ouverte $G(p)$

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)^2}$$

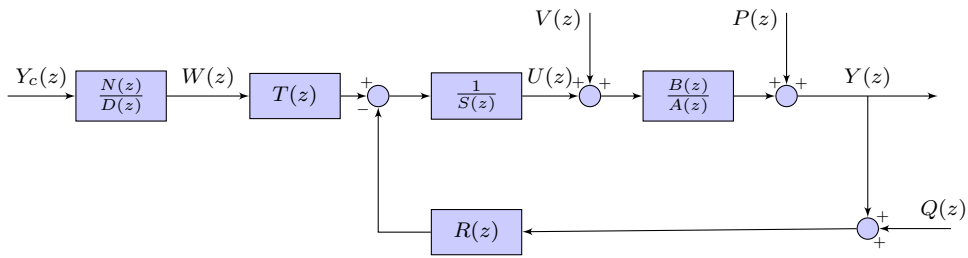


FIGURE B.4 – Principe de correction par correcteur RST. $V(z)$ est une perturbation de charge de type échelon. $P(z)$ est une perturbation de charge de type rampe, $Q(z)$ est une perturbation de capteur de type sinusoïdal à 50 Hz.

Cahier de charges en boucle fermée

- L'erreur permanente d'ordre 0 en réponse à un échelon d'entrée $W(z)$ doit être nulle et ce, y compris en cas de perturbations $V(z)$ en forme d'échelon et en cas de perturbations $P(z)$ en forme de rampe.
- Le système en boucle fermée doit rejeter asymptotiquement les perturbations sinusoïdales $Q(z)$ qui sont un bruit de capteur à 50 Hz.
- La dynamique de rejet des perturbations est telle que le système présente deux pôles complexes conjugués avec 5% de dépassement et un temps de montée de $\tau/2$.
- Le système doit répondre sans dépassement à un échelon de consigne $W(z)$ avec une constante de temps de $\tau_{BF} = \tau$.

Détermination des modèles en boucle fermée

1. Déterminer la transformée en z de du système modélisé par $G(p)$ que l'on nommera $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$.
2. On montrera que le système complet présentera les pôles définis par $D(z)$. Proposer un polynôme $D(z)$ répondant au cahier des charges en asservissement
3. Déterminer un polynôme A_m qui présente les pôles répondant au cahier des charges de la dynamique de rejet des perturbations.
4. En fonction des trois modèles précédents déterminer une période d'échantillonnage correcte.

Synthèse de la régulation Dans cette partie on ne tiendra pas compte de la perturbation sinusoïdale $Q(z)$.

1. Décomposer $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

2. On décompose le polynôme $S(z)$ en un produit de trois polynômes :

- $S_1(z)$ contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour répondre au cahier des charges,
- $S_2(z)$ compense les zéros compensables de $B(z)$,

- $S_3(z)$ assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donner les polynômes $S_1(z)$ et $S_2(z)$.

3. Le polynôme $R(z)$ est décomposé sous la forme suivante :

- $R_1(z)$ est un zéro de transmission à la fréquence de 50 Hz de la forme :

$$1 - 2e^{-\xi_r \omega_r T_e} \cos\left(T_e \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}\right) z^{-1} + e^{-2\xi_r \omega_r T_e} z^{-2} = 1.0000 - 1.9840z^{-1} + 0.9997z^{-2}$$

où ω_r est la pulsation rejetée, ici $\omega_r = 2\pi 50 \text{ rad.s}^{-1}$. ξ_r est le facteur d'amortissement choisi proche de 0, on prendra $\xi_r = 0.001$.

- $R_2(z)$ assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

4. Donner l'équation diophantienne liant $S_3(z)$, $R_2(z)$ et $A_m(z)$ tels que la transmittance du système en boucle fermée présente les pôles imposés par le cahier des charges.
5. Poser cette équation sous forme matricielle.
6. Calculer l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbations.

Synthèse de la régulation

1. Le polynôme $T(z)$ sera pris égal à $A_m(z)$. Montrez que la transmittance opérationnelle liant la consigne et la sortie est :

$$H(z) = \frac{B^-(z)N(z)}{D(z)}$$

2. Déterminer $N(z)$ tel que le gain de l'ensemble soit unitaire.
3. Donner $U(z)$ en fonction de $Y_c(z)$ et $Y(z)$.
4. En déduire l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

B.7 TD 7 Asservissement de position d'une machine à courant continu

Ce TD à pour objet l'étude de l'asservissement de position d'une machine à courant continu commandée par l'induit¹.

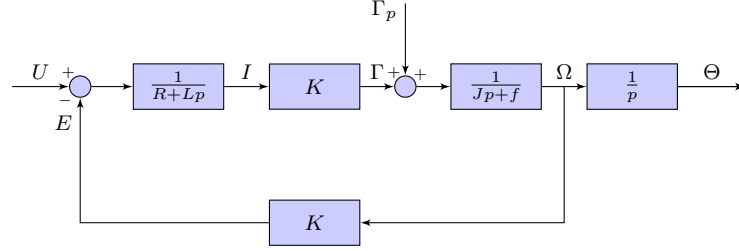


FIGURE B.5 – Schéma bloc de la machine à courant continu commandée par l'induit.

On procédera dans l'ordre à l'asservissement :

- de courant
- de vitesse
- de position

Les constantes de temps $\tau_e = \frac{L}{R}$ et $\tau_m = \frac{J}{f}$ étant très différentes

B.7.1 Boucle de courant

Dans cette partie on ne considère que la constante de temps électrique du moteur, la force électromotrice E est considérée comme une perturbation. Le hacheur est considéré comme étant un retard pur de 1 période d'échantillonnage. Le correcteur $C_I(z)$ sera implanté comme indiqué sur la figure B.6.

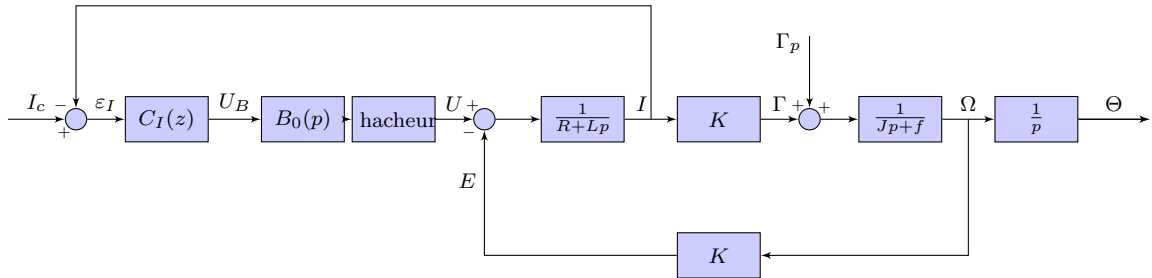


FIGURE B.6 – Asservissement numérique de courant.

1. Dessiner le schéma simplifié en fonction des hypothèses ci-dessus.
2. Déterminer la transformée en z de l'ensemble {Bloqueur d'ordre 0, hacheur, Constante de temps électrique}.
3. Déterminer un correcteur $C_I(z)$ qui permet une réponse pile en deux coups d'horloge.
4. Vérifier la stabilité et la causalité de votre correcteur $C_I(z)$.
5. On se propose d'implanter un correcteur de Dahlin de la forme :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{(1 - \alpha)z^{-k}}{1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-k}}$$

avec α aussi petit que l'on veut.

1. C'est la commande la plus classique pour un moteur d'asservissement qui, la plupart du temps, ne possède pas d'inducteur !

6. Montrer que l'utilisation de ce correcteur revient à imposer en boucle fermée un comportement de type :

$$M(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

7. Quelles sont les limites d'un tel correcteur ?

8. Ce correcteur garantit-il une erreur statique nulle, y compris en présence de la perturbation E ?

B.7.2 Boucle de vitesse

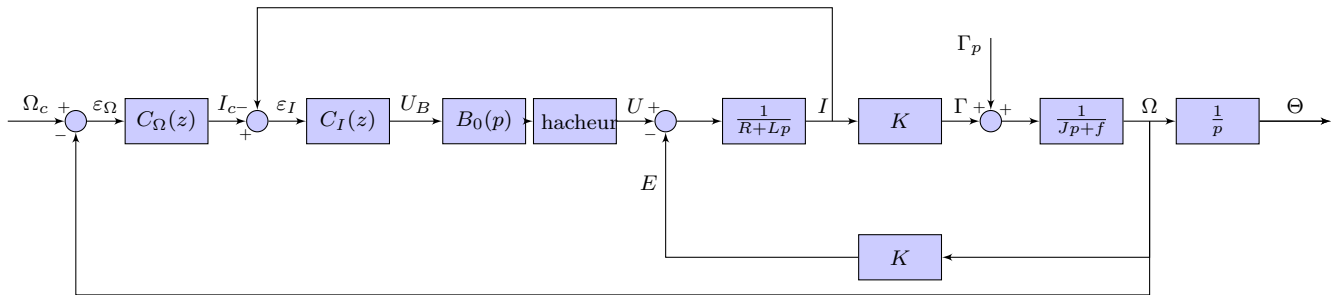


FIGURE B.7 – Asservissement numérique de vitesse.

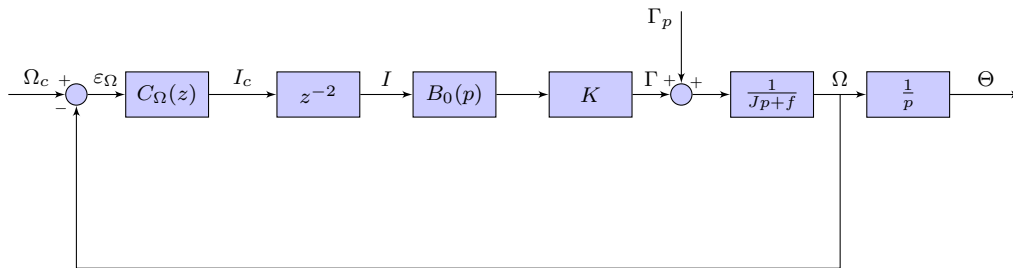


FIGURE B.8 – Asservissement numérique de vitesse, schéma simplifié.

1. Montrer que le schéma bloc de la figure B.7 peut se réduire au schéma B.8.
2. Déterminer la fonction de transfert $G_\Omega(z)$ qui lie la vitesse $\Omega(z)$ à la consigne de courant $I_c(z)$.
3. Déterminer un correcteur $C_\Omega(z)$, tel que :
 - la constante de temps du système en boucle fermée soit trois fois plus petite que la constante de temps en boucle ouverte,
 - l'erreur statique soit nulle, y compris en présence de perturbations Γ_p en échelon.

B.7.3 Boucle de position

1. Les deux correcteurs précédents étant en place, déterminer la fonction de transfert entre l'entrée de consigne de vitesse $\Omega_c(z)$ et la position de la machine $\Theta(z)$.
2. On désire commander la position par un échelon commande, déterminer un correcteur $C_p(z)$ tel que l'erreur statique soit nulle.

B.7.4 Equation récurrente du correcteur

1. Déterminer l'algorithme implanté dans le calculateur qui réalise les trois boucles imbriquées précédemment déterminées.

Pour aller plus loin : Reprendre les synthèses précédentes en utilisant :

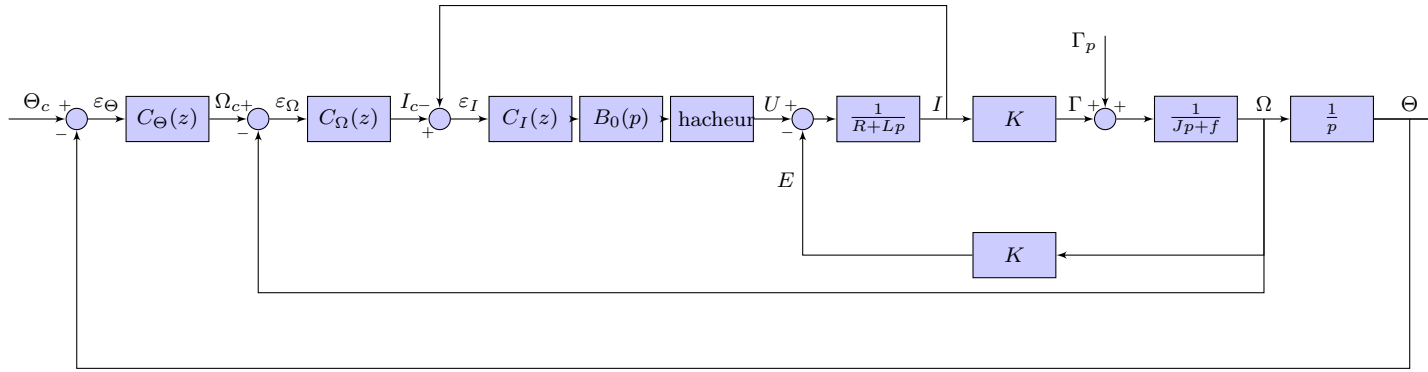


FIGURE B.9 – Asservissement numérique de position.

- Une synthèse à temps d'établissement minimum pour synthétiser $C_I(z)$.
- Une synthèse de type réponse pile pour synthétiser $C_Ω(z)$.
- Une synthèse type PID Ziegler-Nichols + transformée bilinéaire pour $C_p(z)$

Annexe C

Tutorial Matlab

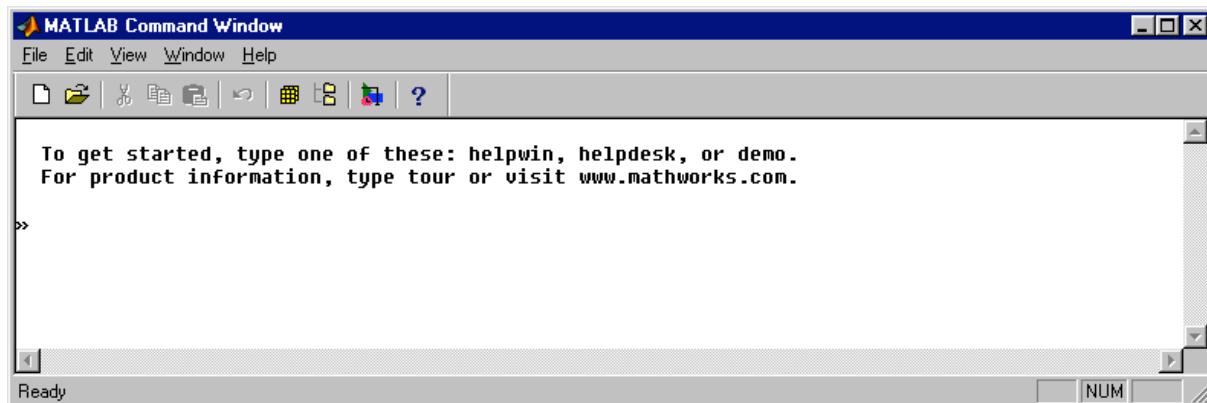
Ce tutorial est honteusement "volé" à Bruno Jouvencel Professeur à l'université de Montpellier.
Vous trouverez d'autres documents de qualité sur sa page personnelle :

<http://www.lirmm.fr/~jouvence/>.

INTRODUCTION A MATLAB

ENVIRONNEMENT MATLAB

Matlab est un environnement de calcul numérique matriciel. Après le lancement de Matlab, une fenêtre de commande apparaît qui permet à l'utilisateur de taper une commande quelconque obéissant à la syntaxe de Matlab. :



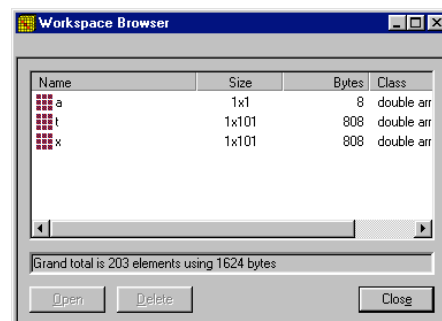
">>" symbole/prompt apparaissant à gauche et indiquant que l'interpréteur est prêt à recevoir une commande.

Variables

Les variables définies par l'utilisateur sont rangées dans l'espace mémoire de Matlab, ces variables sont dites globales.

Le "Workspace browser" permet d'observer les variables existantes. Les commandes who ou whos permettent d'obtenir les mêmes informations.

Pour lancer le Workspace browser, icône :



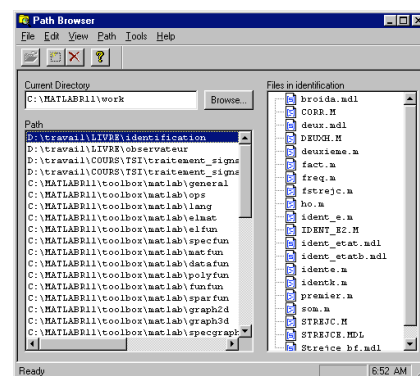
Répertoires de travail

Matlab permet d'ouvrir, de créer, de modifier etc... des fichiers. Matlab sauvegarde tous les fichiers créés dans le répertoire par défaut qu'il est possible de modifier à l'aide de la commande "cd" ou en lançant le "path browser" à l'aide de l'icône suivant :




La fenêtre suivante apparaît, il est alors possible de changer le répertoire courant.

Quand une commande est taper, matlab recherche celle-ci dans l'ensemble des répertoires dont la liste apparaît dans la fenêtre "path", on peut ajouter ou supprimer un répertoire de son choix.



Aide / Help

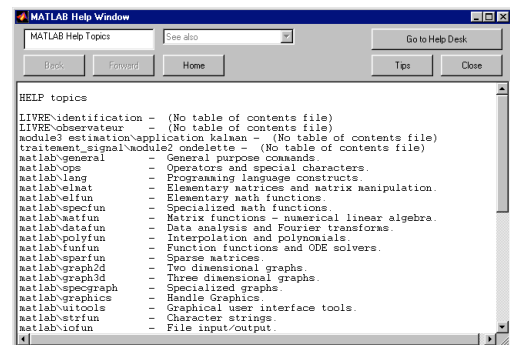
L'icône  permet d'accéder à l'aide en ligne, la fenêtre d'aide est ouverte

Les commandes suivantes

```
>> help
>> helpwin (la fenêtre ci-contre)
>> helpdesk (manuel complet avec Acrobat Reader)
```

Toute commande Matlab possède une entête fournissant des informations sur la commande et sa syntaxe. la commande :

```
>>lookfor mot-clé permet d'avoir la liste des commandes
ont l'entête contient mot-clé
```



Autres outils

Editeur : accès par File→New→M_file ou icône



Debugger : intégrer à l'éditeur

Array_editor : dans le Workspace Browser, double clic sur une variable.

Simulink : environnement graphique de simulation de systèmes dynamique :



Interpréteur

```
>> commande
résultat      affichage du résultat
>>              interpréteur disponible
```

```
>> commande ;      le point virgule provoque l'absence de l'affichage du résultat
>>              interpréteur disponible
```

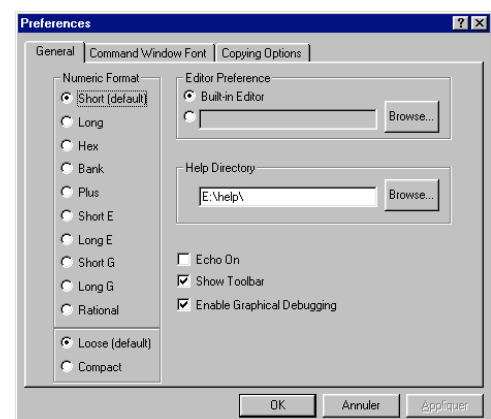
Format d'affichage

Les résultats numériques sont affichés avec le format défini par défaut et redéfinissable par l'utilisateur.

→File→ Preferences

Commentaires

Le symbole % introduit un commentaire, celui-ci n'est pas évalué par l'interpréteur.



DONNEES

Vecteurs

Vecteur ligne

```
>> v=[1 2 3 4 5] ; % vecteur 1*5
>> v=[1:5]; % résultat identique à la ligne précédente (incrément de 1 par défaut)
>> v= [1:1:5]; % idem incrément spécifié
```

Vecteur transposé

```
>> v=[1 2 3 4 5]'; % vecteur 5*1
>> v=[1:5]';
>> v= [1:1:5]';
>> w=v';
```

```
>> v1 =[borne inf:increment:borne sup];
>> v1(i) ; %ième élément ATTENTION le premier est à i=1
```

```
>> length(v) %dimension du vecteur
```

Matrices

```
>>A=[1 2 3; 4 5 6;7 8 9; 10 11 12]; %matrice rectangle 4*3
>>B=[1
    2
    3] %matrice 3*1
>> size(A); %dimension de la matrice
>>A(i,j); % élément ligne i colonne j
>>A(:,n); % nième colonne
>>A(p,:); % pième ligne
>>A(i:j,:); % sous matrice des lignes i à j
>>A(i:j,k:l); % sous matrice des lignes i à j colonnes k à l
```

Suppression des données

```
>> clear % supprime toutes les variables
>> clear A % supprime la variable A
```

Sauvegarde des données

```
save nom_fichier A B C % sauve les variables A B et C dans le fichier nom_fichier
load nom_fichier % récupération des données
```

SCRIPT

M_files : est un fichier avec l'extension **.m** qui contient du code Matlab.

Script : contient des commandes Matlab

function : procédure

	Script	function
arguments	Non	Oui
valeur retournée	Non	oui
action sur	var globales	variables locales et globales
utilité	actions répétées	Extension matlab

function

définition	function f = fact(n)
accès par lookfor	%fact factorielle
accès par help	% fact(n) retourne n!
corps	f=prod(1:n);

Plusieurs variables d'entrée / sortie

function [a,b]= nomFonction(c,d,e)

GRAPHISME

Tout tracé avec Matlab, s'effectue dans une fenêtre graphique que l'on crée par la commande `figure` ou quand on exécute une commande de dessin (`plot ...`). On peut créer autant de fenêtres graphiques que l'on veut celles-ci étant numérotées de 1 à N au fur et à mesure de leur création. La fenêtre graphique par défaut et la dernière qui a été créée par `figure` ou la dernière activée par une commande de dessin ou sélectionnée avec la souris.

- **figure** % crée une fenêtre graphique qui devient la figure par défaut,
- **figure(n)** % crée une fenêtre graphique numéro n qui devient la fenêtre active

Fonctions

- *plot*
`t = 0:0.1:5;`
`x = 2*sin(2*pi*t);`
`plot(t,x);` % dessin de x en fonction de t, interpolation linéaire entre les points.
`plot(t,x,'-')` % idem avec style - - -
`plot(t,x,'b-')` % idem style --- couleur bleue
`plot(t,x,'o')` % idem pas d'interpolation, chaque point marqué par o

Un `plot` provoque l'effacement du dessin précédent (par défaut) on peut superposer des dessins en mettant le commutateur `hold` à on

- **hold on** % désactivation par `hold off`
- **title**('Titre de la figure');
- **xlabel**('commentaire sur l'axe x');
- **ylabel**('idem axe y');
- **axis**([xmin,xmax,ymin,ymax]); % définit l'échelle des axes
- **legend**('tracé 1','tracé 2',...); % chaque tracé est associé à une légende
- **grid** % affiche une grille
- **text**(x,y,'texte') % place texte à la position x y dans la fenêtre
- **gtext**('texte') % place texte à la position définie avec la souris

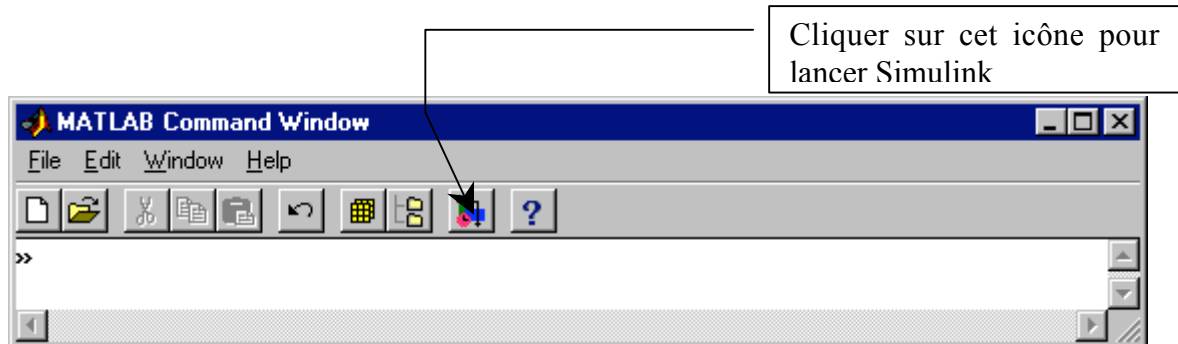
Une fenêtre graphique peut être subdivisée en plusieurs tracés,

subplot(n,p,q) % subdivision en n*q dessin et sélectionne à qième

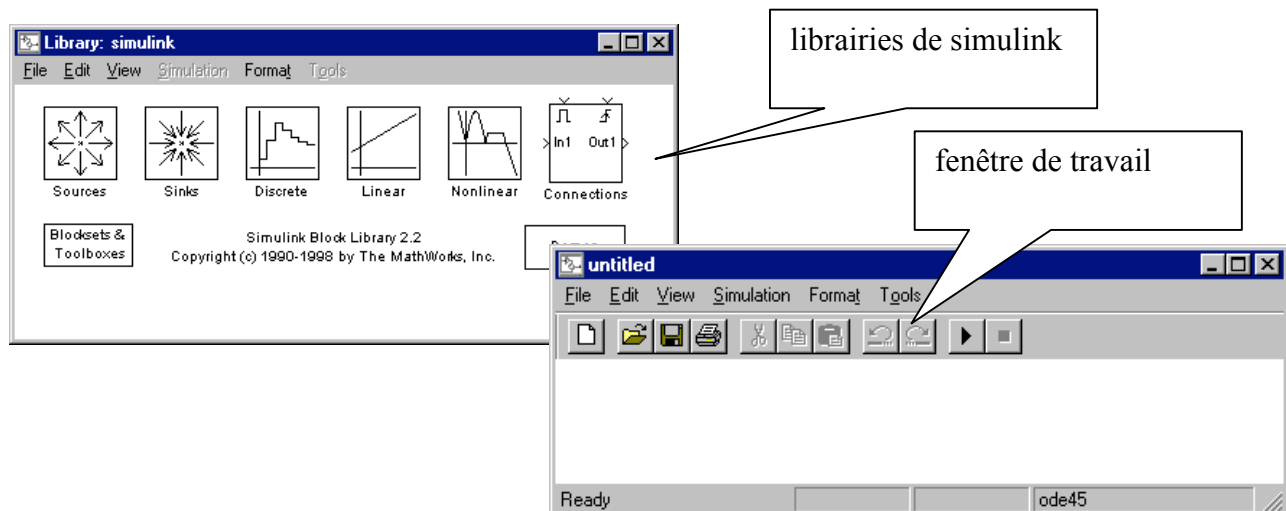
SIMULINK

LANCEMENT DE SIMULINK:

Dans la fenêtre de commande de Matlab:



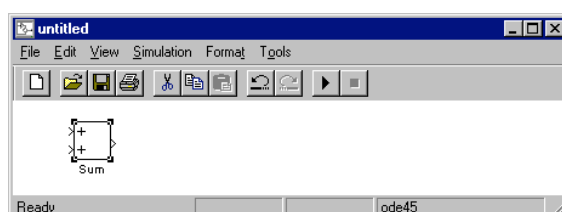
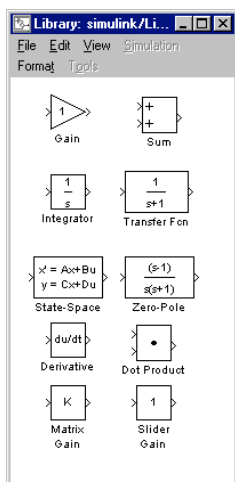
La fenêtre suivante contenant les librairies de simulink, apparaît ainsi qu'une fenêtre de travail.



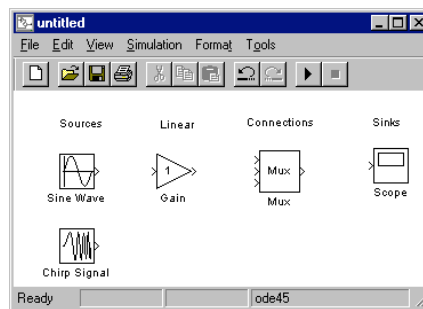
Construction d'un modèle dans la fenêtre de travail

Méthode de placement d'un composant

- on sélectionne une librairie de simulink : double clic pour l'ouvrir (exemple librairie : Linear)
- on sélectionne un composant (exemple Sum):
 - on maintient l'appui sur le bouton gauche de la souris
 - on fait glisser l'élément dans la fenêtre de travail
 - on relâche le bouton.



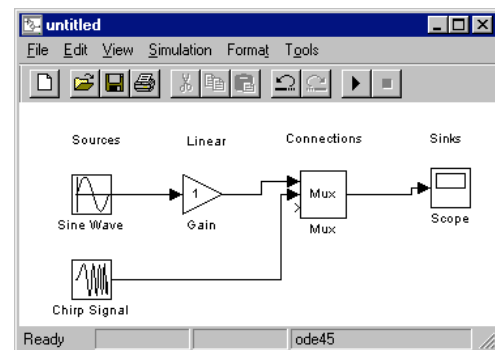
Exercice : construire l'environnement décrit dans la figure suivante, on indique au-dessus de chaque élément, la librairie d'origine.



Réalisation des connexions

Méthode :

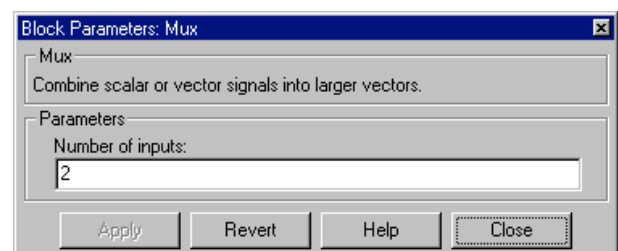
- On sélectionne avec la souris, le symbole > situé sur un composant
- On maintient l'appui sur le bouton et on tire le lien vers un symbole >
- On peut relâcher le bouton pour changer de direction.
- On vérifie que la connexion est correcte par le fait que la flèche est accentuée



Paramétrage des composants

Méthode

- On effectue un double clic sur le composant exemple Mux, la fenêtre de paramétrage s'ouvre,
- On tape les valeurs désirées : ici la valeur 2 pour indiquer 2 entrées,
- On ferme cette fenêtre par Close, les nouvelles valeurs sont prises en compte.



Exercice

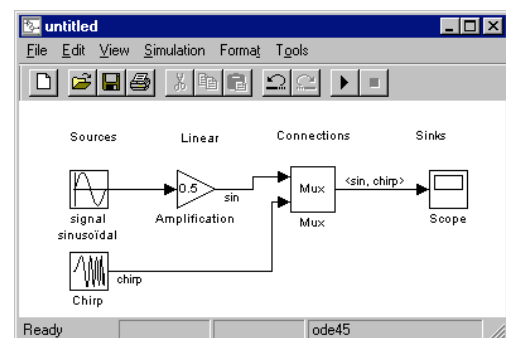
- paramétrer le générateur sinusoïdal avec une amplitude de 2 et une fréquence de 0.5 Hz
- le gain sera réglé à 0.5.
- régler la fréquence de départ du chirp à 0.01 hz

Désignation des composants

Chaque composant possède un nom par défaut exemple Gain, on peut modifier ce nom.

Méthode

- clic sur le nom
- on tape un nouveau nom

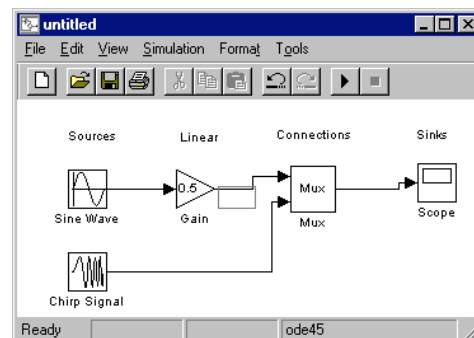
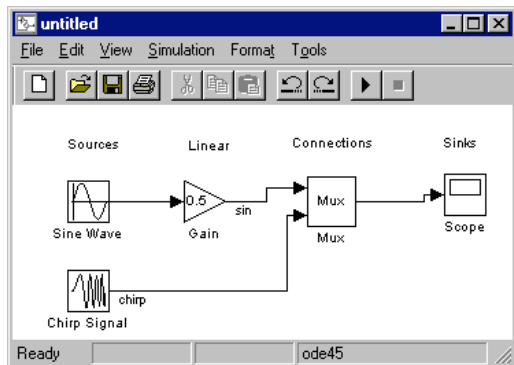


Marquage des liens ou connexions

Méthode

- Double clic sur le lien que l'on veut marquer,
 - une fenêtre apparaît qui vous indique le bon déroulement de l'opération.
- on tape un nom exemple sin,

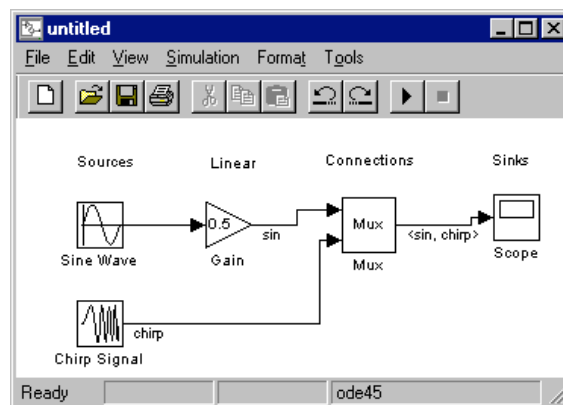
Réitérer l'opération pour le chirp



Propagation des marquages

Méthode

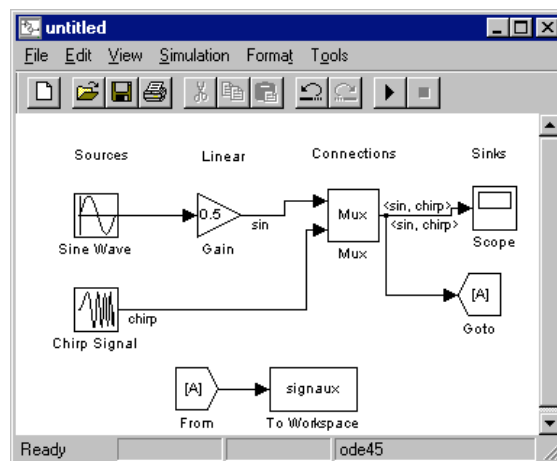
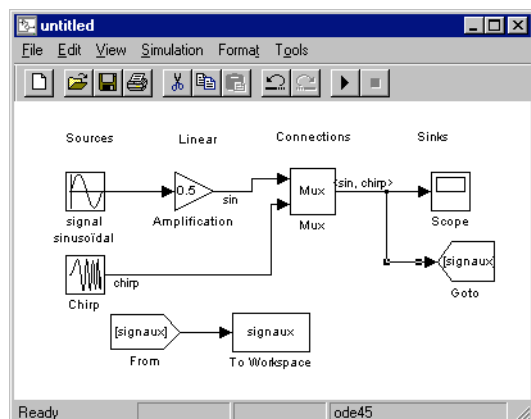
- à la sortie d'un composant : double clic sur le lien,
- taper le symbole < puis cliquer hors de cette fenêtre,
- taper Ctrl D (contrôle D)



Renvoi d'un signal et récupération

Afin de ne pas surcharger le dessin, on peut utiliser 2 composants situés dans la librairie connections qui permettent d'effectuer une transition sans fil. Ces 2 composants s'appellent GOTO et FROM

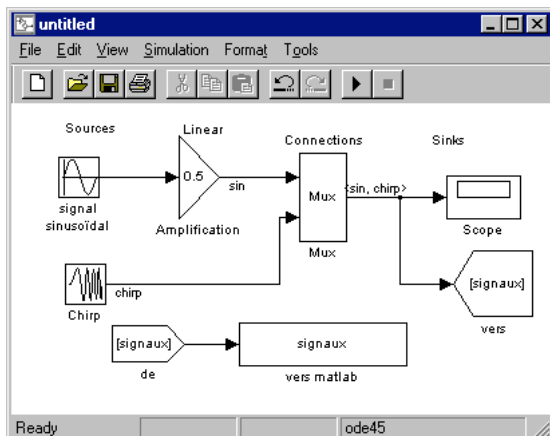
Le "tag" possède un nom que l'on peut modifier



Chaque

« tag » doit être modifié un par un, attention aux correspondances.

Personnalisation de la fenêtre de travail

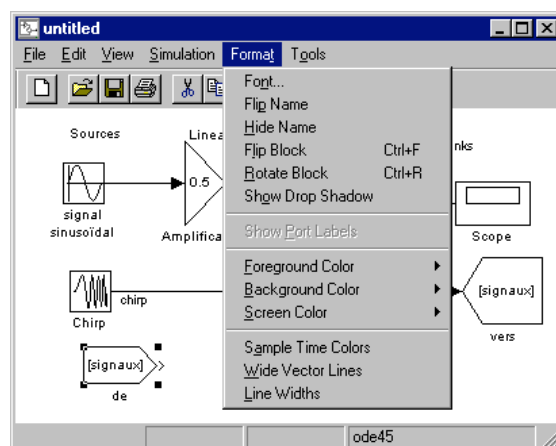


Il est possible de redimensionner chaque composant

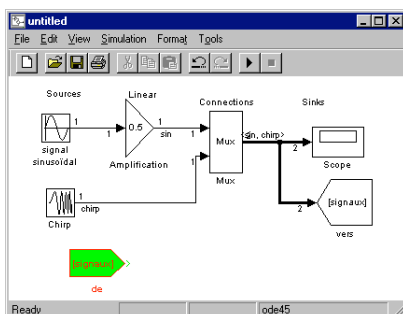
- on le sélectionne,
- on saisit une poignée,
- on étire ou on diminue.

Dans le menu Format de la fenêtre on dispose d'autres commandes (il faut d'abord sélectionner un composant).

- Font permet de choisir le type de caractères
- Flip name : de placer le nom au dessus /en dessous
- Hide name de cacher le nom
- Flip block de retourner le bloc
- Rotate block de le tourner de 90°
- Foreground color de sélectionner une couleur pour le texte
- Background color : de sélectionner une couleur pour le bloc



On peut de même personnaliser les liens ou connexions :



- Wide Vector Lines permet de dimensionner l'épaisseur des liens en fonction du nombre de signaux,
- Line Width permet d'obtenir l'indication du nombre de signaux sur les liens
- Ctrl D permet de mettre à jour tout ceci en cas de modification.

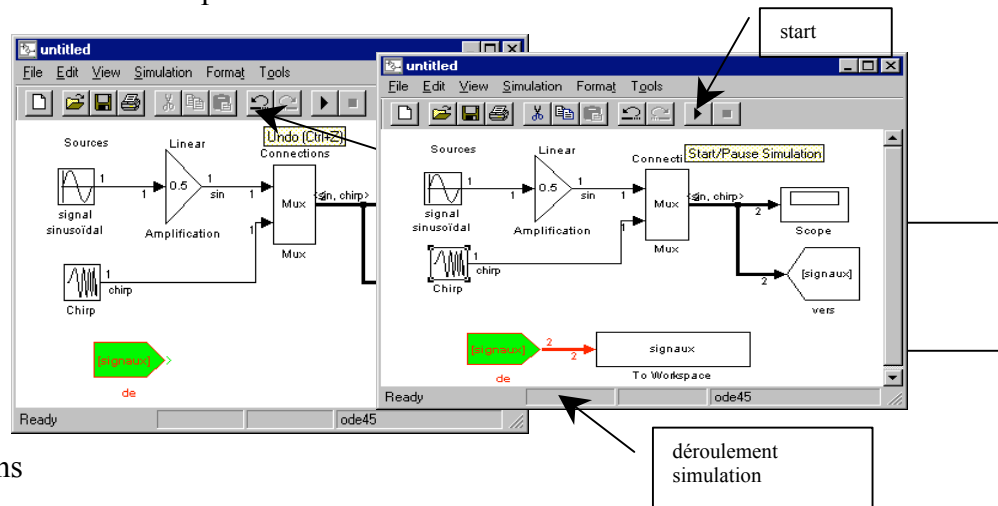
Modifications

Modification des composants

On peut :

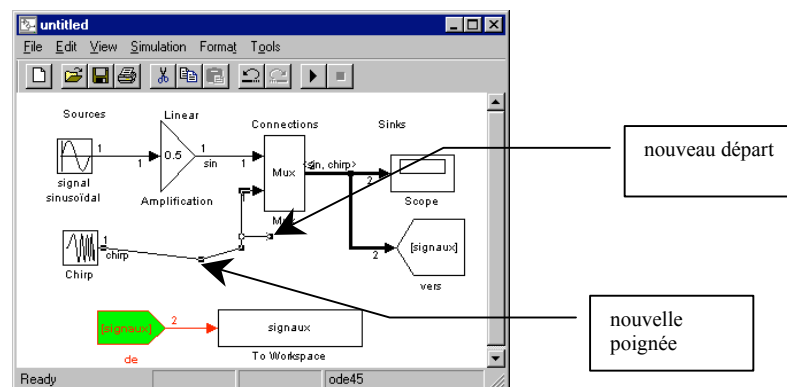
- ajouter un composant à tout moment,
- supprimer un composant en le sélectionnant et touche Suppr,
- Modifier la position d'un composant en le sélectionnant on laisse la touche gauche de la souris appuyée et on le déplace.
- dupliquer un composant : on le sélectionne, on appuie sur la touche Ctrl on faisant glisser le composant.

On peut revenir en arrière de toute opération en utilisant l'icône Undo



Modification des liens

- en utilisant les poignées situées sur le lien (une fois sélectionner celles-ci apparaissent),
- en appuyant sur le bouton droit de la souris on ajoute un nouveau départ,
- shift et bouton gauche permet d'ajouter de nouvelles poignées de changement de direction.



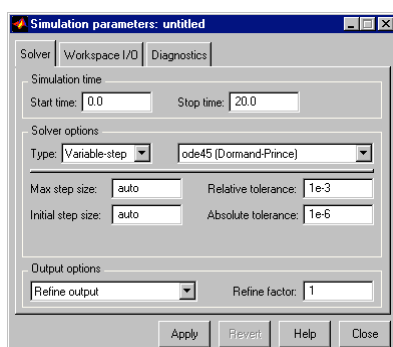
SIMULATION

Paramétrage de la simulation

La simulation utilise un certain nombre de paramètres : menu simulation → parameters

- instant de départ (0 par défaut)
- instant d'arrêt (mettre 20s)

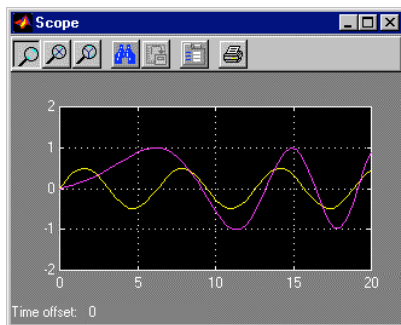
On étudiera ultérieurement les autres paramètres.
Faire close ce qui valide les modifications.



Lancement de la simulation

- menu simulation → start
- ou ctrl T
- ou icône >
- Une sonnerie indique la fin de la simulation

Exercice lancer la simulation après avoir ouvert le scope



- On peut effectuer des zooms avant/arrière avec les 3 premiers icônes
- ajuster les axes avec le 4°
- sauver les données avec le 5°
- régler le scope avec le 6°
- imprimer avec le dernier

LIEN ENTRE SIMULINK ET MATLAB

Pour diverses opérations, il est intéressant de disposer des signaux dans l'environnement de matlab ou de récupérer des signaux définis dans matlab.

Envoi de signaux vers l'environnement de matlab

Les blocs ToWorkspace de la librairie Sinks permettent de diriger les signaux vers l'environnement de matlab dans l'exemple traité jusqu'à présent ceci est réalisé avec le bloc nommé "signaux" sur lequel arrive le tag "de"

Exercice :

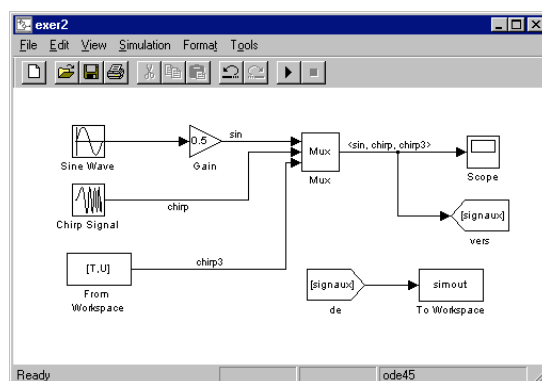
Dans la fenêtre de commande matlab, taper `plot(tout,signaux)`
 signaux est une variable contenant les signaux générés
 tout est une variable que l'on verra plus tard

Récupération de signaux issus de matlab

Le bloc FromWorkspace de la librairie Source permet de définir des signaux dans l'environnement Matlab et de les utiliser dans l'environnement de Simulink.

Exemple

On définit la variable $T=0:0.01:20$; ainsi que le signal désiré $U=\sin(2*\pi*t^3)$;
 Attention les vecteurs T et U doivent être des vecteurs colonnes.



SIMULATION D'UN SYSTEME NON LINEAIRE

Construction d'un modèle non linéaire

Exemple :

$$\dot{x}_1 = x_2 + u \cos(x_1)$$

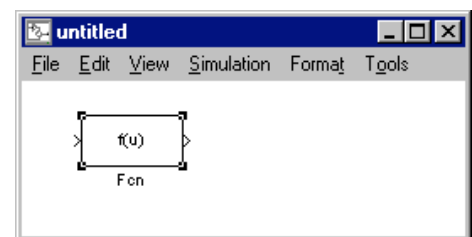
$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1$$

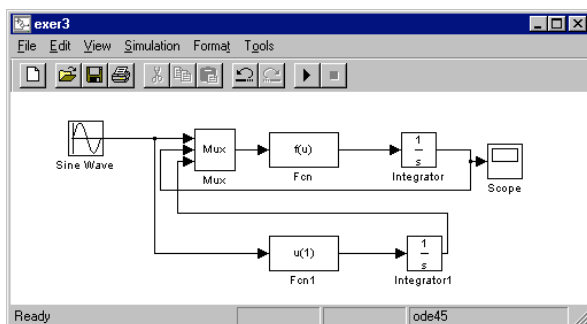
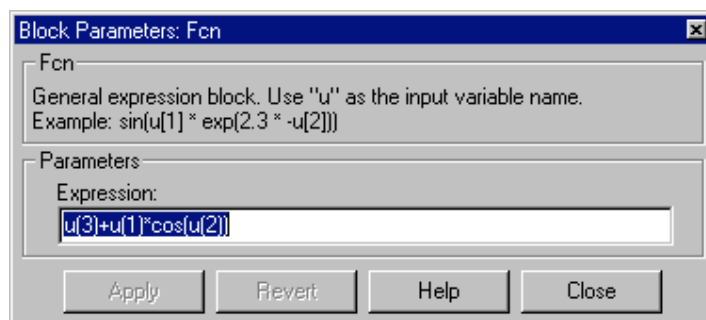
On commence par créer le système à l'aide du bloc Fcn de la librairie NonLinear

L'entrée de ce bloc est nommée u et peut-être un vecteur
Les composantes sont désignées par u(1) u(2) etc...

- ➔ la fonction correspondant à \dot{x}_1 s'écrit : $u(3)+u(1)*\cos(u(2))$
- ➔ si les entrées sont respectivement u,x1 et x2
- ➔ ceci est programmé dans la fenêtre de définition de Fcn



La construction du système ci-dessus, utilise des intégrateurs (librairie linear) et des multiplexeurs (librairie Connexions) comme sur la figure suivante.



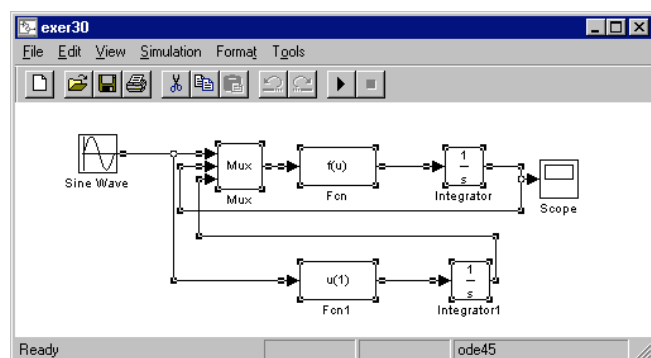
On peut alors effectuer une simulation du système, on voit que celui-ci diverge, le contrôle de ce système sera vu ultérieurement dans le chapitre commande non linéaire.

Création d'un sous système

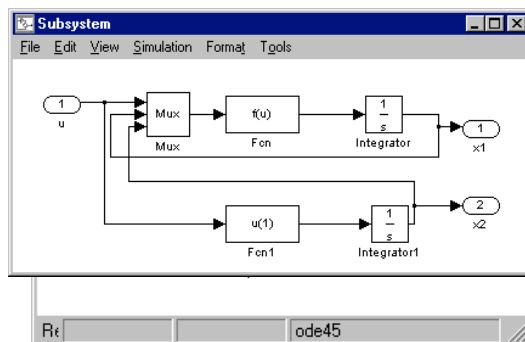
On va encapsuler le système précédent dans un sous système, cette méthode permet de rendre plus lisible un schéma et de paramétrer le sous-système.

Méthode

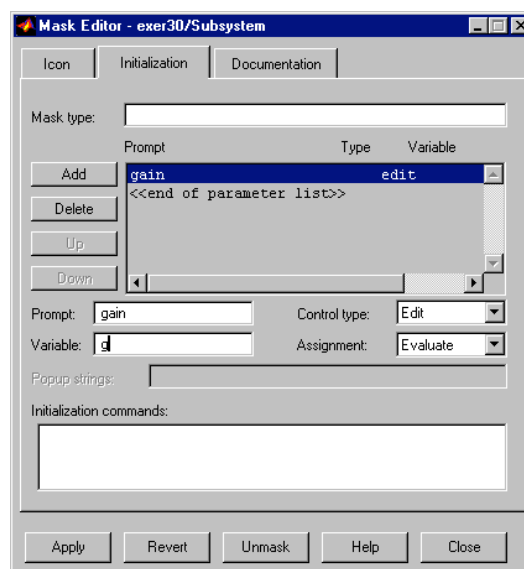
- on sélectionne tous les éléments qui formeront le sous-système
- On tape Ctrl G (ou Edit ➔ Create SubSystem)



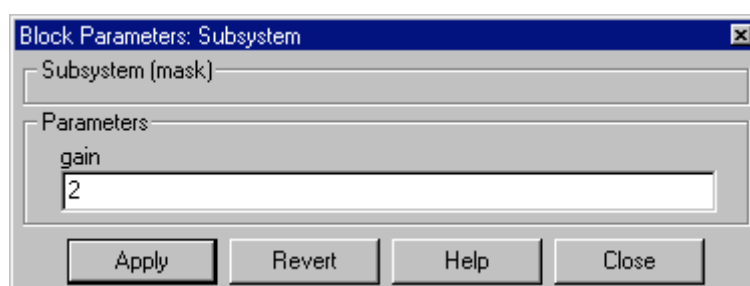
- On obtient : un bloc nommé Subsystem que l'on peut renommer, les entrées et sorties peuvent être elle aussi renommées à l'intérieur du bloc (double clic pour ouvrir le bloc).
- Des ports d'entrée et de sortie ont été rajoutés automatiquement, on peut en ajouter par exemple le port correspondant à x_2



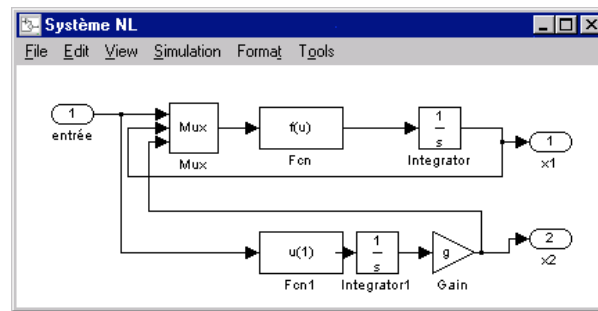
- On va introduire un gain suivant x_2 d'une valeur désignée par $g \rightarrow$ edit \rightarrow Mask Subsystem \rightarrow initialization



- En cliquant maintenant sur le sous-système, on obtient la fenêtre suivante, dans laquelle on fixe une valeur de g



- On prend en compte cette valeur pour la dérivée de x_2 par exemple par \rightarrow edit \rightarrow Look under Mask



MODELISATION D'UN SYSTEME LINEAIRE MONOVARIABLE ET SIMULATION

But : Construire un modèle continu en représentation externe et le simuler.

Définition du système : $H(p) = \frac{1}{p^2 + 0.2p + 1}$

Format :

- Une fonction de transfert monovariante peut être représentée
 - Soit par le rapport de 2 polynômes en p (ou s). Dans Matlab, un polynôme se représente par un vecteur de paramètres suivant les puissances décroissantes de p par exemple : le dénominateur de l'exemple ci-dessus se représente par le vecteur : [1 0.2 1]
 - Soit par une représentation par zéros et pôles
- Matlab utilise un modèle LTI pour la définition de systèmes

création d'un modèle LTI {Linear Time Invariant}

- Définir le numérateur exemple : `>num = 1 ;`
- Définir le dénominateur exemple `>den = [1 0.2 1] ;`
- Construire le système LTI exemple `> sys1= tf(num,den) ;`
- Faire afficher sys1 en tapant le nom puis sur la touche Return

Ou

- Vecteur définissant les zéros exemple : `> zz=[] %aucun`
- Vecteur définissant les pôles exemple : `> pp=[-0.1000 + 0.9950i -0.1000-0.9950i]`
- Gain exemple `> k=1`
- Construire le système : `> sys2=zpk(zz,pp,k)`

Les propriétés d'un modèle LTI sont obtenues en tapant :

`> get(sys1)`

On obtient :

```
num = {[0 0 1]}
den = {[1 0.2 1]}
Variable = 's' ..... choix possible {continu : {s p} échantillonné : {z z-1 q}}
Ts = 0 ..... 0 / système continu sinon la période d'échantillonnage
Td = 0 ..... 0 ou la valeur d'un retard sur l'entrée
InputName = {} ..... on peut donner un nom à l'entrée
OutputName = {} ..... Idem pour la sortie
Notes = {}
UserData = []
```

modification des champs à l'aide de la fonction set

```
>set(sys,'Variable','p')
```

Transfer function:

1

 $p^2 + 0.2 p + 1$

analyse du système

- Diagramme de bode > bode(sys1)
- Diagramme de Nyquist > nyquist(sys1)
- Diagramme de Nichols > nichols(sys1)
- Tracé des pôles et des zéros > pzmap(sys1)
- Lieu des pôles > rlocus(sys1)

Note : après chacune de ces commandes, la commande grid permet d'obtenir un maillage adapté au type de diagramme.

- Calcul des zéros, des pôles et du gain > [Z,P,K]=zpkdata(sys1,'v')
 - Pôles seuls > pole(sys1)
 - ou eig(sys1)
- Calcul des marges de phase et de gain > margin(sys1)

Simulation

- Réponse impulsionnelle > impulse(sys1)
- Réponse à un échelon > step(sys1)
- Réponse à une entrée quelconque :
 - Il faut définir la variable temporelle t=0 :0.01 :10 ;
 - Il faut définir l'entrée u=sin(t)
 - On simule > lsim(sys1,u,t)

Interface de travail avec les modèle LTI

Matlab offre un environnement de travail que l'on obtient en tapant >ltiview

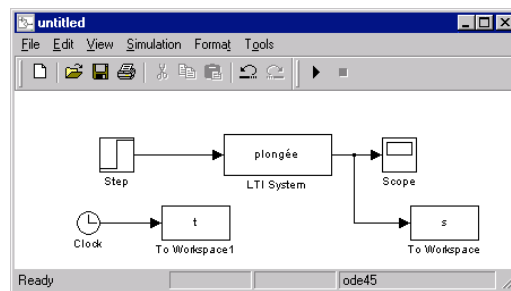
Utilisation de simulink

Le modèle LTI peut-être utilisé dans l'environnement de simulink

/exer5/aexer5

- Ouvrir successivement : Blocksets&toolsboxes ➔ LTI

- Faire glisser dans la fenêtre de travail le bloc lti
- Taper le nom sys1 après un double clic sur le bloc.
- Simuler le système.



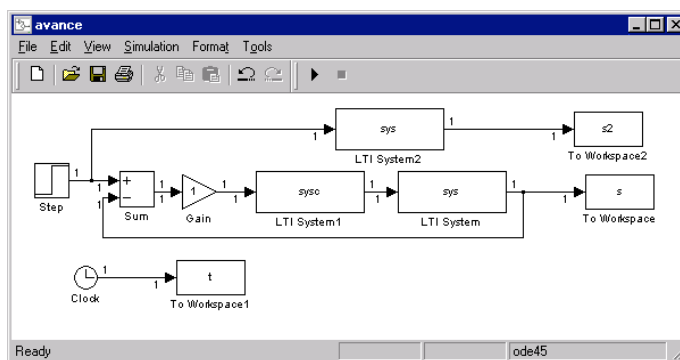
Tout ce qui précède permet de travailler pratiquement indépendamment de simulink, dans la suite, nous allons nous servir uniquement de simulink qui permet d'interconnecter facilement des systèmes.

Interconnexion de systèmes

But : définir un correcteur à avance de phase et corriger le système du stage précédent {aexer6/exer6}

Rappel : calcul d'un correcteur à avance de phase (pendant la séance)

- calculer le correcteur
- construire l'environnement suivant qui permet de comparer sans et avec correcteur /exer6/

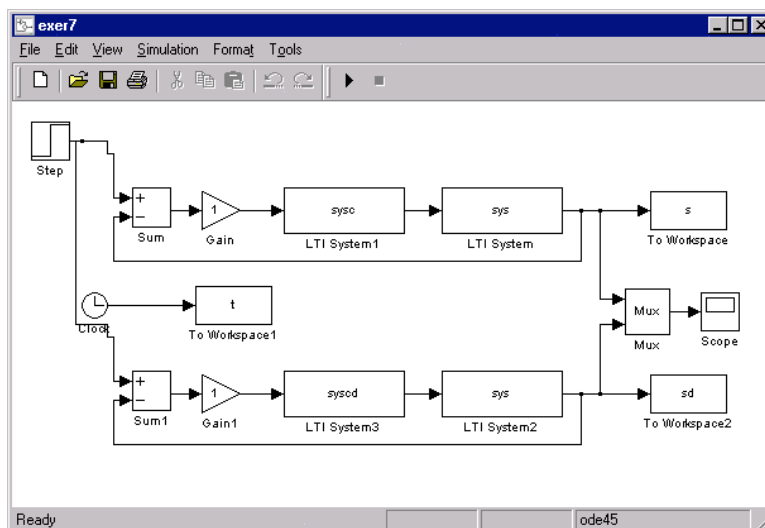


- Calculer le gain statique du système

Discrétisation du correcteur

Rappel : cf. cours /exer7/aexer7

- Extraire le numérateur et le dénominateur de sysc le correcteur continu
- Utiliser la fonction c2d avec la méthode de Tustin pour transformer le correcteur continu en correcteur discret avec une période d'échantillonnage de 0.1s,
- Simuler ce correcteur discret et comparer le au résultats obtenus avec le correcteur continu.



Compléments

Le correcteur à avance de phase calculé précédemment, possède un gain statique que l'on peut déterminer de la manière suivante : /aexer8/exer8

Calcul du système en boucle ouverte > $\text{sysbo} = \text{sysc} * \text{sys}$

Calcul du système en boucle fermée > $\text{sysbf} = \text{feedback}(\text{sysbo}, 1)$

Attention le dénominateur n'est pas normalisé

Gain statique : $G_s = \text{sysbf}(0)$

Si on désire ramener le gain statique à 1 il faut ajouter un amplificateur de $1/G_s$. Le correcteur devient $\text{sysc} * 1/G_s$

```
[nu, de] = tfdata(sysbf, 'v');
gs = de(length(de));
nu = nu ./ gs;
de = de ./ gs;
sysbf = 2 * tf(nu, de);
[mg, mp, wg, wp] = margin(sysbf);
%erreur
mpd - mp
```

On vérifie dans ce cas que la marge de phase diminue, pour modifier la marge de phase, on recalcule le correcteur en prenant en compte cette écart.

MODELISATION D'UN SYSTEME LINEAIRE MULTIVARIABLE ET SIMULATION

Rappel sur la représentation d'état (cf. stage)

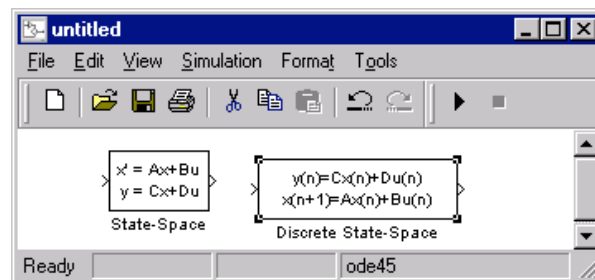
Un système dynamique linéaire multivariable se met sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ s(t) &= Cu(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} X_{k+1} &= FX_k + Gu_k \\ s_k &= CX_k + Du_k \end{aligned}$$

Où	$X(t)$ (X_k)	est le vecteur d'état de dimension n
	A (F)	la matrice d'évolution ou d'état de dimension $n \times n$
	$U(t)$ (u_k)	la commande de dimension r
	B (G)	la matrice d'entrée de dimension $n \times r$
	$S(t)$ (s_k)	la sortie de dimension m
	C	la matrice d'observation de dimension $m \times n$
	D	la matrice de couplage entrée/sortie de dimension $m \times r$

Création d'un modèle LTI en représentation d'état : ss
Les propriétés s'obtiennent et se modifient par get et set

Sous simulink, utiliser le bloc StateSpace de la librairie Linear (ou Discret)



Exemple : pendule inversé

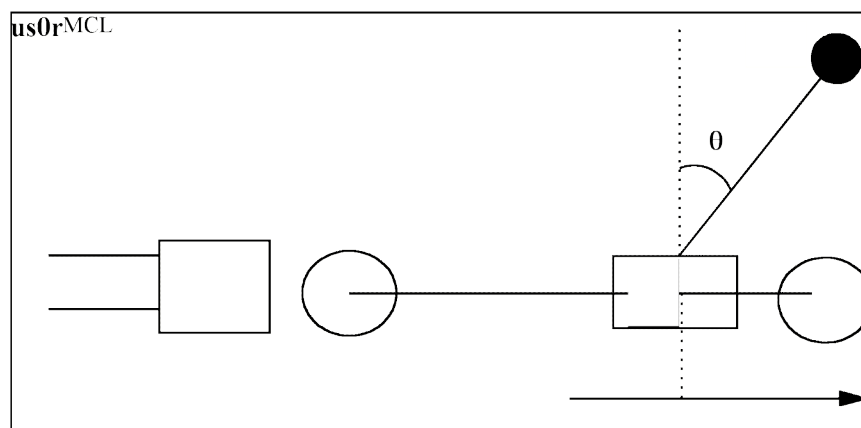


Figure 1: Chariot et pendule.

Un chariot $[C]$ se déplace sur un rail (position r , vitesse \dot{r}), le dispositif pendulaire est constitué d'une tige $[L]$ à l'extrémité de laquelle, est montée une masse $[M]$. La liaison entre le chariot et le pendule est une rotoïde non actionnée.

Les équations différentielles régissant le mouvement du chariot et celui du pendule sont données par les équations suivantes :

$$J\ddot{\theta} + K\dot{\theta} - M_1 l_s g \sin(\theta) + M_1 l_s \ddot{r} \cos(\theta) = 0$$

$$M\ddot{r} + f_R \dot{r} + M_1 l_s [\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)] = f$$

avec :

- r : la position du chariot (m)
- f : la force horizontale appliquée au chariot (en N)

θ : la position angulaire du pendule (en rd)
 $M1$: la masse du pendule (Kg)
 $M0$: la masse du chariot
 M : la masse totale du chariot et du pendule
 ls : distance au chariot, du centre de gravité du pendule (m)
 J : Inertie (kg m²)
 K, f_R : coefficients de frottement visqueux du pendule et du chariot
 g : gravité.

Mise en équation voir le document en annexe

Représentation d'état du système linéarisé et normalisé:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.9503 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1289 & 1.9148 & 0.0008 \\ 0 & 21.4964 & 26.3388 & -0.1362 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.1347 \\ 84.3862 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Simulation du système stabilisé (cor_lin1)

- 1 Calcul de l'observateur
- 2 Calcul du retour d'état
- 3 Calcul du gain statique
- 4 Construction de l'environnement
- 5 Simulation

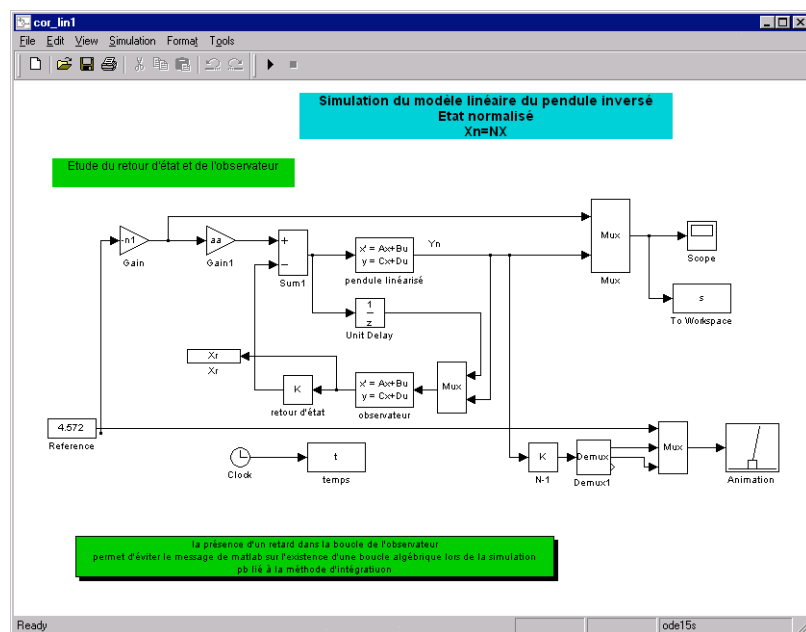
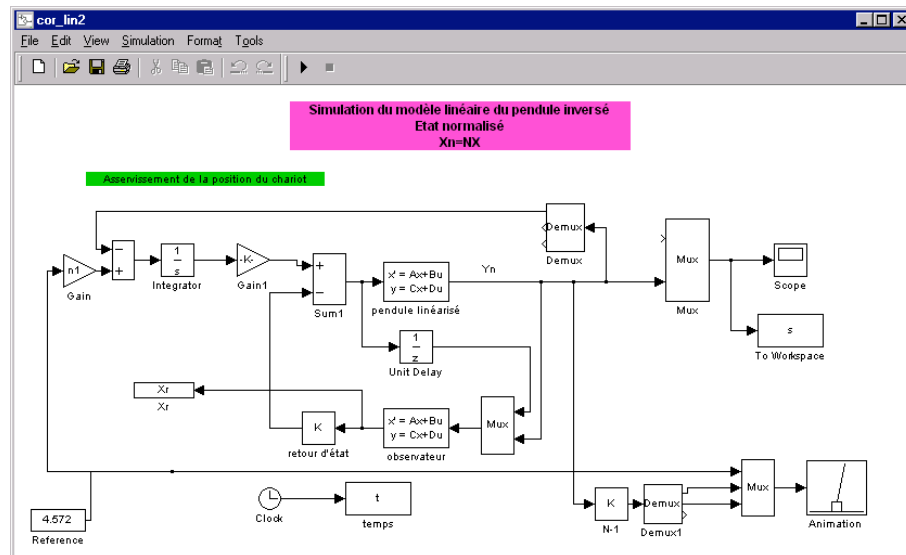


Figure 2 Schéma du système stabilisé

- Simuler le fonctionnement du système
- Le système est-il stabilisé ?
- Vérifier le bon fonctionnement de l'observateur
- Exercer une forte variation de position au chariot, le modèle est-il réaliste ?

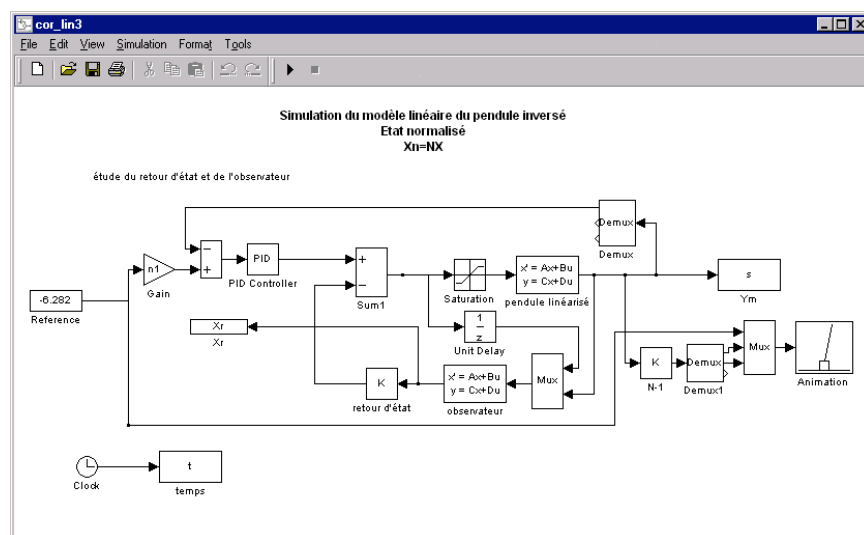
Etape 2 : Asservissement de la position du chariot (cor_lin2)

Ajout d'une correction intégrale sur la position du chariot



Etape 3 : Limitation de la commande (cor_lin3)

Ajout d'une saturation sur l'entrée du pendule



Etape 4 : Simulation avec le modèle non linéaire (cor_n1)

On remplace le modèle linéarisé par le modèle non linéaire du pendule

Annexe D

Annales

1^{ère} année
Juin 2006

Devoir personnel

Tous documents autorisés

Ce devoir est l'étude d'un système instable qu'il faut rendre très rapide
Vous avez le choix des armes, Matlab, Mathematica, Maple, binôme ... Mais comprenez ce que vous faites !
Rédaction manuscrite obligatoire.

1 Continu

La fonction de transfert $G(p)$ est telle que :

$$G(p) = \frac{-0.2416p + 2.133}{p^2 - 0.6419p - 0.03555}$$

1.1 En boucle ouverte

1. Ce système est-il stable ?
2. Tracer dans le plan complexe les pôles et les zéros du système.
3. Calculez la réponse indicielle du système en boucle ouverte.

1.2 En boucle fermée

1. Le correcteur étant un gain pur, montrer qu'il n'existe pas de gain tel que le système soit stable.
2. Comment peut-on le vérifier avec Matlab ?

2 Echantillonné

2.1 Echantillonnage

On choisit d'échantillonner le système à une fréquence de 1 Hz.

1. Que pensez vous de ce choix ?
2. Calculez la fonction de transfert en z de ce système en y introduisant un bloqueur d'ordre 0.

2.2 Correcteur en temps d'établissement minimal

1. Calculez le correcteur série qui minimise le temps d'établissement pour une entrée en échelon.
2. Le correcteur obtenu est-il "en temps d'établissement minimal" ou "en temps d'établissement minimal absolu".
3. En utilisant le critère de Jury, vérifier que le système bouclé est stable.
4. Calculer l'erreur statique et l'erreur de traînage (respectivement à une entrée en échelon puis en rampe)
5. Déterminer l'équation récurrente de ce correcteur.

2.3 Correcteur à réponse pile

1. Calculez le correcteur série qui donne une réponse "pile" pour une entrée en échelon.
2. Rappelez brièvement le point commun avec le correcteur précédent et la différence fondamentale.
3. En utilisant le critère de Jury, vérifier que le système bouclé est stable.
4. Calculer l'erreur statique et l'erreur de traînage (respectivement à un entrée en échelon puis en rampe)
5. Déterminer l'équation récurrente de ce correcteur.

2.4 Comparaison

1. Comparez les deux correcteur précédents en fonction de critères que je vous laisse apprécier.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 3h

Cet examen se décompose en quatre parties indépendantes, le barème est purement indicatif. Conseil : limitez la précision de vos résultats à 10^{-3} .

1 Exercice 1 (4 pts, 30 mn)

La fonction de transfert $G(z)$ est telle que :

$$G(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}{(1 + 1.5z^{-1} - 0.81z^{-2} - 1.215z^{-3})}$$

1. En utilisant le critère de Jury, déterminez si le système est stable en boucle ouverte.
2. L'un de pôles de $G(z)$ est en 0.9, déterminez les autres pôles du système.

On choisit un correcteur de la forme :

$$C(z) = K \frac{(1 - az^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}{(1 - bz^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

3. Choisissez a et b de façon à compenser respectivement un pôle et un zéro du système. Une explication claire est demandée.
4. Choisissez β pour avoir une erreur statique nulle.
5. Choisissez K et α pour fixer une dynamique convenable.
6. Donnez l'équation récurrente du correcteur.

2 Exercice 2 (5 pts, 30 mn)

La fonction de transfert $G(p)$ est telle que :

$$G(p) = \frac{p - 1}{(p + 1)(p + 2)}$$

1. L'objectif étant de rendre le système environ 3 fois plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte, proposez une période d'échantillonnage.
2. Quel que soit le résultat de la question précédente, calculez $G(z)$ la fonction de transfert du système échantillonné précédé d'un bloqueur d'ordre 0 en prenant $T_e = 1$ s.
3. Déterminez un correcteur par la méthode de Zdan tel que :
 - le système présente une erreur permanente nulle pour une entrée en rampe
 - Le système en boucle fermée se comporte comme un système du troisième ordre possédant 3 pôles en 0.5.
 - Aide : démarrez la résolution en prenant $\Delta_1(z) = k_c(1 + \alpha_1 z^{-1})$ et $\Delta_2(z) = 1 + \beta_1 z^{-1}$
4. Vérifiez la stabilité et la causalité du correcteur obtenu.
5. Vérifiez que le système présente bien une erreur statique nulle pour une entrée en échelon.
6. Sans calcul, dites pourquoi les caractéristiques du système en boucle fermée sont assez éloignées du cahier des charges posé.

3 Exercice 3 (3 pts, 30 mn)

La production d'une machine est modélisable par une équation récurrente de la forme :

$$y_{k+2} - 0.9y_{k+1} + 0.2y_k = u_k$$

où :

- y_{k+1} : pièces produites au jour $k + 1$
- y_k : pièces produites au jour k
- u_k : commande, en pièces à produire au jour k
- a : constante réelle

1. Calculez $H(z)$ la transformée en z du système décrit précédemment.
2. Calculez la réponse indicielle $y_h^*(kT_e)$ de ce système.
3. Calculez la réponse impulsionnelle $y_\delta^*(kT_e)$.
Supposons que la commande est de type échelon $A * U(kT_e)$,
4. Quelle amplitude A faut-il appliquer pour que l'ilot produise exactement 1000 pièces en 5 jours ?

4 Problème (8 pts, 1h30)

Afin d'étudier la mécanique de la rupture de matériaux composites, on utilise le mécanisme suivant. En l'absence de frottements, l'énergie cinétique de la pointe est entièrement dissipée dans la propagation de la fissure. La mesure de la vitesse et celle de la longueur de la fissure permettent de comparer différents matériaux composites.

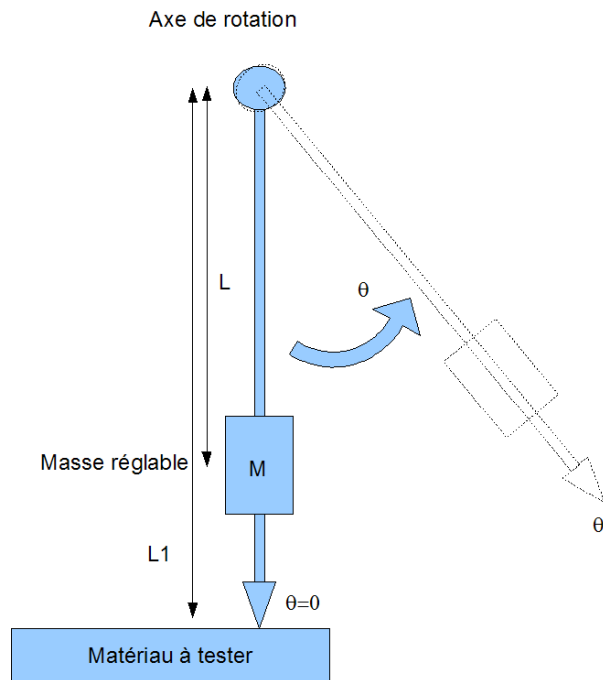


FIGURE D.1 – Impacteur, schéma de principe.

La vitesse d'impact est fonction de l'angle initial θ_0 , donc de la dextérité de l'utilisateur. Pour améliorer le système on utilise alors un moteur couple¹ placé sur l'axe de rotation qui permet d'asservir la vitesse d'impact. Le temps entre le démarrage et l'impact étant très court, il faut utiliser un asservissement très rapide. Au sein du problème les différentes parties sont largement indépendantes.

4.1 Modélisation

Hyp : La masse est supposée ponctuelle et située à une distance L de l'axe de rotation.

1. En GB : pan-cake motor, moteur électrique à courant continu présentant un fort couple mais une faible vitesse.

1. Déterminez l'équation différentielle non linéaire du mouvement de la tige $\theta(t)$ en fonction des paramètres L , M , g la constante de gravité terrestre et Γ le couple moteur.
2. En faisant l'hypothèse, classique, que θ est petit déterminez l'équation différentielle linéaire du mouvement de la pointe.
3. Calculez la transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.
4. Calculez alors la fonction de transfert continue du système (angle du système vis-à-vis du couple moteur).

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{\Gamma(p)}$$

5. Dessinez un schéma bloc faisant apparaître la fonction de transfert $G(p)$, la position initiale θ_0 apparaissant comme une perturbation.

La fonction de transfert du moteur couple est :

$$H(p) = \frac{\Gamma(p)}{U(p)} = \frac{k_c}{R + L_s p}$$

Γ : Couple moteur

U : tension d'induit

où : k_c : constante de couple

R : résistance d'induit

L_s : Inductance série de l'induit

6. Dessinez le schéma bloc du système complet (moteur + système mécanique et perturbation).

4.2 Commande du couple moteur

On ne s'intéresse dans cette partie qu'à l'asservissement du couple moteur.

Un essai de pompage du courant moteur donne le résultat indiqué sur la figure D.2.

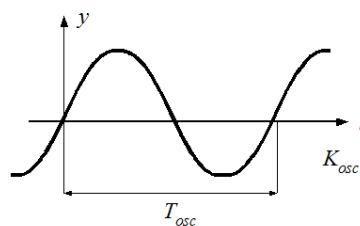


FIGURE D.2 – Phénomène de pompage du courant d'induit : oscillation obtenue pour un gain $K_{osc} = 40$ on mesure alors $T_{osc} = 1ms$.

1. Déterminez les constantes k_p , T_i et T_d du correcteur PID donné ci-après pour asservir le courant dans le moteur.

$$PID(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

2. Déduisez-en les constantes k_p , T_i , T_d et τ correcteur PID de la forme suivante :

$$PID(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right)$$

3. Au vu du résultat présenté en figure D.2, calculez une période d'échantillonnage correcte pour implanter le correcteur précédent sous forme numérique. Le calcul du correcteur numérique, n'est pas demandé mais quelques explications sont les bienvenues !

4.3 Commande de la vitesse

Dans cette partie, la constante de temps dominante du système moteur corrigé par le PID précédent est si petite vis-à-vis des constantes de temps du système mécanique que le moteur corrigé par le PID est considéré comme un gain k_m .

1. Déterminez un correcteur à réponse pile pour une entrée en rampe.

4.4 Traitement du signal

Les données de vitesse et position sont enregistrées sur le calculateur pour un traitement du signal hors ligne.

1. les données, échantillonnées à $f_e = 1$ kHz sont filtrées avec un filtre numérique de la forme :

$$F(z) = \frac{z + 2}{(z - 0.5)^2}$$

Calculez le diagramme de Bode du filtre analogique équivalent et son domaine de validité.

Applications numériques

AN : $k_c = 1$; $R = 1$; $L_s = 1$; $k_m = 1$; $L = 1$; $L_1 = 1$; $M = 1$; $g = 10$

Devoir personnel

Ce devoir est l'étude d'une méthode de commande un peu particulière dite commande par modèle interne. Le principe n'est pas d'asservir une sortie à une consigne mais d'asservir la sortie d'un système à celle d'un modèle. Vous avez le choix des armes, Matlab, Mathematica, Maple, binôme ... Mais comprenez ce que vous faites !

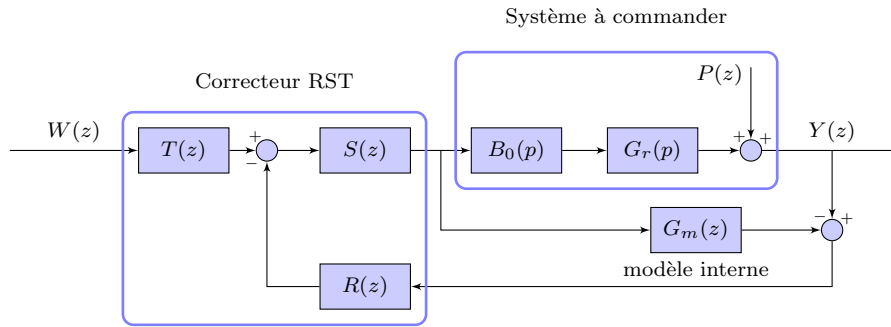


FIGURE D.3 – Schéma général d'une commande par modèle interne.

1 Questions

Les fonctions de transfert du système continu réel $G_r(p)$ et celle du modèle échantillonné $G_m(z)$ sont :

$$G_r(p) = \frac{k'}{p+1} \quad \text{et} \quad G_m(z) = \mathcal{Z} \left\{ B_0(p) \frac{k}{p+1} \right\}$$

et on choisira :

$$T(z) = R(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{et} \quad S(z) = H_0 = cte$$

1. Choisir une période d'échantillonnage du système.
2. Montrer que si $k \neq k'$ il existe un gain H_0 tel que l'erreur statique soit nulle malgré la perturbation en échelon.
3. A partir de maintenant, on prendra :

$$G_r(p) = \frac{1}{p+2} \quad \text{et} \quad G_m(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{2p+1} \right\}$$

et

$$T(z) \neq R(z), \quad H(z) \text{ quelconque}$$

4. Calculer la fonction de transfert globale entrée sortie du système en fonction de $R(z)$, $S(z)$, $T(z)$, $G_m(z)$ et $G_r(z)$.
5. Proposer un cahier des charges plausible pour le système en boucle fermée.
6. Déterminer les fonctions de transfert $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$, en fonction du cahier des charges.
7. Donner l'algorithme de commande.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Cet examen se décompose en six parties presque indépendantes, le sujet est difficilement faisable dans le temps imparti. Ne perdez pas de temps sur une question difficile, passez à la suivante. Conseil : limitez la précision de vos résultats à 10^{-3} .

Le problème posé est l'asservissement de force d'un bloc moteur du drone composé d'un moteur synchrone dit moteur "brushless", de son collecteur électronique et d'une hélice à pas variable. L'objet de cette étude est en particulier la régulation de la vitesse du moteur à 6000 tr/mn et ce, quel que soit le pas de l'hélice, la force devient alors proportionnelle au pas de l'hélice.

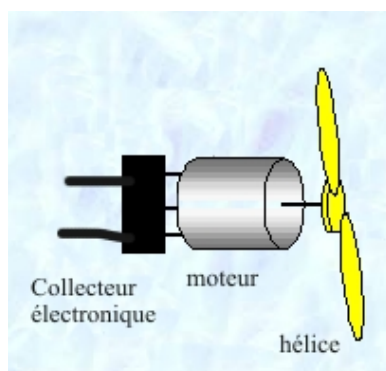


FIGURE D.4 – Système à réguler.

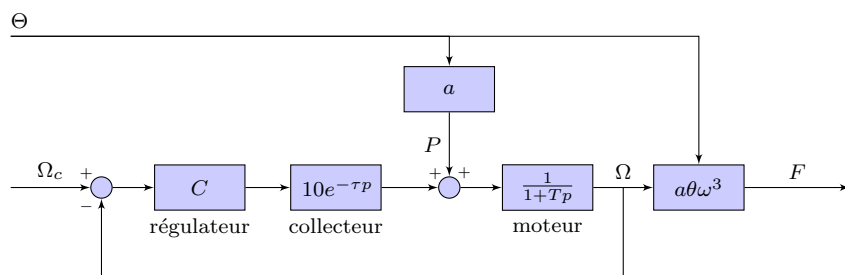


FIGURE D.5 – Schéma bloc général de l'asservissement de force.

1 Etude analogique

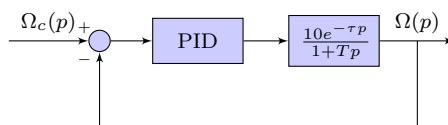


FIGURE D.6 – Schéma de l'asservissement avec un correcteur PID.

Le moteur est représenté par une constante de temps $T = 20\text{ms}$, le collecteur électronique lui, se comporte comme un retard pur de durée $\tau = 5\text{ms}$. Dans cette partie on ne prendra pas en compte l'existence d'une perturbation.

$$G(p) = \frac{10e^{-\tau p}}{1 + Tp}$$

1. Tracer la réponse indicielle de $G(p)$.
2. Déterminer un correcteur analogique de type PI pour l'asservissement de ce système.
3. Sans calcul mais avec une brève justification, quel sera probablement le dépassement de la sortie pour une entrée en échelon ?

2 Asservissement numérique

Tous comptes faits, on décide de placer un correcteur numérique. La période d'échantillonnage est : $T_e = 5$ ms. L'objectif est d'obtenir une réponse indicielle la plus rapide possible.

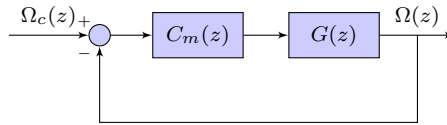


FIGURE D.7 – Système bouclé avec un correcteur de type "temps d'établissement minimal".

1. Que pensez-vous de cette période d'échantillonnage ?
2. Calculer la fonction de transfert en z $G(z)$ de l'ensemble collecteur électronique + moteur précédé d'un bloqueur d'ordre 0. ($G(p) = \frac{10e^{-\tau p}}{1+Tp}$)
3. Décomposer $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

4. Expliquez pourquoi la recherche d'un correcteur donnant une boucle fermée équivalente à 1 retard pur est vouée à l'échec.
5. Calculer un correcteur $C_m(z)$ qui donne une réponse en temps minimal. On cherche donc $C_m(z)$ tel que :

$$\frac{C_m(z)G(z)}{1 + C_m(z)G(z)} = z^{-2}$$

6. Calculer les trois premiers échantillons de la commande du moteur c'est-à-dire de la sortie du correcteur.

3 Régulation numérique - Zdan

Dans cette partie, la variation de couple due au pas variable est prise en compte sous la forme d'un couple de perturbation comme indiqué sur la figure D.8.

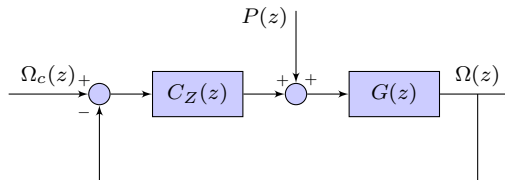


FIGURE D.8 – Modèle du système avec la perturbation due au pas variable modélisée par une rampe $P(z)$.

1. Calculer un correcteur $C_Z(z)$ avec la méthode de Zdan ayant pour caractéristiques :
 - modèle en boucle fermée de type troisième ordre

$$\frac{N(z)}{(1 - 0.5z^{-1})^3}$$

- erreur statique nulle, et ce malgré la perturbation en rampe.
- On prendra pour la partie C_3 du correcteur de Zdan la forme :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} = \frac{K(1 - z_1 z^{-1})}{1 - z_2 z^{-1}}$$

2. Calculer l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbation.
3. Vérifier la stabilité de votre correcteur.
4. Calculer l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

4 Régulation numérique - Commande par anticipation

Afin de diminuer le dépassement obtenu par le correcteur précédent, on se propose d'implanter une commande par anticipation.

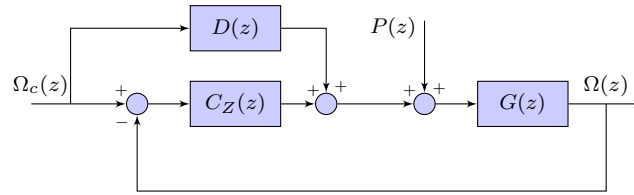


FIGURE D.9 – Commande par anticipation.

Le correcteur $D(z)$ sera choisi presque identique à $C_Z(z)$ de la forme :

$$C_Z(z) = C_1(z)C_2(z)C_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^n} \frac{A^+(z)}{B^+(z)} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

$$D(z) = C_1(z)C_2(z)C'_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^n} \frac{A^+(z)}{B^+(z)} \frac{\Delta'_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

1. Montrez que $\Delta'_1(z)$ n'influe que sur les zéros de la boucle fermée.
2. Calculez $\Delta_1(z)$, $\Delta_2(z)$ et $\Delta'_1(z)$ tels que la transmittance en boucle fermée soit exactement égale à $\frac{z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})^3}$. Aide : reprenez la solution de la question 3.1
3. Calculer les trois polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ d'un correcteur RST qui permettra d'obtenir exactement la même dynamique que la commande par anticipation en boucle fermée.

5 Asservissement de force

La relation force verticale en fonction de la vitesse du moteur ω et du pas θ est supposée de la forme :

$$F = a\theta\omega^3$$

Application numérique : $F_0 = 1$ N pour $\theta_0 = 10^\circ$ et $\omega_0 = 6000$ tr/mn

1. Déterminer a .
2. Donner un modèle linéarisé de la force autour de sa valeur nominale $F_0 = a\theta_0\omega_0^3$ de la forme $F = F_0 + \alpha\theta + \beta\omega$ par développement limité.
3. Donner un schéma bloc du système complet incluant la force.
4. Déterminer la fonction de transfert entre la commande de pas et la sortie en force, le système étant régulé par la commande par anticipation.
5. Le pas et la vitesse étant quantifiés par des CAN de 8 bits, soit 2^8 pas de quantification entre 0 et 8000 tr/mn et entre $\pm 45^\circ$, quelle est l'erreur de force en régime établi ?

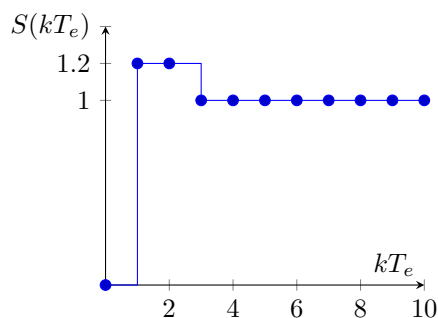


FIGURE D.10 – Réponse indicielle désirée.

6 Questions indépendantes pour ceux qui finissent trop tôt

1. Calculer la transformée en z du signal donné en figure D.10.
2. Soit $H(z)$ une transmittance opérationnelle d'un système qui soumise à un échelon unité présente en sortie la réponse présentée en figure D.10. Calculer $H(z)$.
3. Le système représenté par :

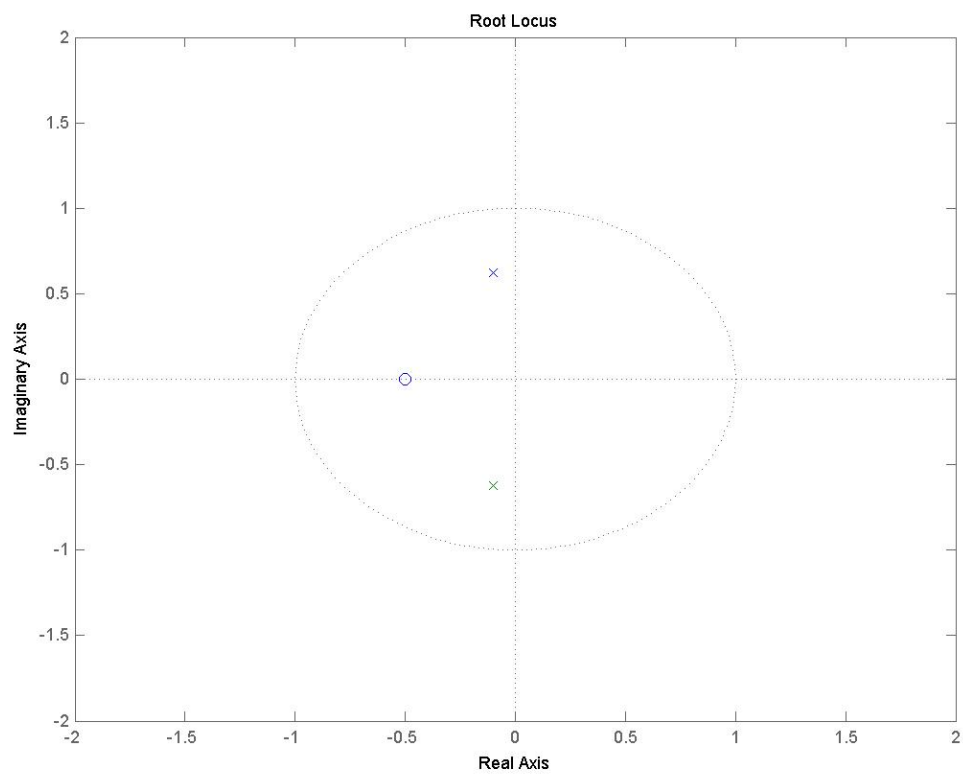
$$D(z) = \frac{z + 3}{z^3 + 1.2z^2 - .25z - 0.3}$$

est-il stable ?

4. Tracer intuitivement le lieu d'Evans de la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{z + 0.5}{z^2 + 0.2z + 0.4}$$

dont les pôles et le zéro sont représentés sur la figure D.11.

FIGURE D.11 – Pôles et zéros de $F(z)$.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Le problème posé est la régulation de fréquence d'un oscillateur ultra-stable à 7 GHz. Embarqué sur un satellite, cet oscillateur dérive dans le temps en fonction des variations de température du saphir. On s'attachera à la réalisation de deux régulateurs indépendants : une régulation analogique de phase qui corrige la fréquence et une régulation numérique de température. Ces deux signaux sont traduits en une tension continue par un capteur approprié.

1 Régulation analogique de phase

Il s'agit ici de déterminer un correcteur analogique qui agit sur la phase de la fréquence de 7 GHz ultra-stable. la transmittance entre la phase et la fréquence est $H(p)$.

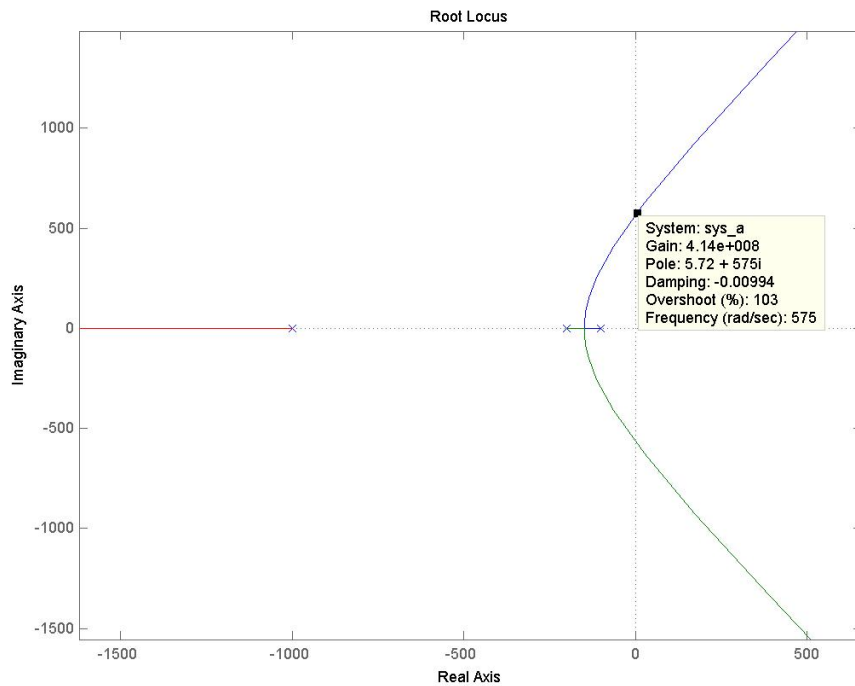


FIGURE D.12 – Lieu d'Evans du système.

1. Le lieu d'Evans du système $H(p) = \frac{S(p)}{U(p)}$ est donné en figure D.12. En déduire un correcteur analogique de type PI de Ziegler-Nichols.
2. Le diagramme de Bode du système formé du correcteur PI calculé précédemment suivi de la transmittance $H(p)$ (voir fig. D.14) est donné en figure D.14 (un zoom est donné en figure D.15). Mesurez la marge de phase $\Delta\phi$ et la marge de gain ΔG .

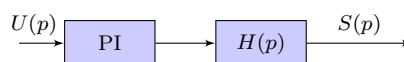


FIGURE D.13 – Système précédé du correcteur PI.

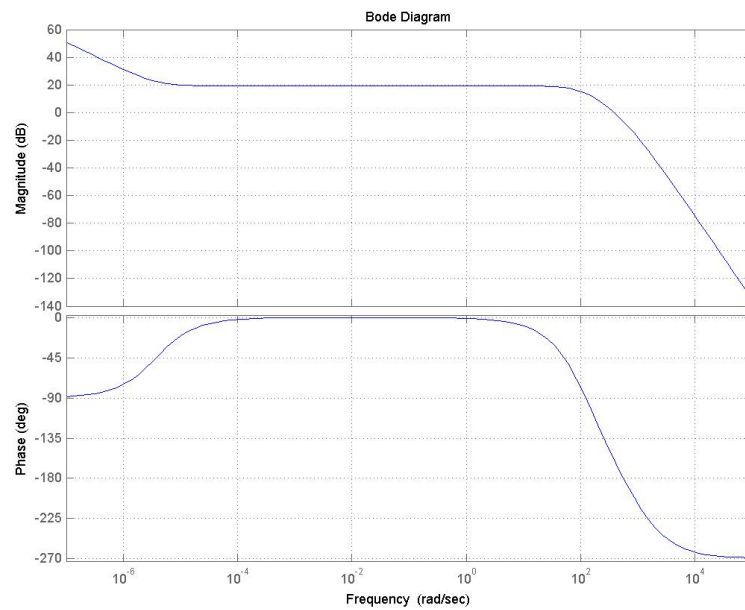


FIGURE D.14 – Diagramme de Bode du système présenté en figure D.13.

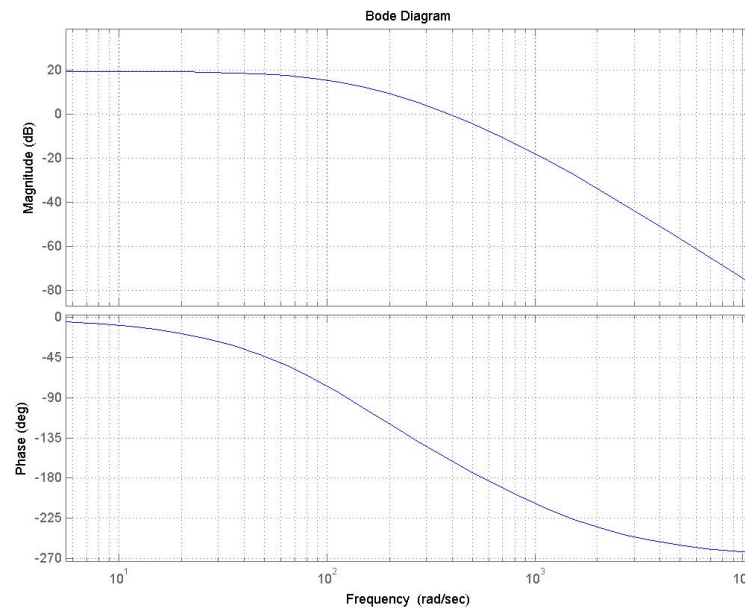


FIGURE D.15 – Diagramme de Bode du système présenté en figure D.13 (zoom sur la zone critique).

3. Le système bouclé par un retour unitaire et corrigé par le correcteur déterminé précédemment présente une réponse indicielle ayant trop de dépassement. On se propose de baisser la gain pour le rendre moins rapide. Calculez le nouveau gain du correcteur PI afin d'avoir une marge de phase de 90 degrés (Ti reste identique).
4. Au vu de votre expérience, quel type de réponse indicielle devrait-on avoir avec un telle marge de phase ?

2 Transposition du régulateur analogique

1. Tout comptes faits, on décide d'implanter le correcteur analogique calculé précédemment sur un calculateur numérique. Rappelez en deux lignes les principaux avantages du régulateur numérique sur sa version analogique.
2. Calculez un correcteur numérique par la méthode de votre choix que vous justifierez.
3. Choisissez la période d'échantillonnage maximum pour éviter le phénomène de recouvrement de spectre en faisant l'hypothèse que le spectre du signal est limité à 10^4 rad.s^{-1} .

3 Régulation numérique de température

Description du système Ce saphir, de très haut facteur de qualité, est posé dans une enceinte isolée thermiquement. Afin d'éviter tout choc thermique, la dynamique d'asservissement est choisie très lente. Une fois dans l'espace, le saphir met plusieurs heures à atteindre sa température de fonctionnement. Deux types de perturbation apparaissent :

- $V(z)$ en entrée du système représente les variations de température dues aux dérives de l'électronique et sont modélisées par une rampe.
- $P(z)$ en sortie représente l'influence du soleil sur le satellite. Elle est représentée par une perturbation sinusoïdale.

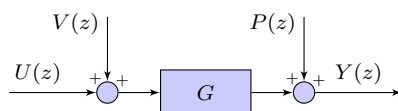


FIGURE D.16 – Schéma bloc de la fonction de transfert entre la température de sortie Y et la puissance d'entrée U en présence des perturbations V et P . V est une perturbation de charge de type rampe, P est une perturbation de sortie de type sinusoïdal.

Cahier des charges

- L'erreur permanente d'ordre 0 (réponse à l'échelon d'entrée $W(z)$) doit être nulle et ce, y compris en cas de perturbations $V(z)$ en forme de rampe.
- Le système en boucle fermée doit rejeter les perturbations sinusoïdales $P(z)$.
- Le système doit répondre très lentement à un échelon de consigne $W(z)$, le comportement en boucle fermée est plus lent qu'en boucle ouverte ! On désire un comportement de type premier ordre, la constante de temps est de 5 heures soit 18000 secondes.

3.1 Modélisation

Modélisation du système en boucle ouverte sans perturbations La température du saphir au cours du temps est mesurée après avoir soumis le système à un échelon de puissance thermique. Le résultat est donné figure D.17.

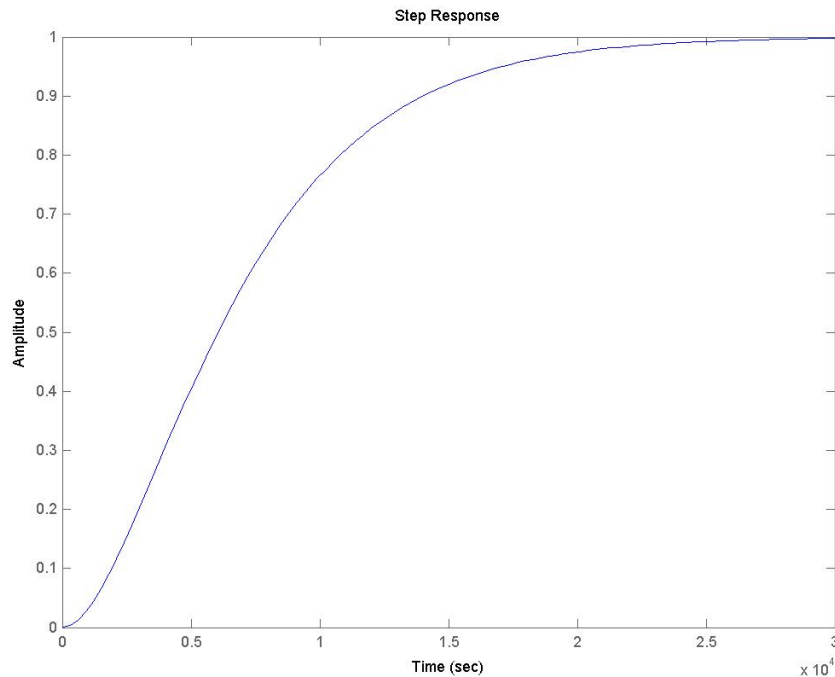


FIGURE D.17 – Réponse de la température du saphir en fonction d'un échelon unitaire de puissance.

1. On fait l'hypothèse que la transmittance du système est de la forme :

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)^2}$$

Près avoir donné la réponse temporelle $s(t)$ de $G(p)$ soumise à un échelon unité, déterminez graphiquement les valeurs de k et τ .

2. Déterminez la transformée en z de la transmittance $G(p)$ précédée d'un bloqueur d'ordre 0 échantillonnée avec une période $Te = \tau/5$.

Modélisation du système voulu en boucle fermée

1. Proposez une transmittance continue (en p), répondant au cahier des charges.
2. Déterminez la fonction de transfert du modèle $M(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ qui est la transformée en z de votre modèle analogique précédé par un bloqueur d'ordre 0.

Premier correcteur

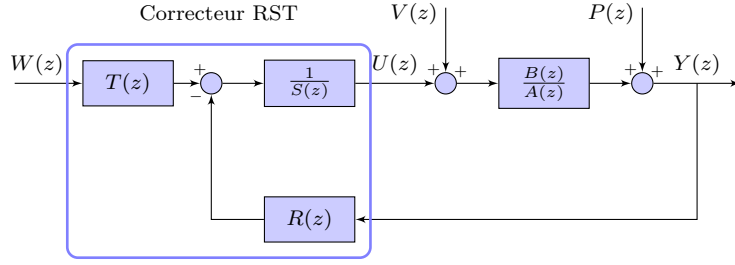


FIGURE D.18 – Principe de correction par correcteur RST. $V(z)$ est une perturbation de charge de type rampe, $P(z)$ est une perturbation de sortie de type sinusoïdal.

Quel que soit le résultat de la partie précédente, vous continuerez avec la fonction de transfert en z

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.01752z + 0.01534}{z^2 - 1.637z + 0.6703}$$

Dans cette partie on ne tiendra pas compte de la perturbation sinusoïdale $P(z)$.

1. Décomposez $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

2. On décompose le polynôme $S(z)$ en un produit de trois polynômes :

- $S_1(z)$ contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour répondre au cahier des charges,
- $S_2(z)$ compense les zéros compensables de $B(z)$,
- $S_3(z)$ assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donnez les polynômes $S_1(z)$ et $S_2(z)$.

3. Déterminez $S_3(z)$ et $R(z)$ tels que la transmittance du système en boucle fermée soit égale à celle du modèle de comportement voulu $M(z)$.
4. Calculez l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbation.
le correcteur RST est finalement implanté sous la forme donnée en figure D.19.

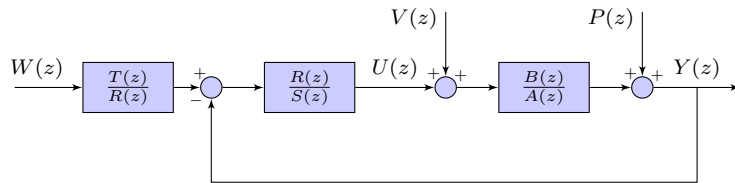


FIGURE D.19 – Implantation du correcteur RST.

5. Vérifiez la stabilité du correcteur $C(z) = \frac{R(z)}{S(z)} = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$.
6. Calculez l'équation récurrente de votre correcteur et vérifiez la causalité de ce correcteur.
7. En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminez la valeur de la commande en régime permanent U_∞ , le système étant soumis à un échelon d'entrée, les perturbations étant nulles.

Correcteur réjecteur de la perturbation sinusoïdale

Ce générateur de fréquence est embarqué sur un satellite qui tourne autour de la terre en 90 minutes. Le capteur de température subit alors une perturbation sinusoïdale de période $T = 90\text{mn}$. On se propose ici de recalculer un nouveau correcteur qui rejette asymptotiquement cette perturbation.

1. En reprenant le schéma D.18, Calculez la fonction de transfert $G_p(z) = \frac{Y(z)}{P(z)}$ en fonction des paramètres du système et en introduisant le polynôme d'observation A_0 .

2. Calculez la pulsation ω du signal de perturbation puis calculez la transformée en z du signal sinusoïdal $p(t) = \sin(\omega t)$ échantillonné à la période Te .
3. Calculez alors le signal $Y(z)$ en fonction de ce signal $P(z)$, tous les autres signaux entrants étant nuls.
4. Proposez une condition sur les polynômes S et sur A_0 afin que la sortie $Y(z)$ ne dépende plus du signal sinusoïdal.
5. Calculez le correcteur RST qui répond au cahier des charges complet.

1^{ère} année
Janvier 2009

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Le problème posé est le positionnement d'un télescope sur monture azimutale. On ne s'occupera dans ce sujet que de la partie réglage de l'azimut. Dans la phase de "mise en station" (recherche de deux étoiles bien connues) et de pointage vers un objet précis (planète, nébuleuse, comète ...), le télescope sera asservi par un correcteur de type Zdan. L'objet étant visualisé, la poursuite de cet objet sera réalisée par un correcteur de type "réponse pile". Le passage d'un correcteur à l'autre ne sera pas étudié.



FIGURE D.20 – Télescope à monture azimutale.

1 Modélisation

Le mouvement du télescope est décrit par l'équation différentielle suivante

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \Gamma_c + \Gamma_p$$

avec :

- J : L'inertie de l'ensemble moteur + parabole
- θ : la position angulaire de l'antenne
- B : le coefficient de frottement visqueux
- Γ_c : le couple moteur
- Γ_p : le couple de perturbation

1. Déterminer la transformée de Laplace de cette équation différentielle en supposant les conditions initiales nulles.
2. Donner le schéma bloc de ce système. On posera pour simplifier l'écriture : $B/J = a$, $\Gamma_c/B = u$ et $\Gamma_p/B = w$.
3. En faisant l'hypothèse que $\Gamma_p = 0$, déterminer la fonction de transfert continue $G(p) = \frac{\theta(p)}{u(p)}$ de ce système.
4. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de $G(p)$ en module et en phase.
5. En déduire le diagramme de Nyquist. Ce système peut-il devenir instable si on le boucle par un gain (voir figure D.21) ?
6. Déterminer la fonction de transfert échantillonnée $G(z)$ de ce système précédé d'un bloqueur d'ordre 0.

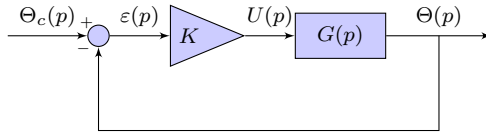


FIGURE D.21 – Système bouclé sans bloqueur d'ordre 0

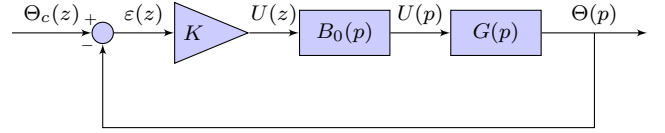


FIGURE D.22 – Système bouclé avec un bloqueur d'ordre 0

2 Régulation numérique : correcteur PI

Avec $a = 10$, en prenant une période d'échantillonnage $T_e = 20$ ms et en bouclant par un retour unitaire le système précédé par un bloqueur d'ordre 0 et un gain $K = 100$ (voir figure D.22), l'ensemble se met à osciller à une fréquence de 5 Hz sans quitter le domaine de linéarité.

1. Au vu du résultat précédent, proposer un correcteur de type PI numérique qui donne de "bons" résultats.
2. Donner alors le schéma bloc de ce correcteur PI.

3 Régulation numérique : phase de mise en station

Quel que soit le résultat de la partie précédente, vous continuerez avec la fonction de transfert en z

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.001873z + 0.001752}{(z - 1)(z - 0.8173)}$$

3.1 Réglage de base

1. Décomposez $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1 - z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

2. On décompose le correcteur $C(z)$ en un produit de trois correcteurs :
 - $C_1(z)$ contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour obtenir une erreur statique nulle en présence d'un couple de perturbation Γ_c de type échelon
 - $C_2(z)$ compense les pôles et zéros compensables de $G(z)$, (rappel : on ne compense pas $\frac{1}{(1 - z^{-1})^m}$)
 - $C_3(z)$ assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donnez les polynômes $C_1(z)$ et $C_2(z)$.

3. Déterminez $C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$ tel que le système corrigé, bouclé, possède une dynamique identique à celle d'un système continu du second ordre de pulsation $\omega_n = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur d'amortissement $\xi = 0.707$. La période d'échantillonnage T_e sera choisie égale à 0.2 secondes.
Aide : s'il n'y a pas d'erreur $\Delta_1(z) = \alpha + \beta z^{-1}$ et $\Delta_2(z) = \gamma$
4. Vérifier, par le calcul, que l'erreur statique de ce système est nulle y compris en présence d'une perturbation.
5. Presque sans calcul, quelle est l'erreur permanente de vitesse en l'absence de perturbation.

3.2 Réglage avancé

On souhaite dans cette partie améliorer le comportement dynamique du système en boucle fermée en choisissant un réglage qui impose une erreur permanente d'accélération $\varepsilon_a(\infty)$ non nulle mais aussi faible que l'on veut. Dans notre cas on choisira $\varepsilon_a(\infty) = 0.1$. Le correcteur proposé est de la forme : $C(z) = C_1(z) \times C_2(z) \times D_3(z)$ où C_1 et C_2 sont ceux déterminés précédemment et D_3 est de la forme² :

$$D_3 = \frac{\Delta_1(z) + (1 - z^{-1})^2 \times M(z)}{\Delta_2(z) - M(z)}$$

2. Attention cette forme est particulière pour ce système, ce n'est pas généralisable.

avec $\Delta_1(z)$ et $\Delta_2(z)$ calculés précédemment.

1. Donnez la transformée en z d'un signal de type parabolique.
2. En prenant $M(z) = cte = m_0$, montrer que l'erreur d'accélération du système en boucle fermée dépend de m_0 .
3. Calculer m_0 tel que $\varepsilon_a(\infty) = 0.1$.

4 Régulation numérique : phase de poursuite

Dans cette phase, l'asservissement est assuré par un correcteur de type "réponse pile".

1. Est-il possible de calculer un correcteur à réponse pile pour une entrée de type rampe pour ce système ?
Est-ce faisable pour une entrée de type parabole ?
2. Déterminer un correcteur à réponse pile pour une entrée de type rampe.
Aide : s'il n'y a pas d'erreur $L(z) = \alpha + \beta z^{-1}$ et $K(z) = \gamma + \xi z^{-1}$ (notations du cours)
3. En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur permanente de vitesse (entrée de type rampe).
4. Calculer l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement d'une micropompe injectant un médicament à travers la peau. L'objectif est de conserver la même concentration de médicament dans le corps malgré la dénaturation par le foie du médicament. Le système est composé d'une pompe et d'un capteur capable de donner la concentration de médicament.

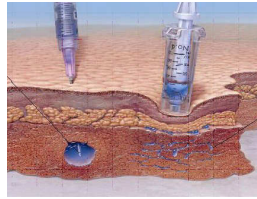


FIGURE D.23 – Injection intramusculaire.

1 Modélisation

La diffusion du médicament dans le muscle puis dans le corps suivent une loi de type, loi de Fick, la composition des deux lois, après simplification, donne :

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + C\theta(t) = D_p(t) + A_c(t)$$

avec :

- J : inertie de l'ensemble peau + corps
- θ : concentration de médicament dans le corps
- B : coefficient de diffusion
- C : coefficient de pertes
- A_c : assimilation par le corps (équivalent à un débit)
- D_p : débit de la pompe

Applications numériques : $J = 64800$, $B = 21.6$, $C = 10^{-3}$

1. Déterminer la transformée de Laplace de cette équation différentielle en supposant les conditions initiales nulles.
2. Donner le schéma bloc de ce système.
3. En faisant l'hypothèse que $A_c(t) = 0$, déterminer la fonction de transfert continue $G(p) = \frac{\Theta(p)}{D_p(p)}$ de ce système.
4. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de $G(p)$ en module et en phase. On donnera quelques points remarquables.
5. A l'aide du critère de Routh, déterminer le gain maximal k avant oscillation du système bouclé par un intégrateur pur (k/p) (voir figure D.24).
6. Montrez qu'à la limite d'oscillation la période d'oscillation est :

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

7. Des deux dernières questions, en déduire un correcteur PI de type Ziegler-Nichols pour le système $H(p) = \frac{G(p)}{p}$.

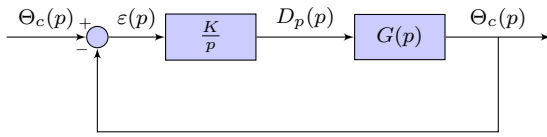


FIGURE D.24 – Système continu bouclé avec un intégrateur pur.

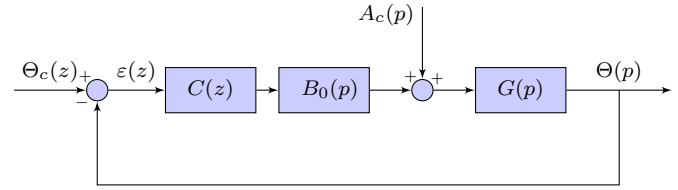


FIGURE D.25 – Système corrigé par un correcteur numérique.

2 Régulation numérique

1. En prenant une période d'échantillonnage $Te = 15$ mn, déterminer la fonction de transfert échantillonnée $G(z)$ de ce système précédé d'un bloqueur d'ordre 0.

$$G(p) = \frac{D_p(p)}{\Theta(p)} = \frac{1}{Jp^2 + Bp + C}$$

2. En utilisant le critère de Jury, déterminer le gain maximal k avant oscillation du système bouclé par un intégrateur pur ($\frac{k}{1-z^{-1}}$).
3. La perturbation $A_c(t)$ est modélisée par une rampe ($A_c(t) = \alpha \times t$), combien faut-il d'intégrateurs purs dans le correcteur pour avoir une erreur permanente nulle vis-à-vis de la consigne en présence de la perturbation.
4. En posant :

$$C(z) = K \frac{(1 - b_0 z^{-1})(1 - b_1 z^{-1})(1 - b_2 z^{-1})}{(1 - z^{-1})^l (1 - a_0 z^{-1})}$$

l étant le nombre d'intégrateurs purs déterminés précédemment. Déterminer K et les a_i , b_i tels que le système en boucle fermée présente un dénominateur unité.

5. Vérifier que le correcteur est bien stable et causal.
6. Tracer la réponse impulsionnelle du système en boucle fermée corrigé par le correcteur déterminé précédemment.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de vitesse d'une hélice d'avion de modèle réduit.

1 Modélisation

Le couple du moteur électrique est donné par la relation :

$$\Gamma(t) = a.u(t)$$

La vitesse de rotation de l'hélice est donnée par :

$$J\dot{\omega}(t) = \Gamma(t) + C(t)$$

Le capteur de vitesse (génératrice tachymétrique) donne une information sous la forme d'une tension :

$$u_m(t) + \tau \frac{du_m}{dt} = \omega(t)$$

avec :

J	: inertie de l'hélice
Γ	: le couple moteur
a	: constante positive
$u(t)$: tension du moteur
$C(t)$: couple perturbateur
$\omega(t)$: vitesse de rotation de l'hélice
τ	: constante de temps du capteur de vitesse
$u_m(t)$: tension de la génératrice tachymétrique moteur

Applications numériques : $J = 24.10^{-4} \text{ kg.m}^2$, $a = 0.284 \text{ N.m/V}$, $\tau = 10.10^{-3} \text{ s}$

1. Déterminer les transformées de Laplace de ces équations en supposant les conditions initiales nulles.

$$\Gamma(p) = a.u(p)$$

La vitesse de rotation de l'hélice est donnée par :

$$Jp\omega(p) = \Gamma(p) + C(p)$$

Le capteur de vitesse (génératrice tachymétrique) donne une information sous la forme d'une tension :

$$u_m(p) + \tau p u_m(p) = \omega(p), \quad \text{soit} \quad \frac{u_m(p)}{\omega(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

2. Donner le schéma bloc de ce système en faisant apparaître les variables Ω , u_m , Γ , u et C .

2 Correction proportionnelle

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension $u(t)$ telle que :

$$u(t) = k_p(\Omega_{ref} - u_m)$$

1. Donner le schéma bloc en boucle fermée.
2. Déterminer à l'aide du critère de Routh, la plage de valeurs de k_p tel que le système soit stable. En boucle fermée la fonction de transfert est :

$$B0(p) = \frac{a}{Jp} \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$BF(p) = \frac{k_p a}{k_p a + Jp(1 + \tau p)} = \frac{k_p a}{J\tau p^2 + Jp + k_p a}$$

Tableau de Routh

p^2	$J\tau$	$k_p a$	0
p^1	J	0	0
p^0	$Jk_p a$		

La seule condition est que k_p soit positif.

3. On suppose que le couple de perturbation est nul et que $k_p = 1$, dessiner la réponse à un échelon de tension $u(t) = 10V$. On précisera quelques points remarquables (valeur finale, temps du premier maximum, dépassement).

$$BF(p) = \frac{k_p a}{k_p a + Jp(1 + \tau p)} = \frac{k_p a}{J\tau p^2 + Jp + k_p a} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Temps de réponse à 5% :

$$T_{r5\%} = \frac{3}{m\omega_0}$$

Premier dépassement

$$D1 = 100e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

Temps du premier pic

$$T_{pic} = 100e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

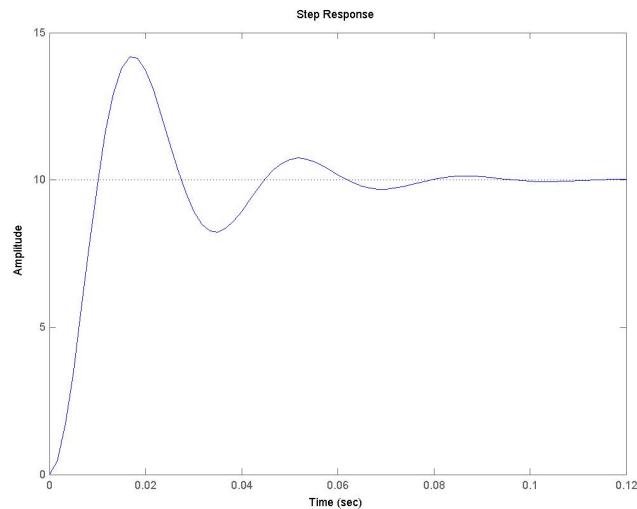


FIGURE D.26 – Réponse à un échelon de 10V.

4. Le couple de perturbation étant maintenant non nul et égal = 1N.m, déterminer l'erreur statique.

3 Correction proportionnelle-intégrale

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension $u(t)$ telle que :

$$u(t) = k_p(\Omega_{ref} - u_m) + k_i \int_0^t (\Omega_{ref} - u_m) dt$$

1. Montrer que, y compris en présence du couple de perturbation, l'erreur statique est nulle.
2. Déterminer k_p et k_i pour avoir une réponse indicielle présentant un dépassement de 20%.

4 Analyse de la correction numérique

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension $u(t)$ issue d'un bloqueur d'ordre 0 lui même alimenté par des valeurs numériques u_k telles que :

$$u_k = k_p(\Omega_{ref_k} - u_{m_k})$$

On souhaite qu'en boucle fermée, le système se comporte comme un système du second ordre continu de pulsation propre $\omega_0 = 160 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur d'amortissement $\xi = 0.45$.

1. Proposer une période d'échantillonnage correcte.
2. Déterminer la transformée en z de l'ensemble moteur-hélice-génératrice tachymétrique.
3. A l'aide du critère de Jury, déterminer la plage des valeurs de k_p telle que le système soit stable en boucle fermée.
4. Proposer un correcteur numérique de type PI pour ce système.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Cet examen est la comparaison dans le cas des systèmes du premier ordre retardés de trois méthodes différentes de synthèse d'un correcteur donnant à la boucle fermée des caractéristiques proches ou identiques à la réponse pile. La comparaison s'effectuera sur la réjection de la perturbation.

Les questions sont largement indépendantes entre elles, ne restez pas bloqué sur une question.

1 Partie 1 (8 pts, 50 mn) Une alternative à la réponse pile...

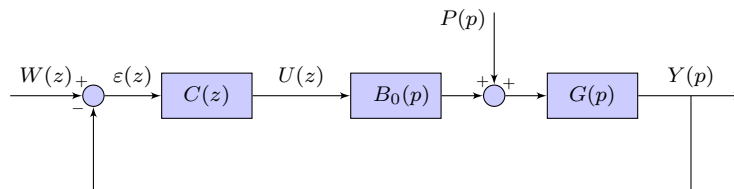


FIGURE D.27 – Système étudié.

$$G(p) = \frac{g}{1 + \tau p} e^{-Tp}$$

avec $T = (d - 1)T_e$, les autres valeurs sont volontairement omises ! On notera $a = e^{-T_e/\tau}$

1. Déterminer la transformée en z $G(z)$ du système $G(p)$ précédé d'un bloqueur d'ordre 0 échantillonné à la période d'échantillonnage T_e .

$$G(z) = \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}} z^{-d}$$

2. Le correcteur $C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$ de la figure D.27 est donné par son équation récurrente :

$$u_k = \alpha u_{k-1} + (1-\alpha)u_{k-d} + \beta \varepsilon_k - b\beta \varepsilon_{k-1}$$

A partir de l'équation récurrente, en déduire la fonction de transfert $C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$.

$$C(z) = \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}}$$

3. En posant $b = a$, calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée $BF(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$.

$$C(z)G(z) = \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}} z^{-d} = \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}}$$

d'où

$$BF(z) = \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1} + (\beta g(1-a) - (1-\alpha))z^{-d}}$$

4. Déterminer la valeur de la constante β telle que le système en boucle fermée ait un comportement de type premier ordre retardé avec un pôle unique en α .

$$\text{On résout : } \beta g(1-a) - (1-\alpha) = 0 \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{(1-\alpha)}{g(1-a)} \quad \text{donc} \quad BF(z) = \frac{(1-\alpha)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1}}$$

5. Ce correcteur garantit-il une erreur statique nulle ? Justifier. Oui car il présente un pôle en 1.

$$\text{Denom}(C(z)) = 1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-d}, \quad \text{pour } z = 1 : \text{Denom}(C(1)) = 1 - \alpha - (1 - \alpha) = 0$$

6. Pour $d = 2$, calculer les pôles du correcteur et donner les limites de α telles que le correcteur seul soit stable.

$$\text{Denom}(C(z)) = 1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-2}$$

pôles en 1 et $\alpha - 1$ donc $0 < \alpha < 2$

7. Pour $d = 3$, montrer que le dénominateur de $C(z)$, s'écrit $(1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + (1 - \alpha)z^{-2})$.
A l'aide du critère de Jury, vérifier la stabilité du correcteur seul.

$$\text{Denom}(C(z)) = (1 - z^{-1})(1 + (1 - \alpha)z^{-1} - (\alpha - 1)z^{-2})$$

soit en puissances positives de z

$$\text{Denom}(C(z)) = z^3 - \alpha z - (1 - \alpha) = (z - 1)(z^2 + (1 - \alpha)z - (\alpha - 1))$$

$$(a) \sum_{i=0}^n a_i^0 = D(1) > 0 \Rightarrow 3 - 2 * \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 3/2$$

$$(b) (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0 \Rightarrow 1 > 0$$

$$(c) |a_0^0| - a_n^0 < 0 \Rightarrow |(1 - \alpha)| - 1 < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 2$$

donc $0 < \alpha < 3/2$

8. Montrez que lorsque $\alpha \rightarrow 0$, le système en boucle fermée tends vers un retard pur de d périodes d'échantillonnage.

$$BF(z) = \frac{(1 - \alpha)z^{-d}}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0 \quad BF(z) = \frac{z^{-d}}{1} = z^{-d}$$

9. En prenant $\alpha = 0$, $b = a$ et β tel que déterminé à la question 4, déterminer la fonction de transfert $F_{PY}(z)$ entre la perturbation P et la sortie Y , montrer que le pôle unique de cette fonction de transfert est le même que celui du système en boucle ouverte.

$$\begin{aligned} F_{PY}(z) &= \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1}-(1-\alpha)z^{-d}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}} \\ &= \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1}-(1-\alpha)z^{-d}}} = \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-z^{-d}}} = \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d})}{(1-z^{-d}) + \beta g(1-a)z^{-d}} \\ &= \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d}) \end{aligned}$$

10. Pour $W(z)$ nul et $P(z)$ échelon unité, vérifier que lorsque $t \rightarrow \infty$ la sortie $Y(z)$ tends vers 0.

$$Y(z) = P(z)F_{PY}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d})$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1 - z^{-d}) = 0$$

2 Partie 2 (7 pts, 50 mn) Synthèse RST

La méthode précédente ayant montré que la dynamique de réjection de perturbation est la même que la dynamique en boucle ouverte, on se propose d'améliorer ce point en implantant un correcteur RST.

1. Décomposez $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1 - z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

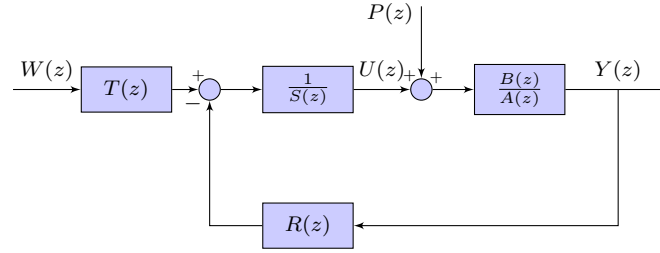


FIGURE D.28 – Système étudié.

$$G(z) = \underbrace{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}}_{A^+(z)} \underbrace{\overbrace{z^{-d}}^{B^-(z)}}_{B^+(z)}$$

et $A^-(z) = 1$

2. A partir du schéma de la figure D.28, montrer que la fonction de transfert $F_{PY}(z)$ entre la perturbation $P(z)$ et la sortie $Y(z)$ est de la forme :

$$F_{PY}(z) = \frac{BS}{AS + BR}$$

3. On pose $S(z) = (1 - z^{-1})S_1(z)$, quel type de perturbation sera asymptotiquement rejeté ? Les perturbations en échelon uniquement.
4. Afin d'obtenir un comportement astatique, donc que $F_{PY}(z)$ soit un polynôme en z^{-1} et non pas une fraction rationnelle. Ecrire l'équation diophantienne reliant les polynômes $A(z)$, $B(z)$, $R(z)$ et $S_1(z)$.

$$F_{PY}(z) = \frac{BS}{AS + BR} = \frac{\text{polynôme en } z^{-1}}{1}$$

d'où

$$AS + BR = 1 \implies (1 - az^{-1})(1 - z^{-1})S_1(z) + (1 - a)z^{-d}R(z) = 1$$

5. En prenant $d = 2$, déterminer l'ordre des polynômes $R(z)$ et $S_1(z)$.

$$\begin{aligned} d \circ R &= 1 \implies R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} \\ d \circ S_1 &= 1 \implies S_1(z) = s_0 + s_1 z^{-1} \end{aligned}$$

6. Toujours avec $d = 2$, déterminer les polynômes $R(z)$ et $S_1(z)$.

$$(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})(s_0 + s_1 z^{-1}) + (1 - a)z^{-2}(r_0 + r_1 z^{-1}) = 1$$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ -(a+1)s_0 + s_1 &= 0 \implies s_1 = a+1 \\ as_0 - (a+1)s_1 + (1-a)r_0 &= 0 \implies r_0 = -\frac{a + (a+1)^2}{1-a} \\ as_1 + (1-a)r_1 &= 0 \implies r_1 = -\frac{a(a+1)}{1-a} \end{aligned}$$

7. Déterminer la fonction de transfert $F_{WY}(z)$ entre $W(z)$ et $Y(z)$.

$$F_{WY}(z) = \frac{BT}{AS + BR} = BT = (1-a)z^{-d}T$$

2. Les degrés des polynômes $R(z)$ et $S_1(z)$ sont le résultat du match de football du 2 Avril 1955 entre Charlton Athletic et Newcastle United, comme quoi, bien connaître le foot peut être utile !

8. Calculer $T(z)$ tel que la fonction de transfert $F_{WY}(z)$ soit égale à z^{-d} .

$$F_{WY}(z) = (1-a)z^{-d}T = z^{-d} \implies T = \frac{1}{1-a}$$

9. Déterminer l'équation récurrente u_k en fonction des u_{k-i} , w_{k-i} et y_{k-i} .

3 Partie 3 (5 pts, 20 mn) Synthèse pile

1. En reprenant la figure D.27 et en posant $d = 2$, faire une synthèse de $C(z)$ de type réponse pile.
En reprenant les notations du cours :

$$\begin{aligned} 1 - F(z) &= (1 - z^{-1})^{m+1} A^{-1} K'(z) = (1 - z^{-1}) K(z) \\ F(z) &= B^+(z) B^-(z) L(z) = g(1-a) z^{-2} L(z) \end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1}) K(z) + g(1-a) z^{-2} L(z) = 1$$

$$\begin{aligned} d^\circ K(z) &= 1 \implies K(z) = k_0 + k_1 z^{-1} \\ d^\circ L(z) &= 0 \implies L(z) = l_0 \end{aligned}$$

$$(1 - z^{-1})(k_0 + k_1 z^{-1}) + g(1-a) z^{-2} l_0 = 1$$

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 \\ k_1 - k_0 &= 0 \implies k_1 = 1 \\ -k_1 + g(1-a) l_0 &= 0 \implies l_0 = \frac{1}{g(1-a)} \end{aligned}$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{(1 - az^{-1}) \frac{1}{g(1-a)}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

2. Montrez que le correcteur obtenu est instable.

$$C(z) = \frac{(1 - az^{-1}) \frac{1}{g(1-a)}}{(1 - z^{-1}) \underbrace{(1 + z^{-1})}_{\text{pôle instable!}}}$$

3. Montrer que le correcteur $C(z)$ de la première partie est égal au correcteur de la réponse pile si l'on pose $\alpha = 0$.

Si tout c'est bien passé, vous venez de découvrir que le correcteur RST permet une meilleure réjection de la perturbation que le correcteur de Dahlin (partie 1) qui n'est qu'une approximation de la réponse pile permettant d'éviter le pôle en -1 dans le cas particulier des systèmes du premier ordre retardés.

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de position d'un moteur à courant continu.

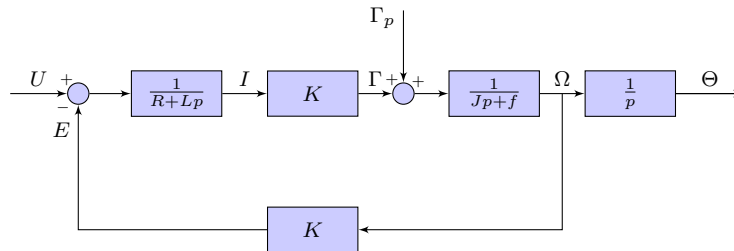


FIGURE D.29 – Schéma bloc de la machine à courant continu commandée par l'induit.

Applications numériques :

$J = 2\text{kg.m}^2$: inertie totale du rotor et de la charge
$K = 1\text{V.s.rad}^{-1}$: coefficient de F.E.M et de couple
$R = 1\Omega$: résistance de l'induit
$L = 0.05\text{H}$: inductance de l'induit
$f = 0\text{M.m.s.rad}^{-1}$: frottement visqueux

1 Modélisation - Analyse

1. A partir du schéma de la figure D.29, retrouver les équations différentielles liant :

- $u(t)$, $i(t)$ et $e(t)$
- $\gamma(t)$, $\gamma_p(t)$ et $\omega(t)$

Les conditions initiales sont supposées nulles !

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e \quad (\text{D.1})$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \gamma + \gamma_p - f\omega \quad (\text{D.2})$$

$$\gamma = ki \quad (\text{D.3})$$

$$e = K\omega \quad (\text{D.4})$$

2. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ entre la vitesse $\Omega(p)$ et la tension appliquée au moteur $U(p)$.

$$G(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2}$$

3. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de $G(p)$ en module et en phase. On donnera quelques points remarquables.
4. Toujours à main levée, tracer dans le plan complexe les pôles du système.

Pôles en -19.5 et -0.513

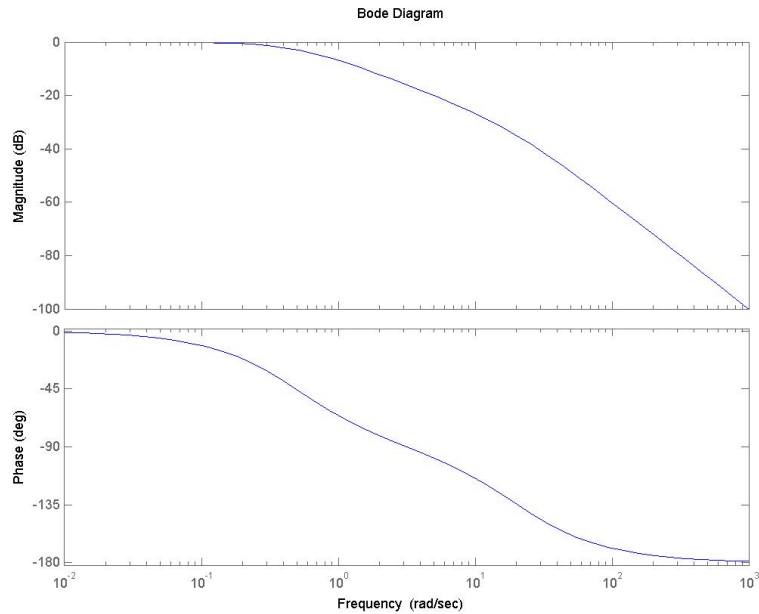


FIGURE D.30 – Diagramme de Bode du système en boucle ouverte

2 Correction proportionnelle

1. L'asservissement de la vitesse du moteur est réalisé à l'aide d'un correcteur proportionnel $C(p) = A$ et d'un capteur de vitesse de coefficient $K' = 0.1 \text{ V.s.rad}^{-1}$. Donner le schéma bloc de cet asservissement.
2. En faisant l'hypothèse que $\Gamma(p) = 0$, déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée $H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$.

$$H(p) = \frac{AK}{JLp^2 + JRp + K^2 + AKK'}$$

3. Montrer, à l'aide du critère de Routh, que quelle que soit la valeur de $A > 0$, le système en boucle fermée reste stable.

Tableau de Routh

p^2	JL	$K^2 + AKK'$	0
p^1	JR	0	0
p^0	$K^2 + AKK'$	0	0

Comme JL et JR sont positifs, il faut résoudre $K^2 + AKK' > 0$ donc :

$$A > -\frac{K}{K'}$$

4. En prenant $A = 1$ et en supposant que $U(p)$ soit un échelon unité, quelle est la valeur finale de la vitesse ?

$$H(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2 + KK'}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2 + KK'} = \frac{1}{K + K'} = 0.9091$$

5. Toujours avec $A = 1$ et $U(p)$ un échelon unité, quelle est la valeur finale de la sortie du capteur de vitesse ? Ben un dixième de la valeur précédente puisque le capteur divise par 10...

$$\frac{K'}{K + K'} = 0.09091$$

6. Déterminer A tel que l'erreur statique soit égale à 2 ‰.

$$A = 4990$$

7. Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{\alpha}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad (\text{D.5})$$

$$H(p) = \frac{AK}{JLp^2 + JRp + K^2 + AKK'} = \frac{\frac{AK}{K^2 + AKK'}}{\frac{JL}{K^2 + AKK'}p^2 + \frac{JR}{K^2 + AKK'}p + 1}$$

8. En déduire la valeur du facteur d'amortissement m . Que pensez-vous de cette valeur ?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^2 + AKK'}{JL}} \text{ et } m = \frac{1}{2} \frac{JR}{\sqrt{JL(K^2 + AKK')}}$$

Applications numériques : $\omega_0 = 10\sqrt{50} \simeq 70$ et $m = \frac{\sqrt{2}}{10} \simeq 0.14$

Le facteur d'amortissement est très faible, le temps d'établissement sera très long et le dépassement très grand.

9. Afin de réduire le facteur d'amortissement, on se propose d'ajouter une boucle supplémentaire de courant suivant le schéma de la figure D.31. Montrer que le coefficient B n'intervient que dans le terme $\frac{2m}{\omega_0}$ de l'équation D.5.

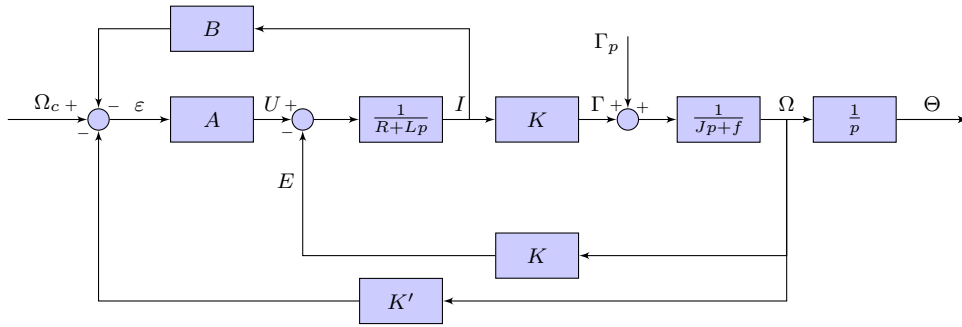


FIGURE D.31 – Boucle asservissement de vitesse et de courant simultanés.

$$H(p) = \frac{\frac{AK}{K^2 + AKK'}}{\frac{JL}{K^2 + AKK'}p^2 + \frac{J(R-AB)}{K^2 + AKK'}p + 1}$$

10. On désire un dépassement de 5% de la valeur finale. En déduire la valeur du facteur d'amortissement m correspondante puis la valeur de B .

$$\text{Dans ce cas : } \omega_0 = \sqrt{\frac{K^2 + AKK'}{JL}} \text{ et } m = \frac{1}{2} \frac{J(R-AB)}{\sqrt{JL(K^2 + AKK')}}$$

On souhaite $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$ d'où $B \simeq -8.10^{-4}$

11. Avec les réglages précédents, Quelle est l'erreur statique engendrée par un couple de perturbation $\Gamma_p(p)$ en échelon unité ?

3 Correcteur PI

1. Montrer que la fonction transfert $G(p)$, peut s'écrire sous la forme :

$$G(p) = \frac{\beta}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

avec $\tau_1 \gg \tau_2$

$$G(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2} = \frac{\beta}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \simeq \frac{1}{(1 + 1.95p)(1 + 0.05p)}$$

2. En déduire que $G(p)$ peut être approximée par :

$$\frac{\beta e^{-\tau_2 p}}{(1 + \tau_1 p)}$$

$$G(p) \simeq \frac{1}{(1 + 1.95p)(1 + 0.05p)} \simeq \frac{(1 - 0.05p)}{(1 + 1.95p)} \simeq \frac{e^{-0.05p}}{(1 + 1.95p)}$$

Que représente τ_2 alors ? Quelle est le domaine de validité fréquentiel de cette approximation ?

τ_2 est un retard pur, cette approximation est valable jusqu'à la fréquence de coupure de la constante de temps rapide (τ_2) soit jusqu'à $f = f_c = \frac{1}{2\pi\tau_2}$

3. Tracer à main levée la réponse indicielle de l'approximation de $G(p)$.
4. En déduire un correcteur PI de type Ziegler-Nichols pour le système.

$$K = 0.9 \frac{1}{a\tau} \text{ avec } a = E/T$$

$$T_i = 3.3\tau$$

$$\text{Application : } K = 0.9 \frac{T}{E\tau} = 0.9 \frac{1.95}{0.09096 \cdot 0.05} = 385.8839$$

$$T_i = 3.3\tau_2 = 0.1650$$

4 Régulation numérique

1. La transformée en z de $G(p)$ précédé d'un bloqueur d'ordre 0 avec une période d'échantillonnage de $T_e = 0.05s$ est :

$$G(z) = \frac{0.09179(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1})}$$

2. Le système est bouclé, comme dans la partie analogique à l'aide d'un correcteur proportionnel $C(z) = A$ et d'un capteur de vitesse de coefficient $K' = 0.1V.s.rad^{-1}$. Donner le schéma bloc de cet asservissement. On précisera les parties numériques et analogiques.
3. En utilisant le critère de Jury, déterminer la plage de gains $A > 0$ tel que le système en boucle fermée soit stable.

En boucle fermée :

$$H(z) = \frac{AG(z)}{1 + AK'G(z)} = \frac{0.09179A(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1}) + 0.09179AK'(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.09179A(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1}) + 0.09179AK'(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.09179A(z + 0.7181)}{(z^2 + (-1.3521 + 0.009179A)z + (0.3679 + 0.00066A))}$$

Critère de Jury :

- $D(1) > 0 \implies 0.15749 + 0.1577A > 0 \implies A > -0.99$
- $-1^n D(-1) > 0 \implies 0.2720129503 - 0.00025875A > 0 \implies A < 1051.23$
- $|a_0^0| - a_2^0 < 0 \implies |0.0006591A + 0.03679| - 1 < 0 \implies -207.25 < A < 95.77$

Donc $-0.99 < A < 95.77$

4. En l'absence de perturbation $\Gamma(z)$, déterminer l'erreur statique minimale que l'on peut obtenir avec un tel correcteur.

On calcule $\varepsilon(t)$ pour $A = A_{max} = 95.77$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z)$$

avec :

$$\varepsilon(z) = \Omega_c(z) - \Omega(z)K' = \Omega_c(z) - \varepsilon(z)AG(z)K'$$

$$\varepsilon(z) = \frac{\Omega_c(z)}{1 + AG(z)K'} = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1 + A \frac{0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}} K'$$

$$\varepsilon(z) = \frac{\frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{1-z^{-1}}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{\frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{1-z^{-1}}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'} = 0.01$$

5. En posant :

$$C(z) = K \frac{(1-b_0z^{-1})(1-b_1z^{-1})(1-b_2z^{-1})}{(1-a_1z^{-1})^l(1-a_0z^{-1})}$$

Quelle valeur donner à a_1 pour obtenir une erreur statique nulle ?

$a_1 = 1 \implies$ Pôle en 1 donc un intégrateur pur

6. Le correcteur $C(z)$ est-il causal ?

non

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de température d'un four.

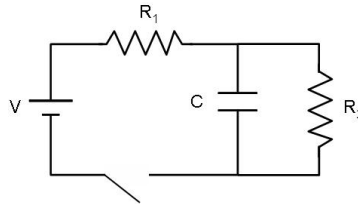


FIGURE D.32 – Modèle électrique équivalent d'un four.

Applications numériques : *Fantaisistes pour simplifier les calculs*

$$V = 1000$$

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 1$$

$$C = 1$$

$$\tau = 0.1$$

1 Modélisation - Analyse

L'interrupteur est tel qu'il s'ouvre lorsque la température dépasse 200°C et se ferme lorsqu'elle est inférieure à 190°C . La température ambiante est de 20°C .

1. Déterminer la tension aux bornes de R_2 , V_{R_2} (la température du four) en fonction de la valeur des composants et de V en se référant au schéma de la figure D.32.
Les conditions initiales seront supposées NON nulles !
2. Calculer le temps nécessaire pour atteindre la température de 200°C .
3. Tracer à main levée, la forme générale de la température du four en fonction du temps.

2 Asservissement de type P

On implante un capteur de température dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

1. L'interrupteur étant fermé, déterminer la fonction de transfert $G(p)$ liant la température du four (V_{R_2}) et la puissance électrique consommée par la résistance (V).
2. Dessiner le schéma d'un asservissement de type P, faisant apparaître, le four, le capteur, le sommateur, le correcteur.
3. On asservi le système avec un correcteur de type proportionnel de gain A . Montrer que si $A > 0$ le système asservi en boucle fermée est toujours stable.
4. Déterminer A tel que le système en boucle fermée présente un dépassement de 20%.
5. Quelle est alors la pulsation propre du système asservi ?
6. Soumis à un échelon de commande $Y_c = 200^\circ\text{C}$, Quelle est l'erreur statique ?

3 Asservissement de type PI

Dans cette partie on fera l'hypothèse que τ est très petite devant d'autres constantes de temps et peut être assimilée à un retard pur.

1. Donner la nouvelle fonction de transfert $G'(p) = G(p)H(p)$ tenant compte de cette hypothèse.
2. Calculer un correcteur de type PI pour ce système.
3. Soumis à un échelon de commande $Y_c = 200^\circ\text{C}$, Quelle est l'erreur statique ?

4 Asservissement numérique

1. Déterminer la transformée en z de l'ensemble four et capteur de température précédés d'un bloqueur d'ordre 0.
2. Ce système est asservi par un correcteur proportionnel de gain A . Déterminer les limites de A telles que le système reste stable en boucle fermée.
3. Déterminer la relation entre T_e , A et la stabilité du système en boucle fermée.

1^{ère} année
Juin 2012

Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Cet examen se compose de deux parties totalement indépendantes. Au sein des parties, les questions sont largement indépendantes entre elles, ne restez pas bloqué sur une question.

Les résultats seront plus concis et les réponses un peu plus "faciles" à trouver en utilisant la forme en z^{-1} , sauf pour l'application du critère de Jury, qui implique la forme en z .

1 Partie 1 (10 pts, 1h) La suite de Fibonacci...

La suite de Fibonacci est définie par :

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

avec $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$

1. En utilisant le théorème de l'avance, montrer que la transformée en z $F(z)$ de la suite de Fibonacci s'écrit sous la forme :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

- En posant $\mathcal{Z}[f_n] = F(z)$, déterminer $\mathcal{Z}[f_{n+1}]$, en fonction de $F(z)$ et des conditions initiales
- En déduire $\mathcal{Z}[f_{n+2}]$, puis la transformée $F(z)$ de la suite de Fibonacci.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k F(z) - z^k F(0) - z^{k-1} F(T_e) - z^{k-2} F(2T_e) - \dots - z F((k-1)T_e) \\ \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT_e) z^{-n} \right]\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_n] &= F(z) \\ \mathcal{Z}[f_{n+1}] &= zF(z) - zf(0) \\ \mathcal{Z}[f_{n+2}] &= z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1)\end{aligned}$$

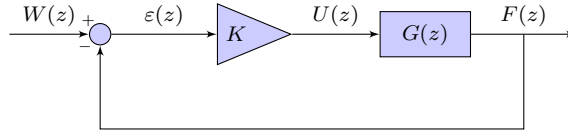
donc :

$$\begin{aligned}z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1) &= zF(z) - zf(0) + F(z) \\ z^2 F(z) - z &= zF(z) + F(z) \\ F(z)(z^2 - z - 1) &= z \\ F(z) &= \frac{z}{z^2 - z - 1}\end{aligned}$$

2. On définit un système échantillonné $G(z)$ tel que, soumis à une entrée en échelon $U(z)$, sa sortie est le signal $F(z)$. Donner la transmittance opérationnelle de $G(z)$.

$$F(z) = U(z)G(z)$$

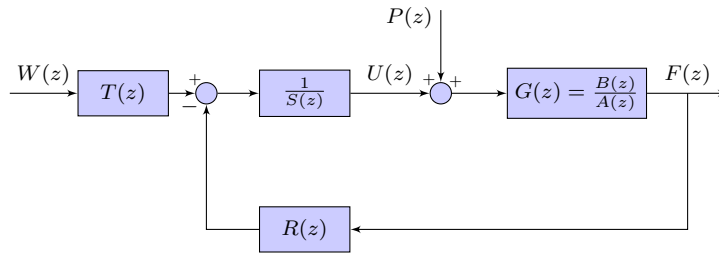
$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)} = \frac{\frac{z}{z^2 - z - 1}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z^2 - z - 1} = \frac{(1 - z^{-1})z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

FIGURE D.33 – Tentative de stabilisation par un gain K .

3. Montrer que la transmittance $G(z)$ est instable. pôles de $G(z)$: $z_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1.6$ (instable) et $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6$
4. Montrer qu'il n'existe pas de valeur de gain K tel que le système décrit en figure D.33 soit stable.
Fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF(z) = \frac{K(z-1)}{z^2 + (K-1)z - (K+1)}$$

Critère de Jury : $D(1) > 0 \implies 1 + (K-1) - (K+1) > 0 \implies -1 > 0$ donc toujours instable $\forall K$.

FIGURE D.34 – Principe de correcteur par correcteur RST. $P(z)$ est une perturbation.

5. On se propose de corriger le système avec un correcteur de type RST (cf. fig.D.34). Décomposez $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

$$G(z) = \frac{(1-z^{-1})z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{(1-z^{-1})z^{-1}}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{\overbrace{(1-z^{-1})z^{-1}}^{B^-(z)}}{\underbrace{(1-z_2z^{-1})}_{A^+(z)} \underbrace{(1-z_1z^{-1})}_{A^-(z)}}$$

6. Déterminer la fonction de transfert $F_{WY}(z)$ en fonction des polynômes A, B, R, S et T entre la consigne $W(z)$ et la sortie $F(z)$.

$$F_{WY}(z) = \frac{BT}{AS + BR}$$

7. On pose $S(z) = (1-z^{-1})^n S_1(z)$. Quelle valeur doit-on donner à n pour avoir une erreur statique nulle, y compris en présence de perturbations $P(z)$ de type échelon ? $n = 1$
8. On souhaite avoir un comportement de type premier ordre précédé d'un bloqueur d'ordre 0 avec un gain statique de 1 et un pôle en α . Donner le modèle de la fonction de transfert modèle voulue $M_{WY}(z)$ en boucle fermée.

$$M_{WY}(z) = \frac{1-\alpha}{z-\alpha} = \frac{(1-\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

9. Bien que l'un des pôles de la fonction de transfert soit compensable, **on décide de ne pas le compenser**.
Après simplification de l'équation $F_{WY}(z) = M_{WY}(z)$, déterminer les polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$.

$$F_{WY}(z) = \frac{(1 - z^{-1})z^{-1}T(z)}{(1 - z^{-1})S_1(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) + (1 - z^{-1})z^{-1}R(z)} = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

qui se simplifie en :

$$F_{WY}(z) = \frac{T(z)}{(1 - z^{-1} - z^{-2})S_1(z) + z^{-1}R(z)} = \frac{(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Résolution de l'équation diophantienne : forme $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$

$$\underbrace{(1 - z^{-1} - z^{-2})}_{\mathbb{A}} \underbrace{S_1(z)}_{\mathbb{X}} + \underbrace{z^{-1}}_{\mathbb{B}} \underbrace{R(z)}_{\mathbb{Y}} = \underbrace{1 - \alpha z^{-1}}_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{array}{ccc} d^\circ \mathbb{C} & ? & d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \\ 1 & < & 2 + 1 \end{array}$$

donc l'équation est régulière, on en déduit que :

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 &\implies d^\circ S_1(z) = 0 \implies S_1(z) = s_0 \\ d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 &\implies d^\circ R(z) = 1 \implies R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} \end{aligned}$$

donc :

$$(1 - z^{-1} - z^{-2})s_0 + z^{-1}(r_0 + r_1 z^{-1}) = 1 - \alpha z^{-1}$$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ -s_0 + r_0 &= -\alpha \\ -s_0 + r_1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où : $s_0 = 1, r_0 = (1 - \alpha), r_1 = 1$

$$T(z) = (1 - \alpha), S_1(z) = 1, S(z) = (1 - z^{-1}), R(z) = (1 - \alpha) + z^{-1}$$

2 Partie 2 (10 pts, 1h) Système instable

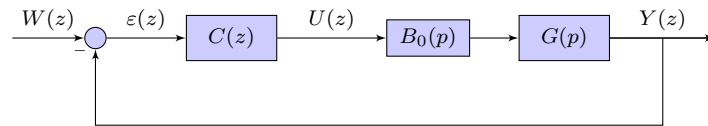


FIGURE D.35 – Système étudié.

Soit le système $G(p)$ tel que :

$$G(p) = \frac{1}{1 - \tau p}$$

avec $\tau > 0$, le système est donc instable !

Synthèse du correcteur

1. Déterminer la transformée en z $G(z)$ de $G(p)$ précédé d'un bloqueur d'ordre 0. On posera $a = e^{T_e/\tau}$

$$G(z) = \frac{1-a}{z-a} = \frac{(1-a)z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad \text{avec } a = e^{T_e/\tau}$$

2. Décomposez $G(z)$ sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où $B^+(z), A^+(z)$ sont compensables et $B^-(z), A^-(z)$ ne le sont pas.

$$G(z) = \frac{\overbrace{(1-a)}^{B^+(z)} \overbrace{z^{-1}}^{B^-(z)}}{\underbrace{(1-az^{-1})}_{A^-(z)}}$$

3. Déterminer un correcteur $C(z)$ pour le système $G(z)$ de type réponse pile pour une entrée en échelon. Soit à résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - F(z) &= (1 - z^{-1})A^-K(z) \\ F(z) &= B^+(z)B^-(z)L(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})A^-K(z) + B^+(z)B^-(z)L(z) &= 1 \\ (1 - z^{-1})(1 - az^{-1})K(z) + (1 - a)z^{-1}L(z) &= 1 \end{aligned}$$

Résolution de l'équation diophantienne : forme $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$

$$\underbrace{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})K(z)}_{\mathbb{A}} + \underbrace{(1 - a)z^{-1}L(z)}_{\mathbb{B}} = \underbrace{1}_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{C} &? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \\ 0 &< \quad 2 + 1 \end{aligned}$$

donc l'équation est régulière, on en déduit que :

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 &\implies d^\circ K(z) = 0 \implies K(z) = k_0 \\ d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 &\implies d^\circ L(z) = 1 \implies L(z) = l_0 + l_1 z^{-1} \end{aligned}$$

En appliquant :

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})(1 - az^{-1})k_0 + (1 - a)z^{-1}(l_0 + l_1 z^{-1}) &= 1 \\ \implies \begin{cases} k_0 = 1 \\ -k_0(1 + a) + (1 - a)l_0 = 0 \\ ak_0 + (1 - a)l_1 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} k_0 = 1 \\ l_0 = \frac{1+a}{1-a} \\ l_1 = \frac{-a}{1-a} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où le correcteur :

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{(1 - z^{-1})K(z)} = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Etude de la réponse temporelle en boucle fermée

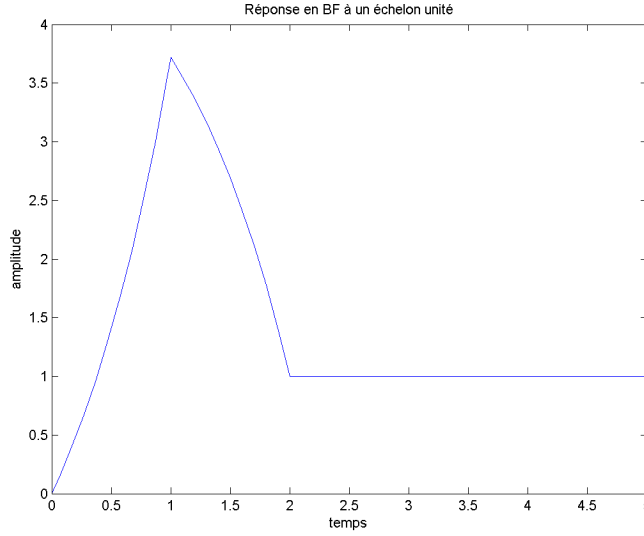


FIGURE D.36 – Réponse du système en boucle fermée (ici, $y(T_e) = 3.75, T_e = 1s$).

4. Le correcteur $C(z)$ est de la forme :

$$C(z) = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La sortie analogique mesurée sur le système asservi avec le correcteur $C(z)$ donné précédemment est représentée en figure D.36. Déterminer la première commande $u(0)$ envoyée au bloqueur d'ordre 0. Avec les notations de la figure D.35

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

donc :

$$U(z)(1 - z^{-1}) = \varepsilon(z)(l_0 + l_1 z^{-1})$$

En repassant en temporel :

$$u(k) - u(k-1) = l_0 \varepsilon(k) + l_1 \varepsilon(k-1)$$

à l'instant $k = 0$

$$u(0) = l_0 \varepsilon(0)$$

et $\varepsilon(0) = 1$ car le système n'a pas le temps de bouger et il est soumis à un échelon unité. donc

$$u(0) = l_0 = \frac{1+a}{1-a}$$

5. Le signal de sortie $y(t)$ est donné en figure D.36. Montrer que ce signal $y(t)$ est donné par la fonction :

$$y(t) = l_0(1 - e^{t/\tau}) \quad \text{pour } 0 < t < T_e$$

Entre 0 et T_e tout se passe comme si le système était soumis à un échelon d'amplitude l_0 donc :

$$Y(p) = \frac{l_0}{p} G(p) = \frac{l_0}{p} \frac{1}{1 - \tau p}$$

dont l'original est (cf tables) :

$$y(t) = l_0(1 - e^{t/\tau})$$

6. Déterminer T_e pour que la sortie $y(T_e)$ soit égale à 3 pour une entrée en échelon unité.

$$y(T_e) = l_0(1 - e^{T_e/\tau}) = \frac{1+a}{1-a}(1 - e^{T_e/\tau}) = \frac{1 + e^{T_e/\tau}}{1 - e^{T_e/\tau}}(1 - e^{T_e/\tau}) = 1 + e^{T_e/\tau}$$

il faut donc résoudre :

$$1 + e^{T_e/\tau} = 3 \quad \text{soit} \quad e^{T_e/\tau} = 2 \quad \text{donc} \quad T_e/\tau = \ln 2$$

donc

$$T_e = \ln 2 \, \tau$$

7. Montrer que, quelle que soit T_e la sortie $y(T_e)$, sera au moins égale à 2 pour une entrée en échelon unité.

$$y(T_e) = 1 + e^{T_e/\tau}$$

T_e et τ sont positifs donc $T_e/\tau > 0$

$$\lim_{T_e \rightarrow 0} y(T_e) = \lim_{T_e \rightarrow 0} 1 + e^{T_e/\tau} = 2$$

Donc au mieux, le système présente 100% de dépassement... un correcteur RST ferait nettement mieux, mais ce sera l'objet d'un prochain examen !