

Chapitre 8

Analyse fréquentielle des systèmes linéaires continus

8.1. Introduction

8.2. Transmittance isochrone

- 8.2.1. Réponse d'un système linéaire en régime harmonique
- 8.2.2. Définition de la transmittance isochrone
- 8.2.3. Transmittance isochrone et plan complexe
- 8.2.4. Lieux de transfert des transmittances isochrones

8.3. Système du premier ordre

- 8.3.1. Calcul de $H(j\omega)$
- 8.3.2. Lieu de Nyquist
- 8.3.3. Diagramme de Bode
- 8.3.4. En résumé

8.4. Système du deuxième ordre

- 8.4.1. Calcul de $H(j\omega)$
- 8.4.2. Lieu de Nyquist
- 8.4.3. Diagramme de Bode
- 8.4.4. Diagramme de Black-Nichols
- 8.4.5. En résumé

8.5. Système à retard pur

- 8.5.1. Lieu de Nyquist
- 8.5.2. Diagramme de Bode
- 8.5.3. Prise en compte des retards purs avec MATLAB

8.6. Système à déphasage minimal

- 8.6.1. Définition
- 8.6.2. Exemple traité avec MATLAB

8.7. Transmittance des systèmes complexes

- 8.7.1. Principes
- 8.7.2. Mise en place du lieu de transfert
- 8.7.3. Tracé des lieux de transfert

8.8. Utilisation de MATLAB

- 8.8.1. Commandes MATLAB pour obtenir des valeurs
- 8.8.2. Commandes MATLAB pour obtenir des tracés

8.9. Intérêt du lieu de Black-Nichols

- 8.9.1. Modification du gain statique
- 8.9.2. Mise en série de transmittances
- 8.9.3. Identification d'une transmittance
- 8.9.4. Prise en compte des retards purs
- 8.9.5. Détermination de la FTBF

8.10. Relation de Bayard-Bode

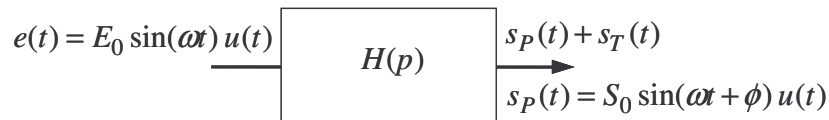
8.1. INTRODUCTION

L'analyse des systèmes linéaires par l'étude de leur réponse en régime permanent à une excitation sinusoïdale est d'un emploi très fréquent. L'intérêt de cette méthode réside dans son *caractère pratique et expérimental*. De plus l'étude de la stabilité des systèmes bouclés et la synthèse des correcteurs nécessaires pour atteindre les performances requises, peuvent être réalisées directement à partir de la connaissance du lieu de transfert fréquentiel de la boucle ouverte.

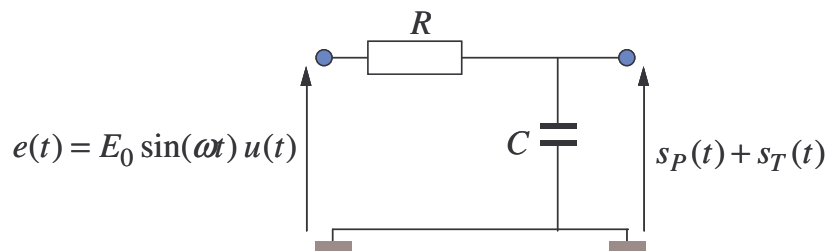
8.2. TRANSMITTANCE ISOCHRONE

8.2.1. REPONSE D'UN SYSTEME LINEAIRE EN REGIME HARMONIQUE

Considérons un système linéaire de transmittance $H(p)$. Ce système est excité par un signal d'entrée de type sinusoïdal $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$. La résolution de l'équation différentielle définissant le système permet d'évaluer la sortie $s(t)$. Ce signal est composé d'un signal $s_T(t)$ correspondant au régime transitoire et d'un signal $s_P(t)$, de type sinusoïdal, correspondant au régime permanent.



Exercice 8.1. : Calculer la tension de sortie du circuit RC excité par un signal sinusoïdal.



$$e(t) = E_0 \sin(\omega t) u(t) \Rightarrow E(p) = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad \tau = RC = \frac{1}{\alpha}$$

$$S(p) = E_0 \cdot \omega \cdot \alpha \cdot \frac{1}{p + \alpha} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{p + \alpha} + \frac{-p + \alpha}{p^2 + \omega^2} \right]$$

$$s(t) = \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \left[e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right] u(t)$$

$$s(t) = \left\{ \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} + \frac{E_0 \cdot \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cos(\omega t) \right\} u(t)$$

$$s(t) = \left\{ \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} + \frac{E_0 \cdot \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\omega t) \right] \right\} u(t)$$

$$\text{Posons : } \cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{-\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \Rightarrow \phi = -\arctg(\tau \omega)$$

$$s(t) = \left\{ \frac{E_0 \cdot \omega \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} + E_0 \cos \phi \cdot [\cos \phi \cdot \sin(\omega t) + \sin \phi \cdot \cos(\omega t)] \right\} u(t)$$

$$s(t) = \boxed{\frac{E_0 \omega \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} u(t)} + \boxed{E_0 \cos(\phi) \sin(\omega t + \phi) u(t)}$$

régime transitoire
régime permanent

Le régime transitoire s'éteint exponentiellement. Aussi observe-t-on, qu'en régime permanent, la sortie est bien de même nature que l'entrée. Cependant elle présente un déphasage ϕ (retard de phase car $\phi < 0$) et un gain (égal à $\cos \phi < 1$) fonction de la pulsation ω du signal d'entrée.

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t) u(t) \quad \xrightarrow{H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}} \quad s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi) u(t)$$

La réponse harmonique du système linéaire correspond au **régime sinusoïdal permanent** lorsque la pulsation varie de zéro à l'infini.

8.2.2. DEFINITION DE LA TRANSMITTANCE ISOCHRONE

Considérons un système linéaire de transmittance $H(p)$. Ce système est excité par un signal d'entrée de type sinusoïdal.

$$\begin{aligned} e_1(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) &\Rightarrow s_1(t) = S_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ e_2(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) &\Rightarrow s_2(t) = S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \end{aligned}$$

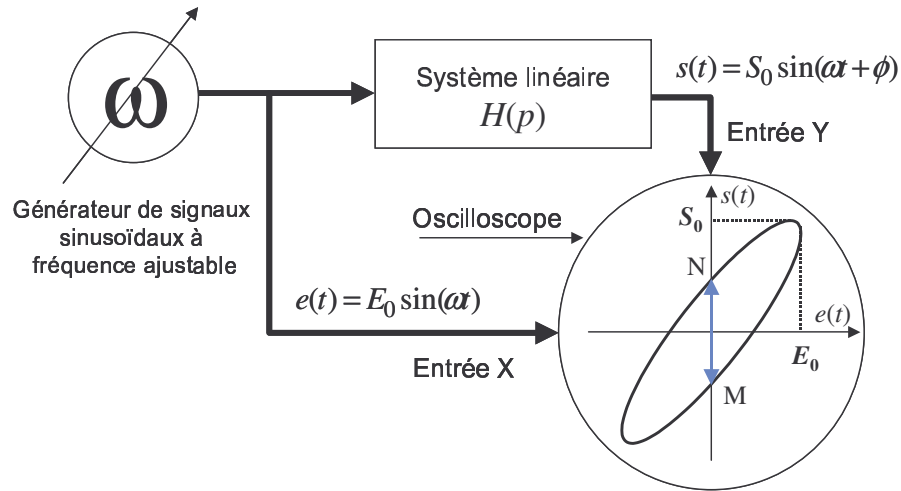
Par application du théorème de superposition on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + jE_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) &\Rightarrow \mathcal{E}(t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \mathcal{S}(t) = S_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) + jS_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) &\Rightarrow \mathcal{S}(t) = S_0 \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$

La fonction de transfert harmonique (isochrone) est un nombre complexe tel que :

$$\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\phi}$$

Au contraire de la transmittance isomorphe, cette expression a un contenu physique puisque son module est le rapport de deux amplitudes et son argument est le déphasage existant entre deux signaux. Ces 2 quantités sont donc accessibles à la mesure à partir du dispositif suivant :



On vérifiera que la courbe résultant de la composition des deux signaux $e(t)$ et $s(t)$ est une ellipse d'équation :

$$\frac{s^2}{S_0^2} + \frac{e^2}{E_0^2} - \frac{2se}{E_0 S_0} \cos \phi - \sin^2 \phi = 0$$

Le générateur fournit des signaux réglables en fréquence. On obtient une figure dite de LISSAJOUS avec un instrument de visualisation adapté (oscilloscope, table traçante, etc.). On mesure ainsi les amplitudes (E_0 et S_0) et le déphasage ϕ ($\sin \phi = MN / 2S_0$) pour chaque valeur de la pulsation ω . Par ailleurs on remarque que :

$$\frac{d^d \mathcal{S}}{dt^d} = (j\omega)^d \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \frac{d^n \mathcal{E}}{dt^n} = (j\omega)^n \mathcal{E}$$

En portant ces valeurs dans l'équation différentielle caractéristique du système :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^d b_j \frac{d^j s}{dt^j} &= \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i e}{dt^i} \\ \mathcal{S} \sum_{j=0}^d b_j (j\omega)^j &= \mathcal{E} \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i \\ \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{E}} &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}{\sum_{j=0}^d b_j (j\omega)^j} = H(j\omega) = \left. \frac{\sum_{i=1}^n a_i p^i}{\sum_{j=1}^d b_j p^j} \right]_{p=j\omega} \end{aligned}$$

La fonction de transfert isochrone d'un système linéaire est égale à sa transmittance isomorphe pour $p = j\omega$. Elle caractérise la réponse harmonique du système linéaire.

$$[H(p)]_{p=j\omega} = \frac{S_0}{E_0} \cdot e^{j\phi} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{S_0}{E_0} \\ \arg[H(j\omega)] = \phi \end{cases}$$

L'intérêt qui s'attache à la connaissance de $H(j\omega)$ est essentiellement dû au caractère de cette expression qui peut être évaluée expérimentalement comme nous l'avons indiqué plus haut. Signalons encore que l'on peut identifier $H(j\omega)$ par sa réponse harmonique et déduire de ces mesures la transmittance $H(p)$.

8.2.3. TRANSMITTANCE ISOCHRONE ET PLAN COMPLEXE

Comme nous l'avons montré au chapitre 3 il est possible de calculer une fonction de transfert dans le plan complexe $\forall p$, en particulier si $p = j\omega$. Il suffit de choisir les points M d'affixe p sur l'axe imaginaire du plan de LAPLACE. Nous appliquerons cette méthode au calcul des fonctions de transfert isochrones des systèmes du premier ordre et du deuxième ordre.

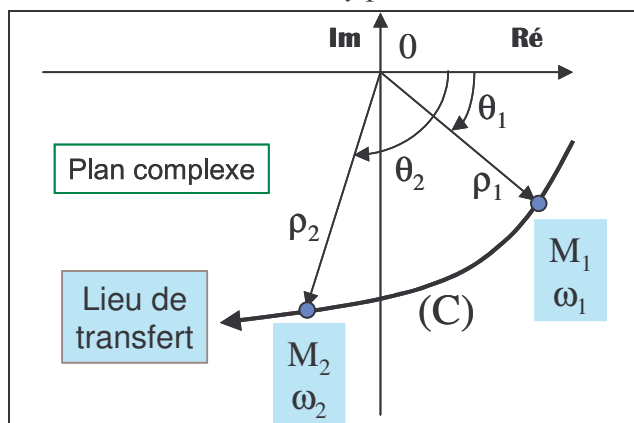
8.2.4. LIEUX DE TRANSFERT DES TRANSMITTANCES ISOCHRONES

La transmittance isochrone s'obtient en remplaçant p par $j\omega$ dans l'expression de la transmittance isomorphe $H(p)$. $H(j\omega)$ est un nombre complexe fonction de la pulsation ω . Son module est égal au gain $A(\omega)$ de la fonction de transfert et son argument est égal au déphasage entrée – sortie $\phi(\omega)$ de la fonction de transfert. **On appelle lieu de transfert le lieu décrit par le point M d'affixe $H(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à l'infini.**

Nous utiliserons le logiciel MATLAB et la boîte à outils associée (Control System Toolbox) pour réaliser les tracés des lieux de transfert de la transmittance :

$$H(p) = \frac{p+10}{0.001p^3 + 0.002p^2 + p}$$

a. Lieu de Nyquist



Soit $\omega = \omega_1$:

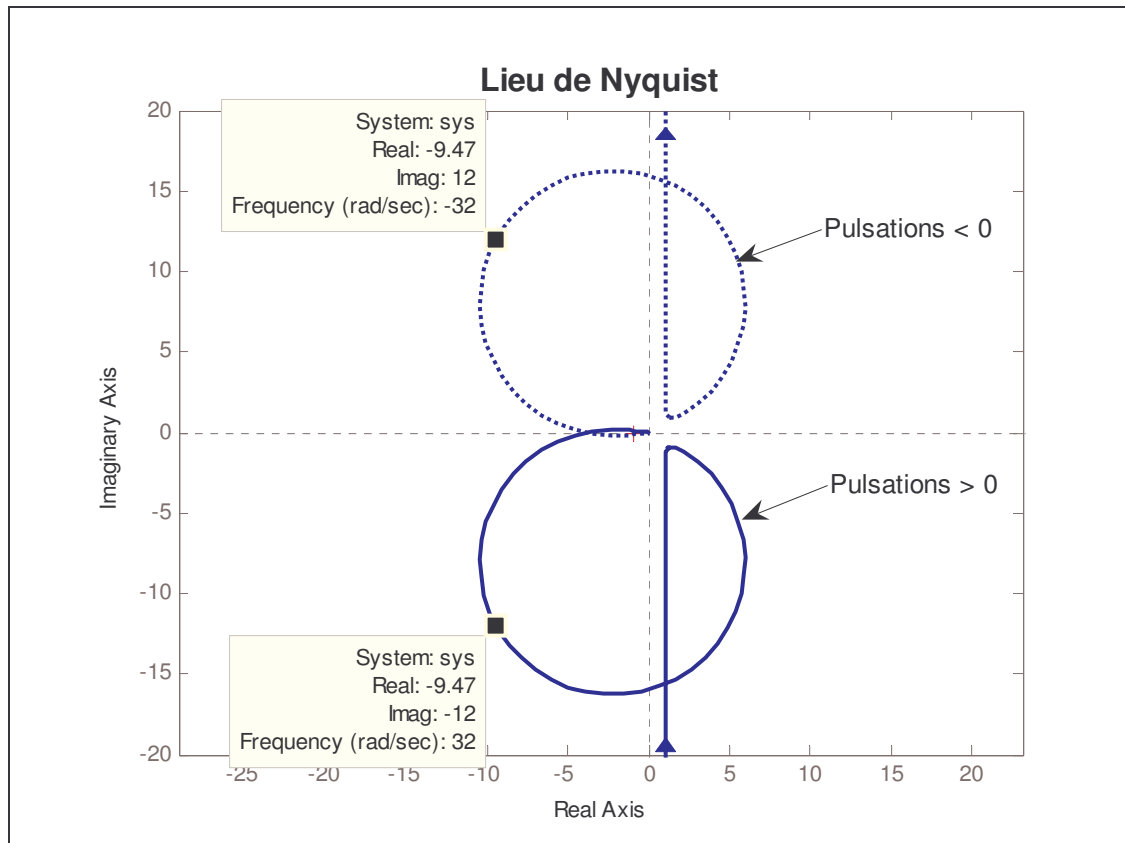
$$OM_1 \cong H(j\omega_1) \begin{cases} \rho_1 = |H(j\omega_1)| \\ \theta_1 = \arg H(j\omega_1) \end{cases}$$

Soit $\omega = \omega_2$:

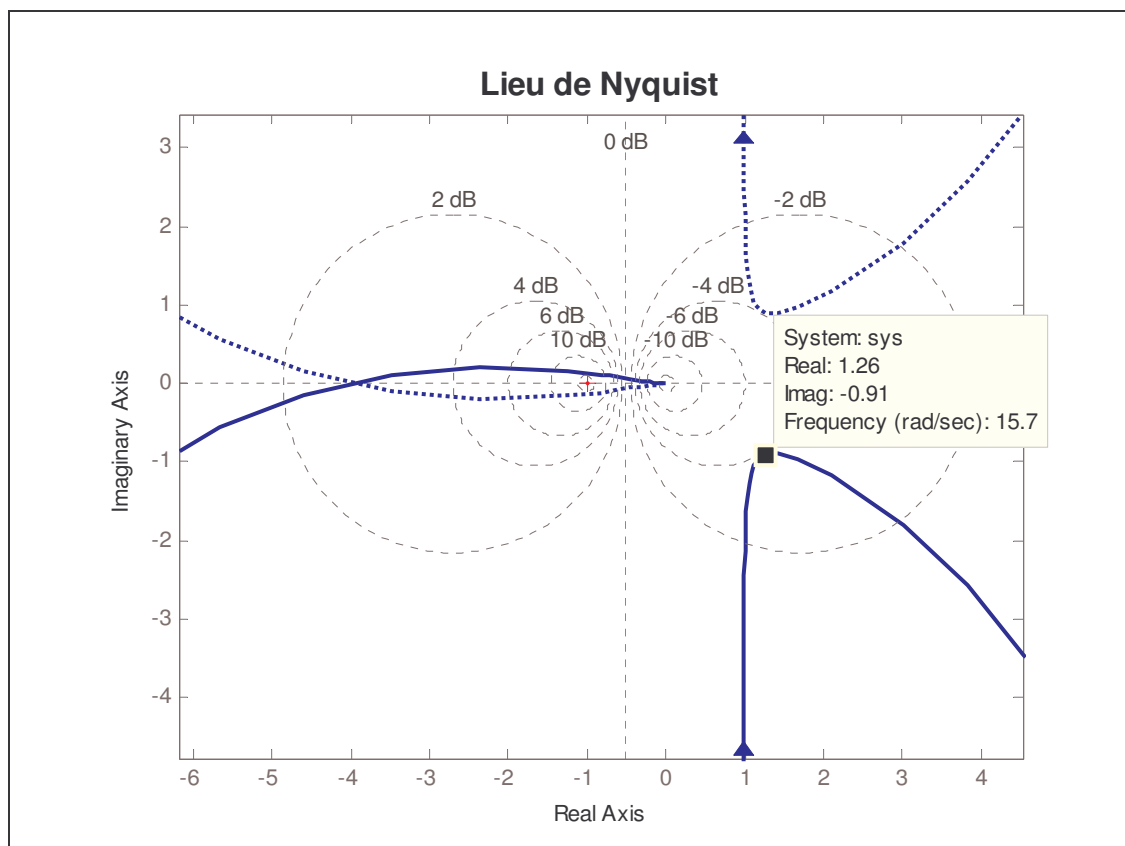
$$OM_2 \cong H(j\omega_2) \begin{cases} \rho_2 = |H(j\omega_2)| \\ \theta_2 = \arg H(j\omega_2) \end{cases}$$

Le lieu de NYQUIST est la courbe décrite par le point M, extrémité du vecteur $H(j\omega)$, lorsque la pulsation ω varie de zéro à l'infini. Cette courbe (C) est paramétrée en ω .

<pre>% % Script Chap8_1.m % ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYS. LIN. % LIEUX DE TRANSFERT % Cours Au 41 de J.-L. Cougnon % Version du 7 juin 2005 %% clear all;clc;</pre>	
<pre>% % Lieu de Nyquist sys=tf([1 10],[0.001 0.002 1 0]) figure(1);nyquist(sys); axis equal title('Lieu de Nyquist')</pre>	<p>Transfer function: $s + 10$ <hr/> $0.001 s^3 + 0.002 s^2 + s$</p>



En faisant un zoom autour du point critique $(-1, 0)$ et en faisant apparaître le contour de l'abaque de Hall (Cf. Chapitre 9), on obtient :



Noter le sens des ω croissant.

Le tracé pour les pulsations négatives est le symétrique du tracé réalisé pour les pulsations positives. Nous indiquerons l'intérêt de ce tracé au chapitre 9.

b. Diagramme de BODE

A la représentation du lieu de NYQUIST, courbe paramétrée en ω , on substitue deux courbes représentant respectivement le module (le gain) $\{H(j\omega)\}$ et l'argument (le déphasage) $Arg(H(j\omega))$ de la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω (exprimée en radian par seconde – rad/s).

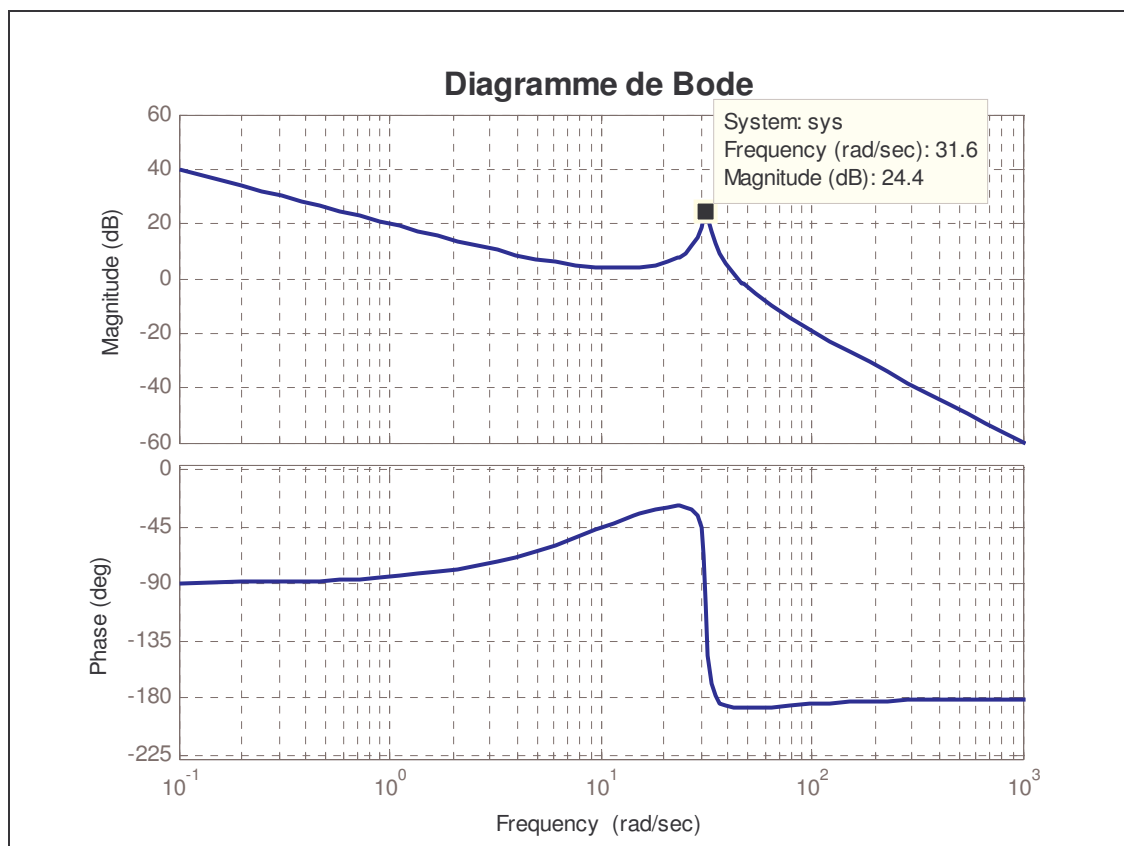
En fait c'est le gain logarithmique $A_{dB}(\omega) = 20\log\{|H(j\omega)|\}$, exprimé en décibels (dB), qui est représenté sur du papier semi-logarithmique¹. L'argument, exprimé en degrés, est représenté en fonction de ω .

La pulsation ω varie sur plusieurs décades² (4 décades sur la figure ci-dessous).

On appelle décade l'intervalle de pulsation qui existe entre ω et 10ω .

On appelle octave l'intervalle de pulsation qui existe entre ω et 2ω .

```
% Lieu de Bode
figure(2);bode(sys);grid
title('Diagramme de Bode')
```



La courbe des amplitudes (gain) $A_{dB} = f(\omega)$ de la transmittance isochrone est donnée par :

$$A_{dB} = 20\log|H(j\omega)|$$

¹ L'échelle des abscisses est logarithmique alors que celle des ordonnées est linéaire.

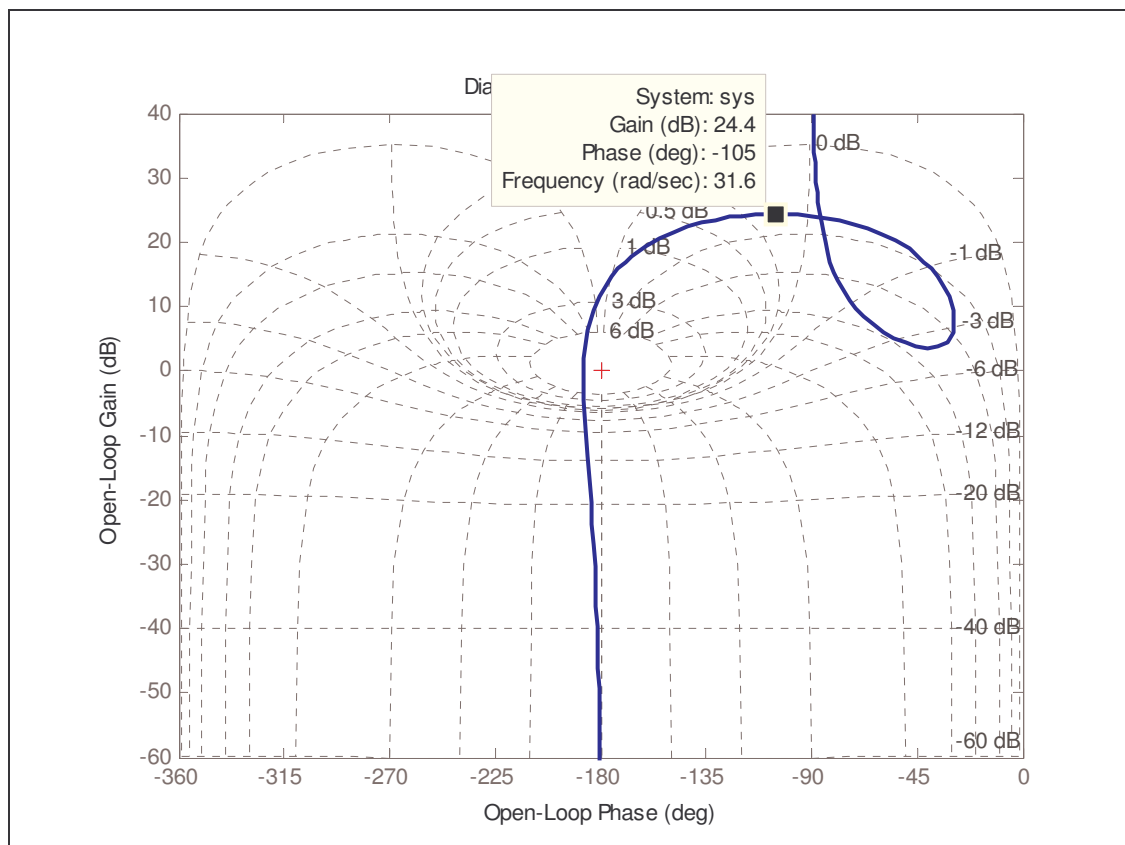
² Il est facile de construire une échelle logarithmique sachant qu'en base 10, $\lg 2 = 0,3$ et $\lg 3 = 0,47$.

c. Diagramme de BLACK-NICHOLS

Ce diagramme est directement issu du diagramme de BODE. En effet on transpose les courbes du diagramme de BODE en portant dans un système d'axes rectangulaires :

- en abscisse, le déphasage exprimé en degrés,
- en ordonnées, le gain (le module) exprimé en dB.

```
% Lieu de Black-Nichols
figure(3);nichols(sys);grid
title('Diagramme de Black-Nichols')
```



La courbe obtenue est paramétrée en ω (rad/s).

Exercice 8.2. : Tracer les lieux de transfert de la transmittance $H(p) = \frac{2}{p}$

- Commentaires

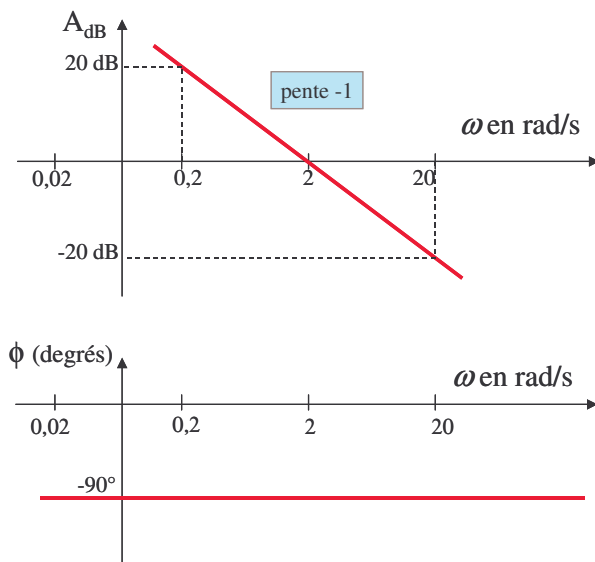
$$H(j\omega) = \left[\frac{2}{p} \right]_{p=j\omega} = \frac{2}{\omega} e^{-j90^\circ}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} |H(j\omega)| = 2 / \omega \\ \arg H(j\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

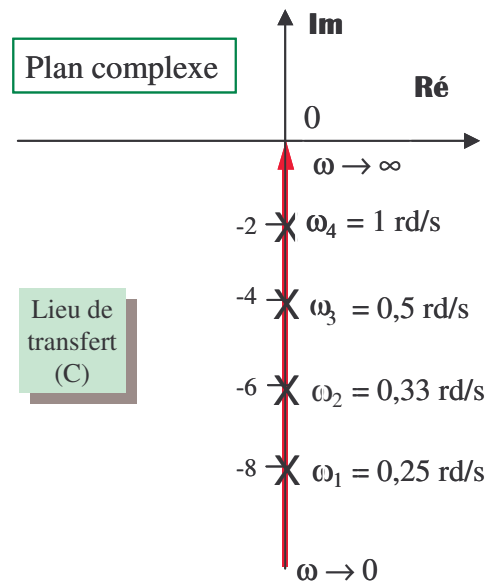
- Quelques remarques concernant BODE :

- l'axe des abscisses est gradué en $\log(\omega)$
- la courbe de gain est une droite de pente $-20 \text{ dB/décade} = -6 \text{ dB/octave}$; on dira de pente (-1) .
- la courbe de gain coupe l'axe des abscisses pour $\omega = 2 \text{ rad/s}$

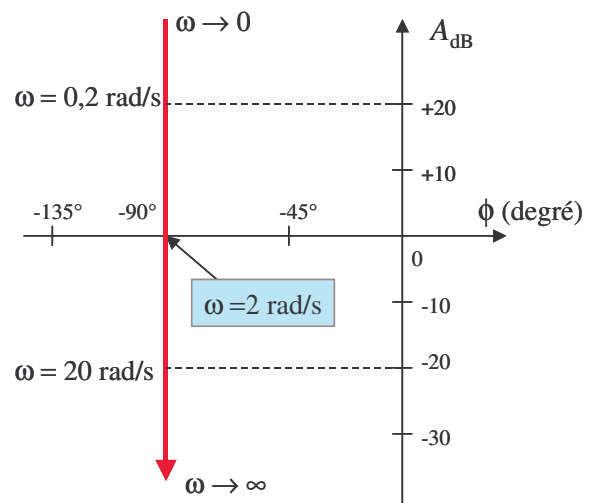
- Diagramme de BODE



- Lieu de NYQUIST



- Diagramme de BLACK-NICHOLS



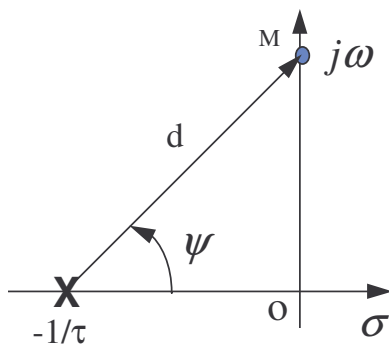
8.3. SYSTEME DU PREMIER ORDRE

La fonction de transfert isochrone d'un circuit du premier ordre est la suivante.

$$e(t) = E_0 \sin(\omega \cdot t) \quad \boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}} \quad s(t) = S_0 \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

8.3.1. CALCUL DE $H(j\omega)$

La fonction de transfert écrite sous la forme d'EVANS permet de positionner le pôle dans le plan complexe :



$$H(p) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \quad (\text{forme d'EVANS})$$

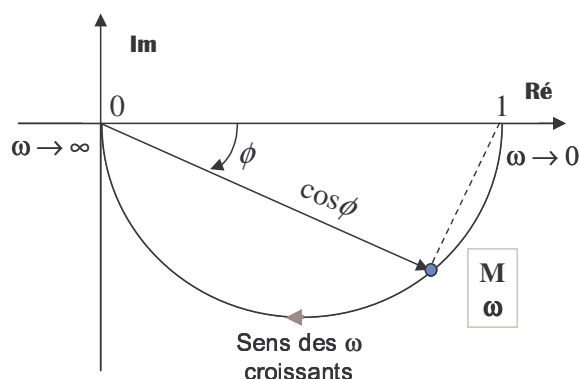
$$[H(p)]_{p=j\omega} = \frac{1}{\tau d} e^{-j\psi}$$

$$|[H(p)]_{p=j\omega}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

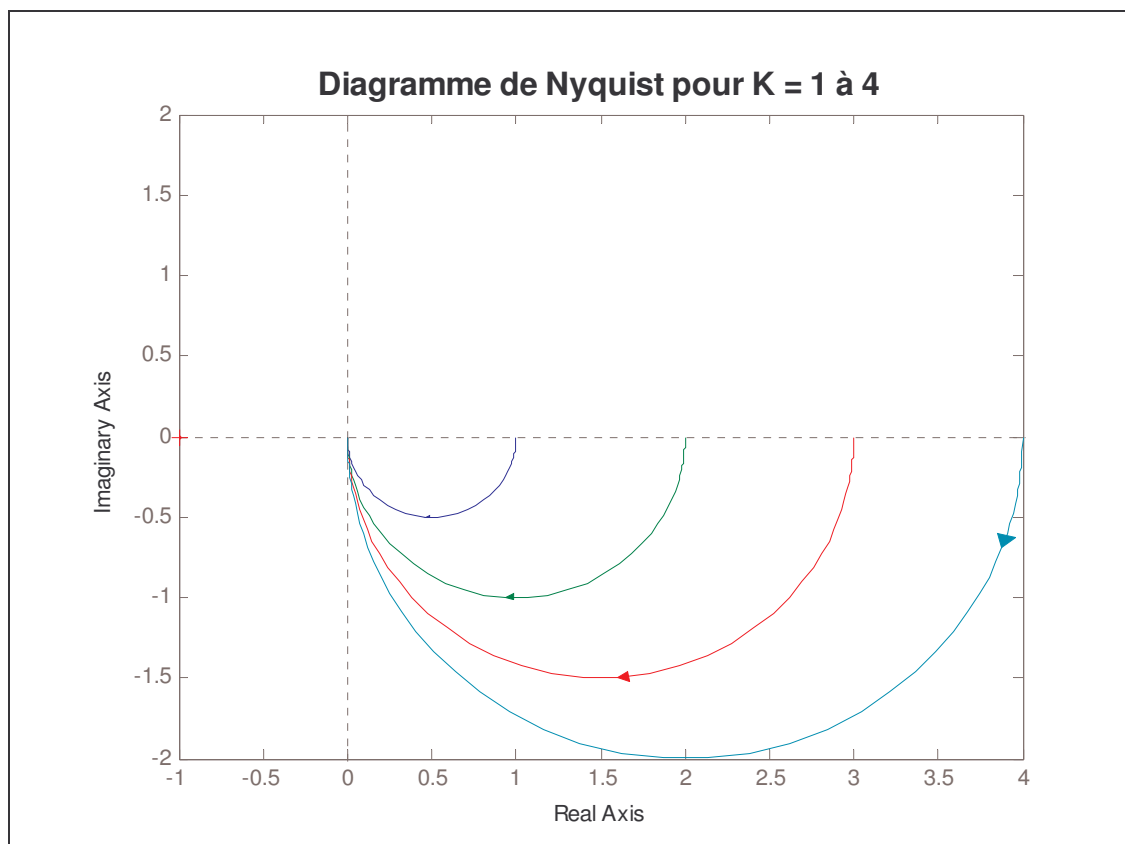
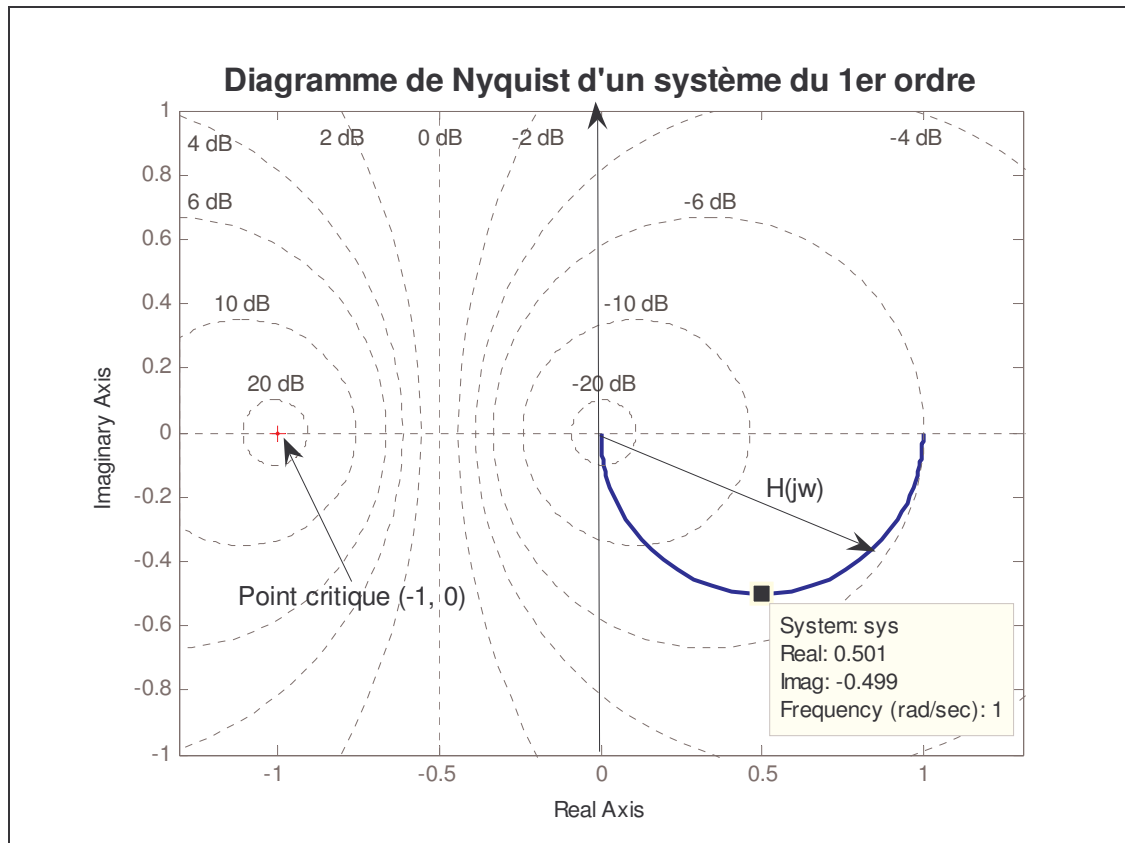
$$\arg\{[H(p)]_{p=j\omega}\} = -\arctg(\tau\omega)$$

8.3.2. LIEU DE NYQUIST

$$H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} e^{-j \arctg(\tau\omega)} = A e^{j\psi} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \phi = -\tau\omega \\ \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \\ H(j\omega) = \cos \phi e^{j\phi} \end{cases}$$



- Le lieu de NYQUIST est un demi-cercle de centre (0,5 ; 0) et de rayon 0,5. Il est paramétré en ω .
- Si $\omega = 0 \Rightarrow H(0) = 1$
- Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow$ le module tend vers zéro et l'argument vers -90° .
- Si $\omega = 1/\tau$ (pulsation dite de cassure) $\phi = -45^\circ$ et le module est égal à $\sqrt{2}/2$



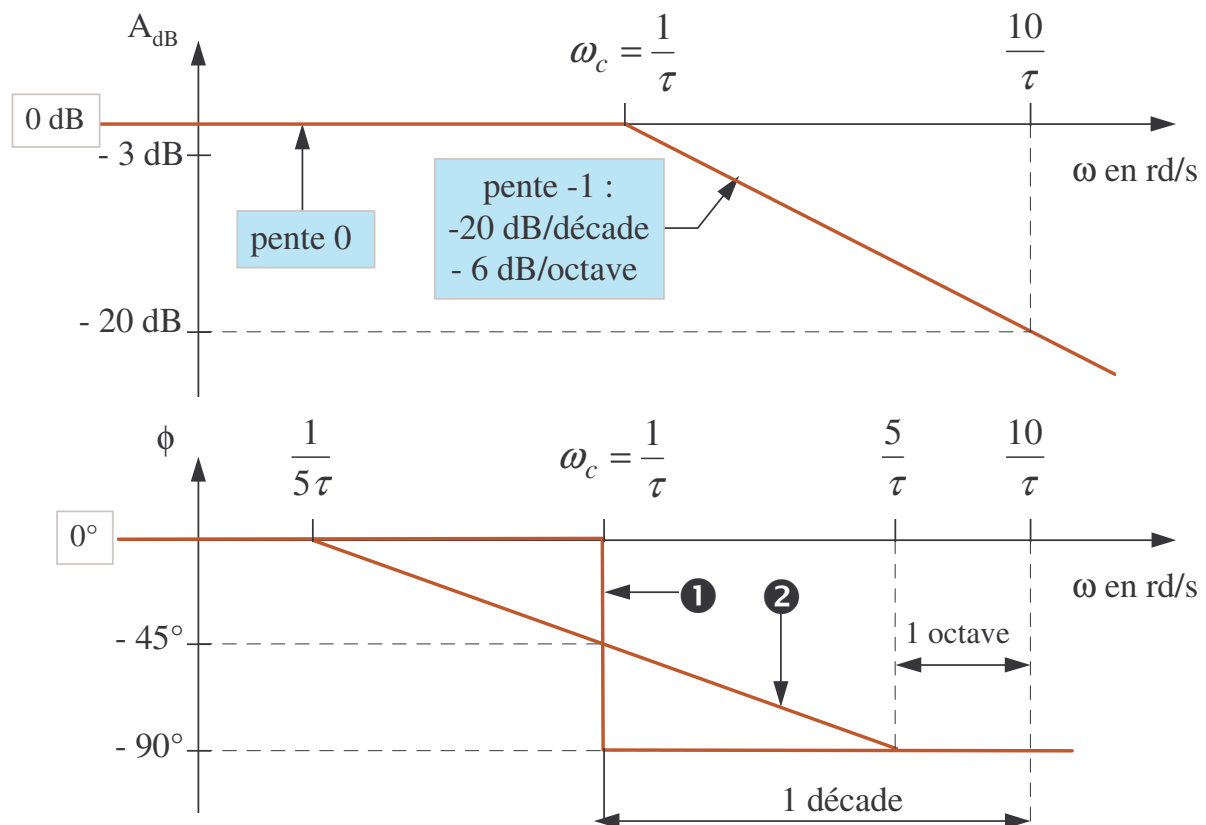
Si la transmittance a un gain statique égal à K on obtient le lieu par une homothétie de centre 0 et de rapport K .

8.3.3. DIAGRAMME DE BODE

On trace deux courbes en fonction de ω (rad/s) $\left\{ \begin{array}{l} A_{dB} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = -10 \lg(1 + \tau^2 \omega^2) \\ \phi(\text{en degré}) = -\arctg(\tau \omega) \end{array} \right.$

d. Déterminons les asymptotes aux courbes réelles.

Pour $\tau\omega \ll 1$	$\omega \ll (1/\tau)$	$A_{dB} \approx -10 \lg(1) = 0dB$ $\phi = 0^\circ$	asymptotes n° 1 de pente 0
Pour $\tau\omega = 1$	pulsation de cassure $\omega_c = 1/\tau$	$A_{dB} \approx -10 \lg(2) = -3dB$ $\phi = -45^\circ$	points remarquables
Pour $\tau\omega \gg 1$	$\omega \gg (1/\tau)$	$A_{dB} \approx -20 \lg(\tau\omega)$ $\phi = -90^\circ$	asymptotes n° 2 de pente -1



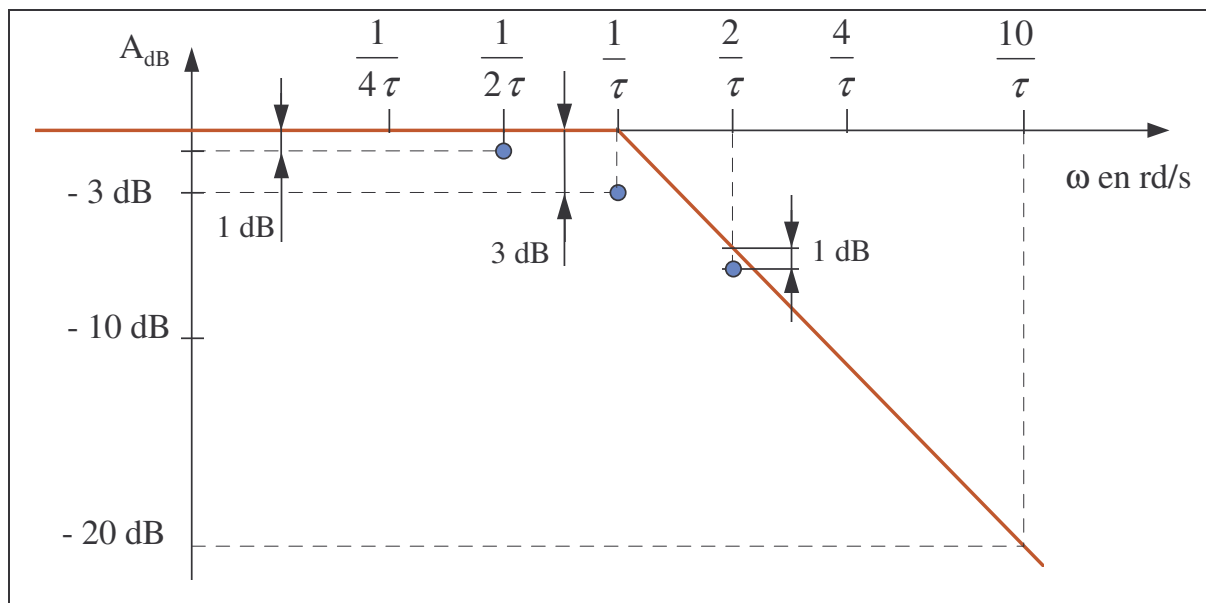
La pulsation $\omega_c = 1/\tau$ point d'intersection des asymptotes est appelée **pulsation de cassure** du système du premier ordre.

Pour la courbe de phase on peut définir les asymptotes ❶ et ❷.

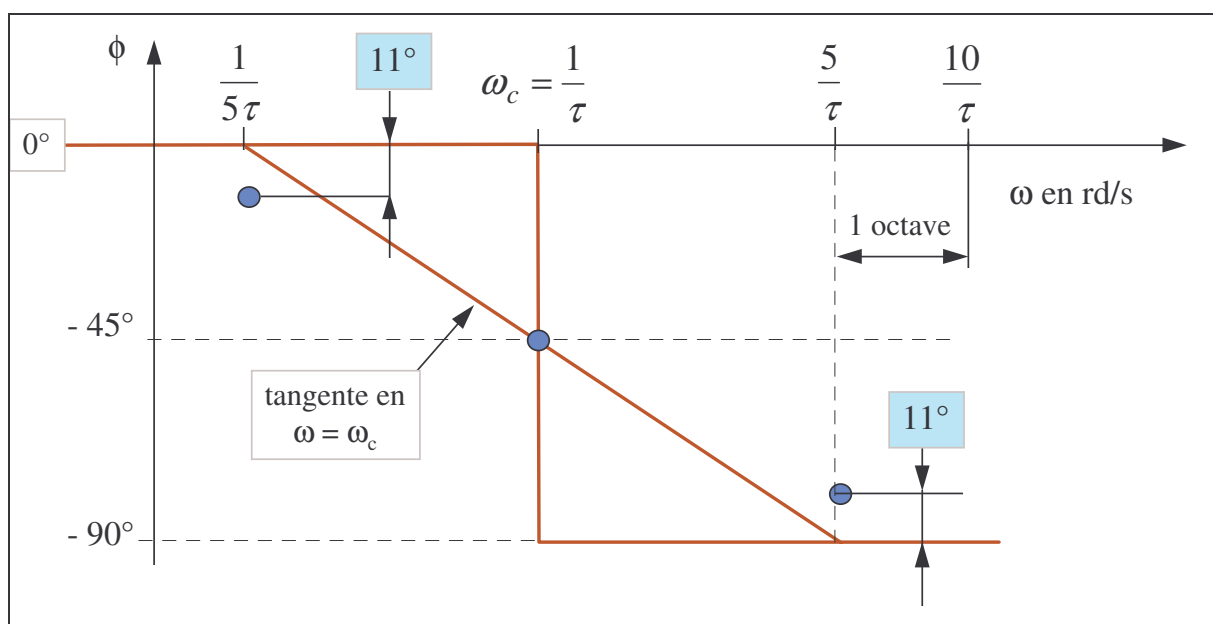
e. Position des courbes réelles par rapport aux asymptotes.

Pulsation	$1/8\tau$	$1/5\tau$	$1/4\tau$	$1/2\tau$	$1/\tau$	$2/\tau$	$4/\tau$	$5/\tau$	$8/\tau$
A_{dB}	—	—	—	1 dB	3 dB	1 dB	—	—	—
Phase ❶	7°	—	14°	$26,5^\circ$	0	$26,5^\circ$	14°	—	7°
Phase ❷	—	11°	—	—	0	—	—	11°	—

• Courbe d'amplitude.



• Courbe de phase

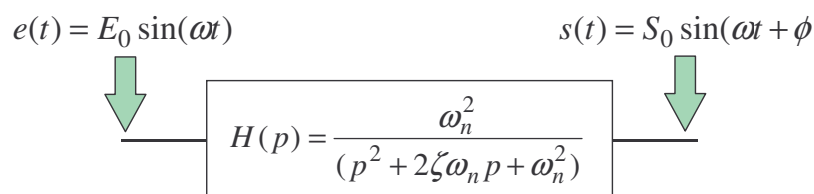
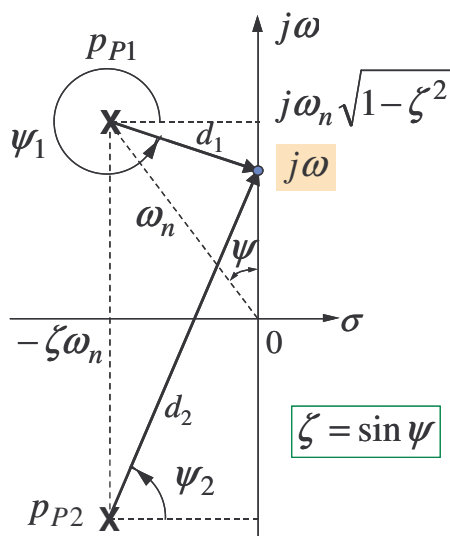


8.3.4. EN RESUME

$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	Gain statique	K
	Pulsation de cassure	$1/\tau$
	Bande passante à -3dB	$\omega_{c-3dB} = 1/\tau$
	Pulsation ω_{c0} (coupure de l'axe 0 dB)	$\sqrt{K^2 - 1}/\tau$
	Pente aux basses fréquences	0
	Pente aux hautes fréquences	-1 ou -20 dB/décade
	Phase aux basses fréquences	0
	Phase aux hautes fréquences	-90°

8.4. SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

La fonction de transfert isochrone du système du second ordre est la suivante :

8.4.1. CALCUL DE $H(j\omega)$ 

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{d_1 d_2} e^{-j(\psi_1 + \psi_2)}$$

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$d_1^2 = \omega_n^2 + \omega^2 - 2\omega\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$d_2^2 = \zeta^2\omega_n^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \omega)^2$$

$$d_1^2 = \omega_n^2 + \omega^2 + 2\omega\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$d_1^2 d_2^2 = [\omega_n^2 + \omega^2]^2 - 4\omega^2\omega_n^2(1-\zeta^2)$$

$$d_1^2 d_2^2 = \omega_n^4 \left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^2 + 4 \frac{\omega^2 \zeta^2}{\omega_n^2} \right\}$$

- Calculons le module de $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{d_1 d_2} = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] + 4 \frac{\omega^2 \zeta^2}{\omega_n^2} \right\}^{1/2}}$$

- Calculons l'argument de $H(j\omega)$

$$\phi = -(\psi_1 + \psi_2)$$

$$tg(\phi) = -tg(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{tg(\psi_1) + tg(\psi_2)}{1 - tg(\psi_1)tg(\psi_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} tg(\psi_1) = -\frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} - \omega}{\zeta \omega_n} \\ tg(\psi_2) = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} + \omega}{\zeta \omega_n} \end{cases}$$

$$tg(\phi) = -tg(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{\frac{2\omega}{\zeta \omega_n}}{1 + \frac{\omega_n^2 (1 - \zeta^2) - \omega^2}{\zeta^2 \omega_n^2}} = -\frac{2\zeta \omega \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} = -\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\phi = \arg[H(j\omega)] = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$$

Cherchons s'il existe une pulsation ω_R telle que :

$$|H(j\omega_R)| > |H(j\omega)| \quad \forall \omega.$$

Si cette condition est vérifiée on dit que ω_R est **la pulsation de résonance** du système.

$$\text{Soit } x = \omega^2 / \omega_n^2 \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + 4\zeta^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x(2\zeta^2 - 1) + 1}}$$

Le dénominateur est minimum pour $x = 1 - 2\zeta^2$. Ainsi

$$\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

On définit le facteur de résonance (ou coefficient de surtension) Q tel que :

$$\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Q = \frac{|H(j\omega_R)|}{H(0)} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

8.4.2. LIEU DE NYQUIST

Voir l'annexe A.8.1.

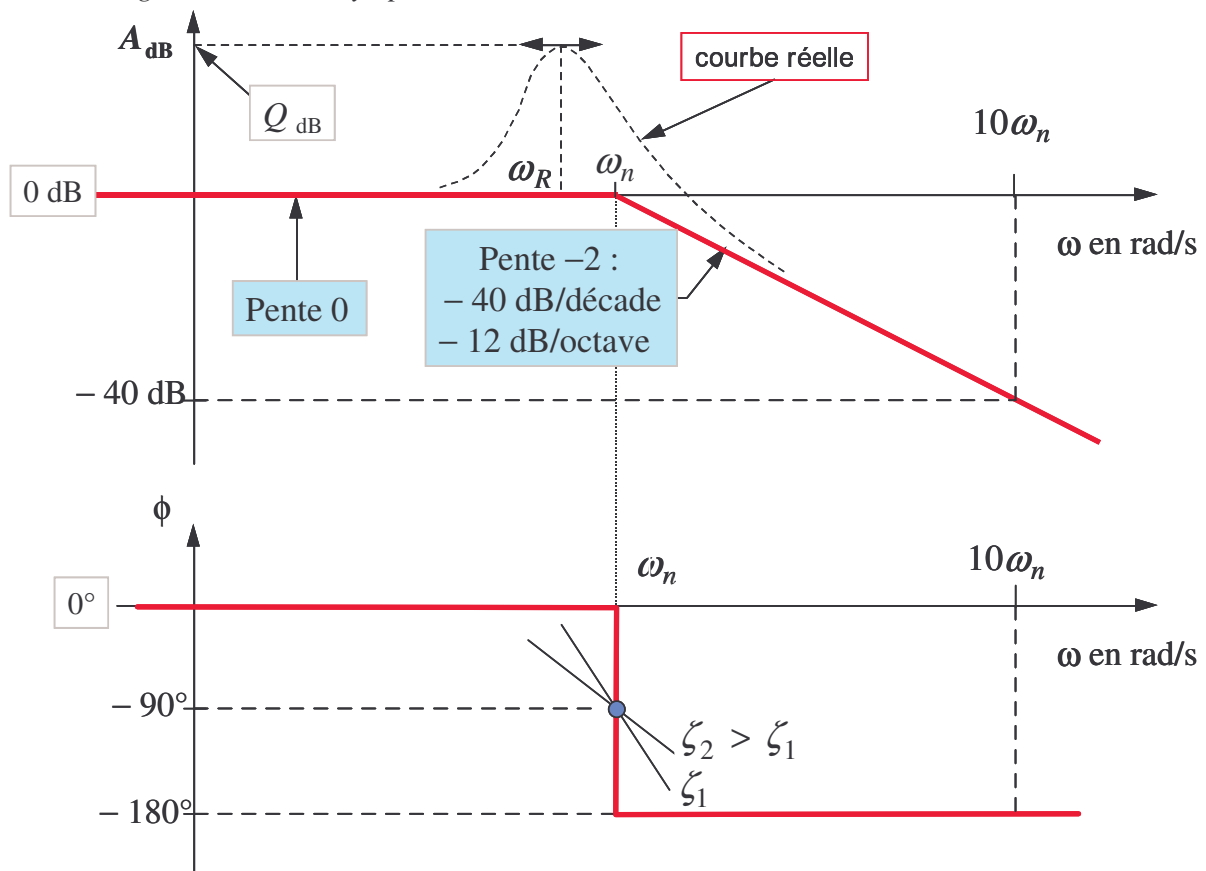
8.4.3. DIAGRAMME DE BODE

Le tracé de ce diagramme est évidemment fonction du coefficient d'amortissement ζ . On se reportera à l'annexe A.8.2. Cependant, pour une approche sommaire, on peut tracer les diagrammes asymptotiques et positionner les points caractéristiques de la courbe réelle.

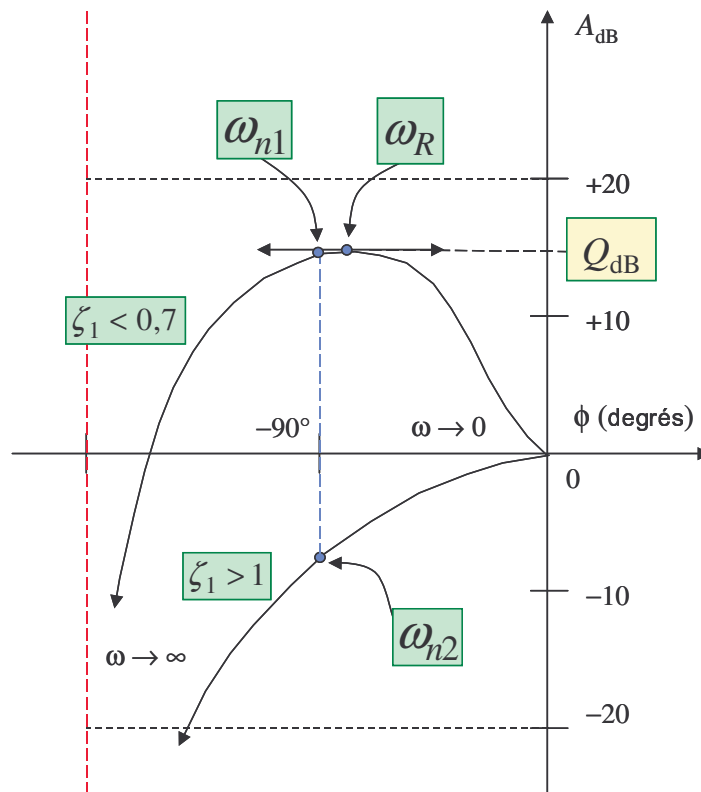
f. Déterminons les asymptotes aux courbes réelles.

Pour $\omega \ll \omega_n$	$H(p) \cong 1$	$A_{dB} \approx 20 \lg(1) = 0dB$ $\phi = 0^\circ$	asymptotes n° 1
Pour $\omega = \omega_n$		$A_{dB} \approx -20 \lg(2\zeta)$ $\phi = -90^\circ$	points remarquables
Pour $\omega \gg \omega_n$	$H(p) \cong \omega_n^2 / p^2$	$A_{dB} \approx -40 \lg(\omega_n / \omega)$ $\phi = -180^\circ$	asymptotes n° 2

g. Tracé des asymptotes



8.4.4. DIAGRAMME DE BLACK-NICHOLS



Pour un tracé précis on se reportera à l'annexe A.8.3.

8.4.5. EN RESUME

$\frac{K \omega_n^2}{P^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$	Gain statique		K
	Pulsation de cassure		ω_n
	Résonance	$\frac{1}{\sqrt{2}} < \zeta$	Pas de résonance
		$\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$Q = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$
	Pulsation de coupure à -3 dB ω_{c-3dB}		$\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$ $\omega_{c-3dB} = \omega_n$ si $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
	Pente aux basses fréquences		0
	Pente aux hautes fréquences		-2 ou -40 dB/décade
	Phase à $\omega = \omega_n$		-90°
	Phase aux basses fréquences		0°
	Phase aux hautes fréquences		-180°

8.5. SYSTEME PRESENTANT UN RETARD PUR

Nous avons indiqué au § 7.5. que la fonction de transfert d'un retard pur est donnée par :

$$H(p) = e^{-\tau p}$$

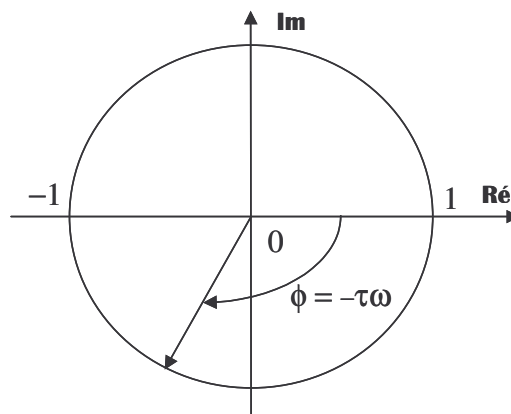
8.5.1. LIEU DE NYQUIST

Le module est constant, égal à l'unité.

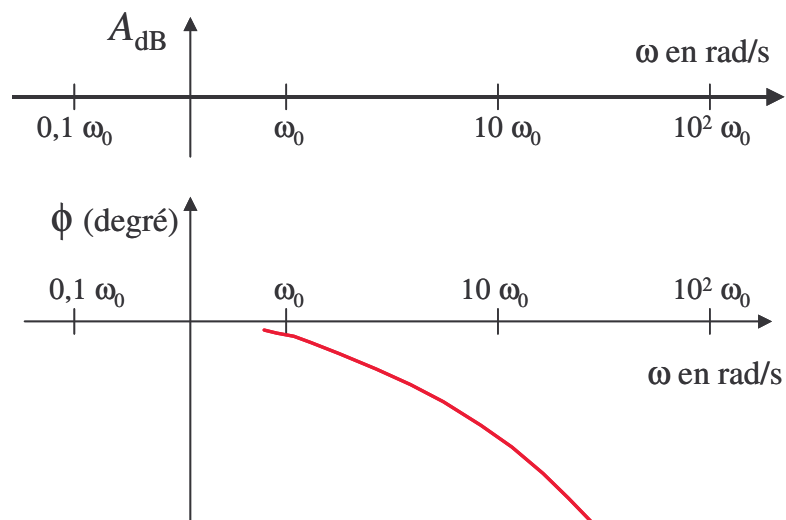
L'argument $\phi = -\tau\omega$ (en radian) varie avec la pulsation ω .

Cet argument doit être exprimé en degrés pour les tracés de Bode et de Black-Nichols. Dans ce cas :

$$\phi(^{\circ}) = -180 \frac{\tau\omega}{\pi}$$



8.5.2. DIAGRAMME DE BODE

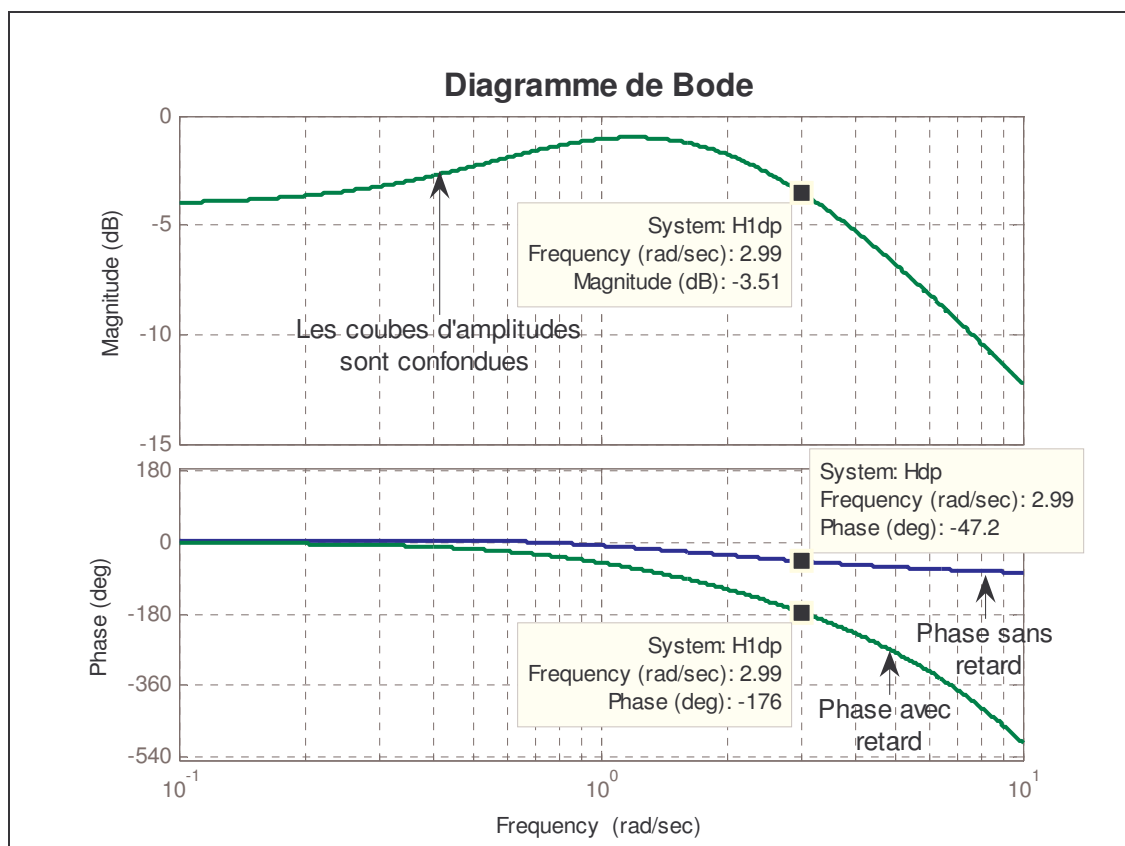
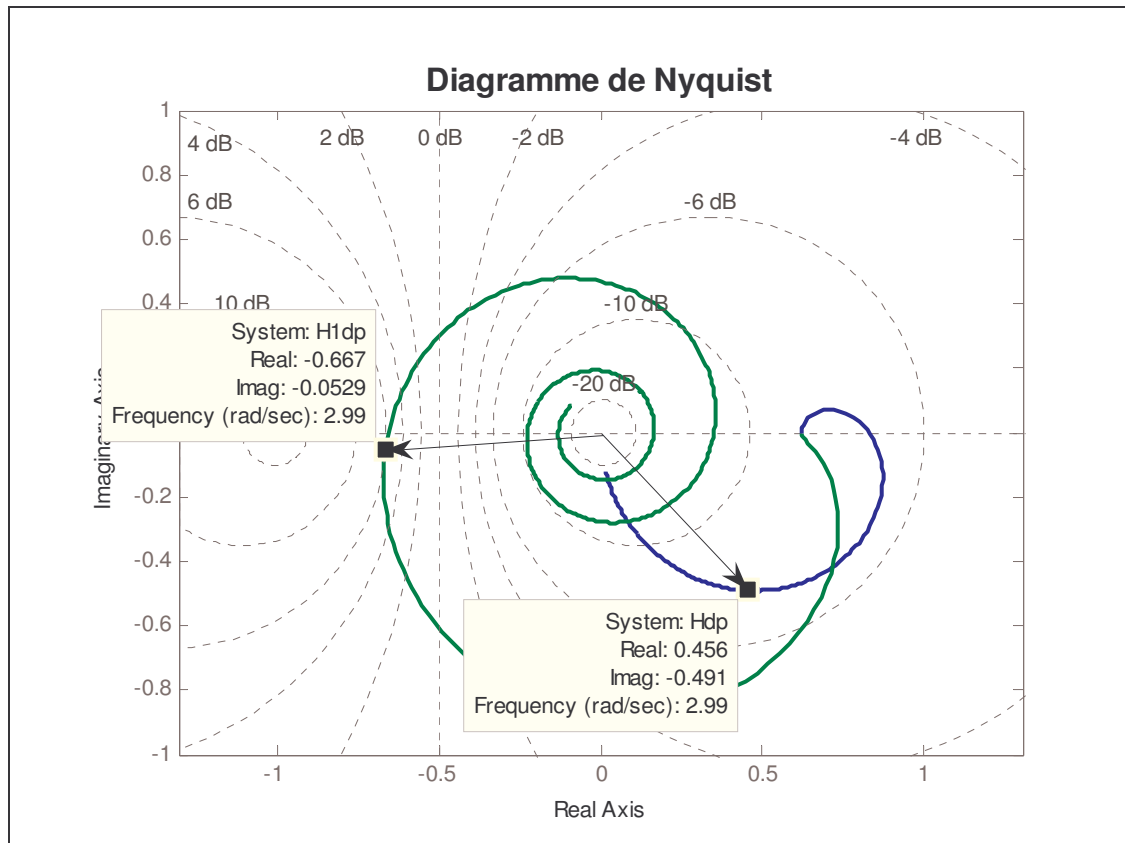


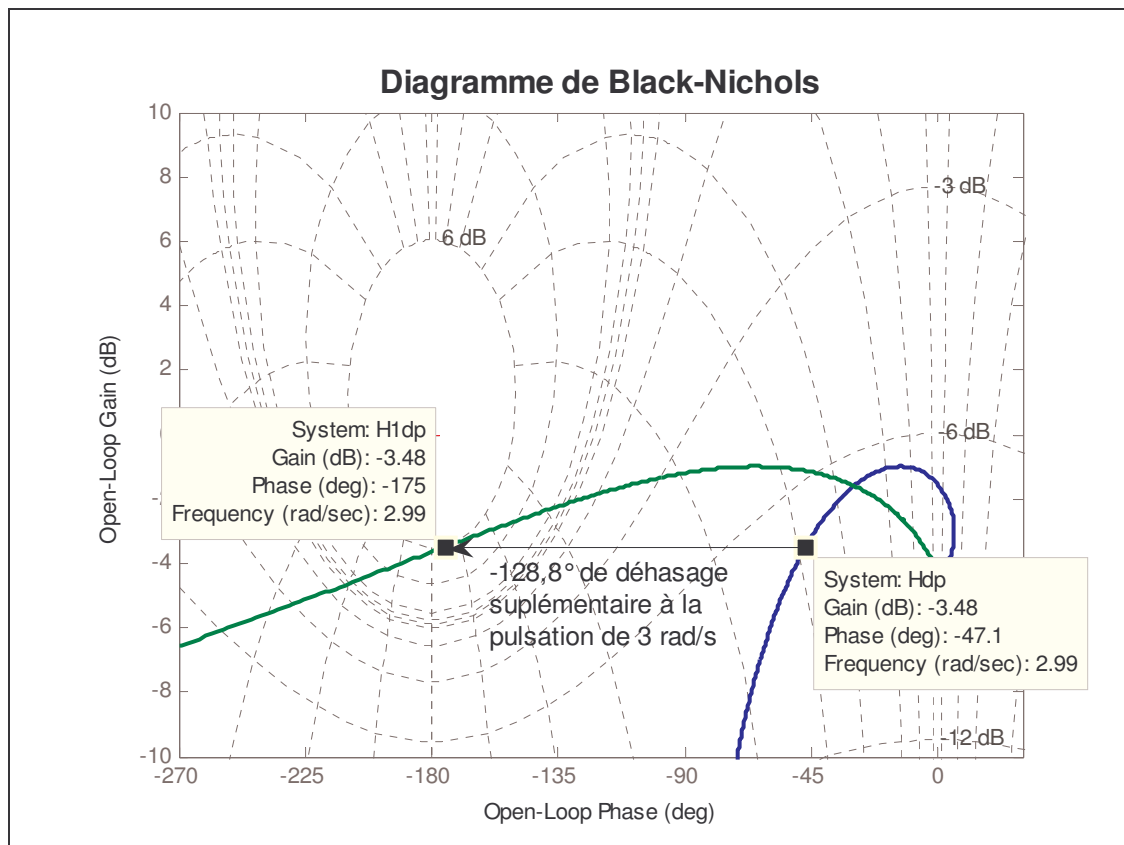
8.5.3. PRISE EN COMPTE DES RETARDS PURS AVEC MATLAB

A titre d'exemple traçons les diagrammes fréquentiels des transmittances suivantes :

$$H(p) = \frac{2,5(p+0,5)}{(p+1)(p+2)} \quad \text{et} \quad H1(p) = \frac{2,5(p+0,5)}{(p+1)(p+2)} e^{-0,75p}$$

<pre>% % Script Chap8_3.m % ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYS. LIN. % PRISE EN COMPTE DES RETARDS PURS % Cours Au 41 de J.-L. Cougnon % Version du 17 juin 2005 %% clear all;clc; % % On décrit les transmittances concernées disp('H(p) = ') Hdp=zpk(-0.5, [-1, -2], 2.5) disp('H1(p) = ') H1dp=zpk(-0.5, [-1, -2], 2.5, 'iodelaymatrix', 0.75) % % Vérifions les données de H1(p) disp('Nombre d\'entres et de sorties de H1(p) = ') size(H1dp) disp(' ') disp('Ordre su système de H1(p) = ') ndims(H1dp) disp('Pôles de H1(p) = ') pole(H1dp) disp('Zéros de H1(p) = ') zero(H1dp) disp('Gain statique de H1(p) = ') dcgain(H1dp) disp('Retard pur de H1(p) = ') hasdelay(H1dp)</pre>	<pre>H(p) = Zero/pole/gain : 2.5 (s+0.5) ----- (s+1) (s+2) H1(p) = Zero/pole/gain : 2.5 (s+0.5) exp(-0.75*s) * ----- (s+1) (s+2) Nombre d'entres et de sorties de H1(p)= Zero-pole-gain models with 1 output and 1 input. Ordre su système de H1(p) = ans = 2 Pôles de H1(p) = ans = -1 -2 Zéros de H1(p) = ans = -0.5000 Gain statique de H1(p) = ans = 0.6250 Retard pur de H1(p) = ans = 1</pre>
<pre>% % Traçons le lieu de Nyquist w=linspace(0,20,500) ; figure(1) ;nyquist(Hdp,H1dp,w) ;grid axis equal title('Diagramme de Nyquist') % Traçons le lieu de Bode w=logspace(-1,1,500) ; figure(2) ;bode(Hdp,H1dp,w) ;grid title('Diagramme de Bode') % Traçons le lieu de Black-Nichols w=logspace(-1,1,500) ; figure(3) ;nichols(Hdp,H1dp,w) ;grid axis([-270,30,-10,+10]) title('Diagramme de Black-Nichols') %</pre>	





Sur les trois diagrammes fréquentiels tracés ci-dessus, on observe que pour une même pulsation l'amplitude de $H(j\omega)$ est égale à celle de $H1(j\omega)$ mais que la phase de $H1(j\omega)$ est augmentée de $-0,75\omega$ radian soit $-180 \frac{0,75\omega}{\pi}$ degré.

Ainsi à la pulsation de $\omega = 3 \text{ rad/s}$, le déphasage de $H1(3j)$ est supérieur de $-128,8$ degré à celui de $H(3j)$ alors que les amplitudes sont identiques ($-3,5 \text{ dB}$)

8.6. SYSTEME A DEPHASAGE MINIMAL

8.6.1. DEFINITION

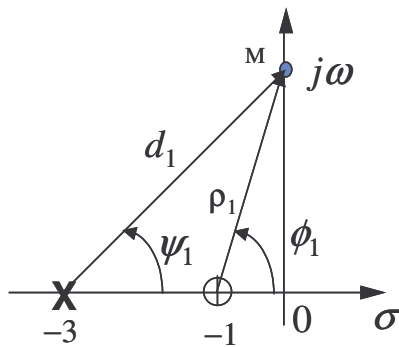
Un système dont la transmittance isomorphe comporte au moins un zéro à partie réelle positive n'est pas à déphasage minimal. Nous nous proposons de justifier l'appellation de « système à déphasage minimal » à partir de conditions relevant de l'analyse harmonique.

Connaissant la courbe d'amplitude $A(\omega)$ d'une fonction de transfert $H(p)$, il existe plusieurs réalisations physiques de $H(p)$. Parmi celles ci il en existe une qui présente le déphasage plus faible. Cette réalisation est dite à déphasage minimal.

Soit par exemple $A(\omega) = \frac{1+\omega^2}{9+\omega^2}$ si l'on remplace ω par p/j on obtient :

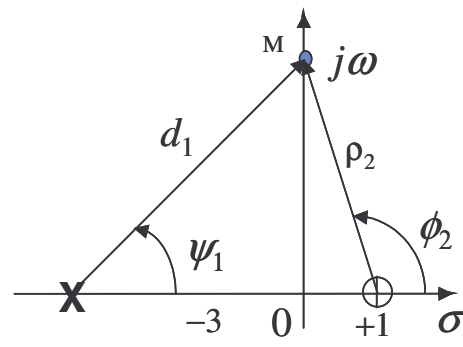
$$A(\omega) = |H(j\omega)|^2 = H(p) \cdot H(-p) = \frac{1-p^2}{9-p^2} = \frac{(p-1)(1+p)}{(p-3)(3+p)}$$

Comment choisir $H(p)$? Bien sûr nous éliminons le pôle instable $p = 3$. Par contre comment choisir le zéro ? Deux solutions sont envisageables.



$$H_1(p) = \frac{p+1}{p+3}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{\rho_1}{d_1} \cdot e^{-j(-\phi_1 + \psi_1)}$$



$$H_2(p) = -\frac{p-1}{p+3}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{\rho_1}{d_1} \cdot e^{j(\pi + \phi_2 - \psi_1)} ; \phi_2 = \pi - \phi_1$$

$$H_2(j\omega) = \frac{\rho_1}{d_1} \cdot e^{-j(\phi_1 + \psi_1)}$$

La fonction de transfert $H_1(p)$ est la réalisation à déphasage minimal recherchée.

8.6.2. EXEMPLE TRAITE AVEC MATLAB

A titre d'exemple nous traiterons les transmittances :

$$H(p) = \frac{2,5(p+0,5)}{(p+1)(p+2)} \quad \text{et} \quad H1(p) = \frac{-2,5(p-0,5)}{(p+1)(p+2)}$$

```
%
% Script Chap8_4.m
% ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYS. LIN.
% DEPHASAGE NON MINIMAL
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 18 juin 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
%
% On décrit les transmittances concernées
disp('H(p) = ')
Hdp=zpk(-0.5, [-1,-2], 2.5)
disp('H1(p) = ')
H1dp=zpk(0.5, [-1,-2], -2.5)
disp('Gain statique de H(p) =')
dcgain(Hdp)
disp('Gain statique de H1(p) =')
dcgain(H1dp)
%
% ANALYSE FREQUENTIELLE
% Traçons le lieu de Nyquist
w=linspace(0,25,500);
figure(1);nyquist(Hdp,H1dp,w);grid
axis equal
title('Diagramme de Nyquist')
```

```
H(p) =
Zero/pole/gain:
2.5 (s+0.5)
-----
(s+1) (s+2)

H1(p) =
Zero/pole/gain:
-2.5 (s-0.5)
-----
(s+1) (s+2)

Gain statique de H(p) =
ans =
    0.6250

Gain statique de H1(p) =
ans =
    0.6250
```

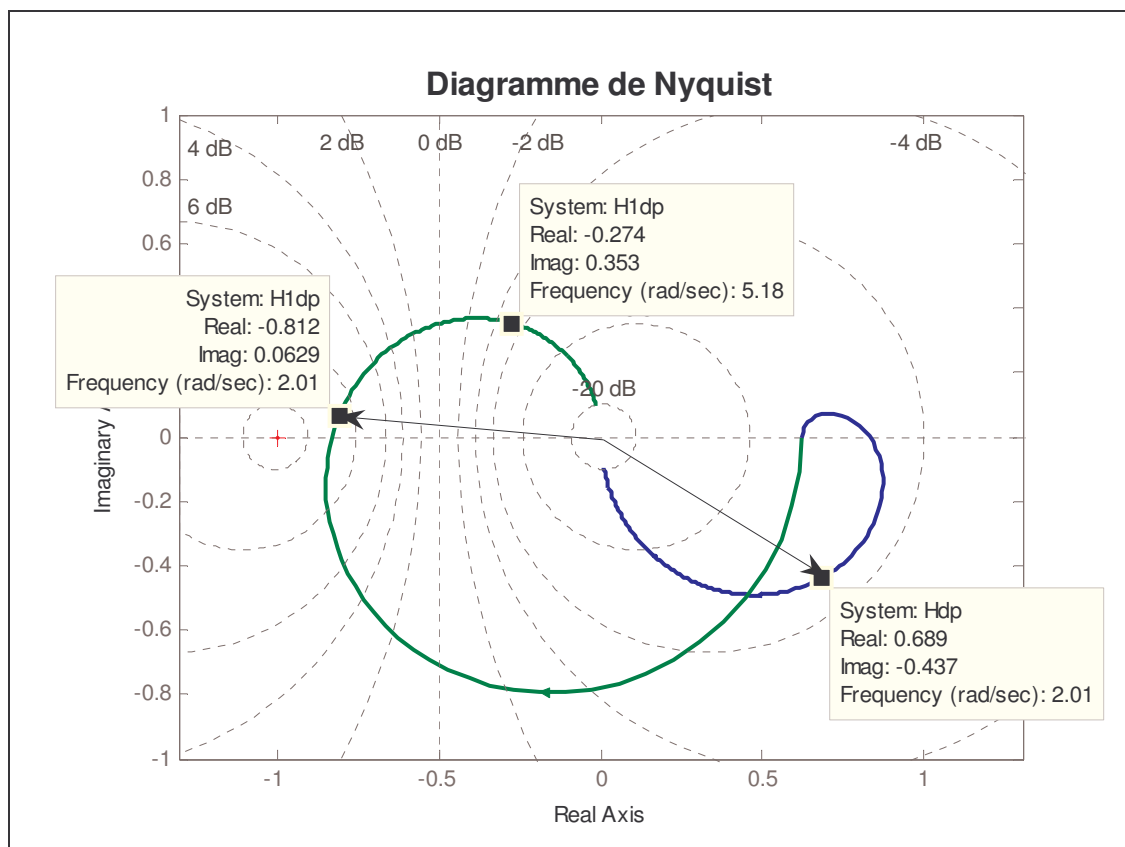
```

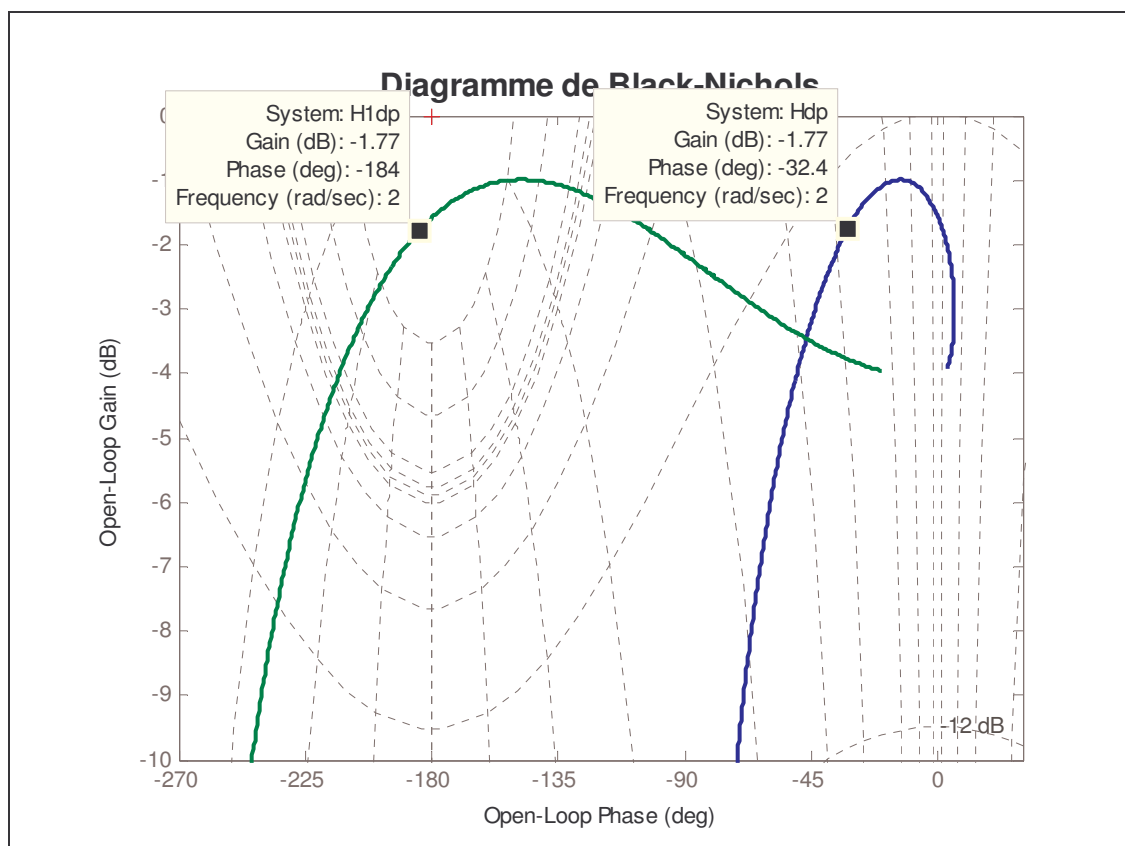
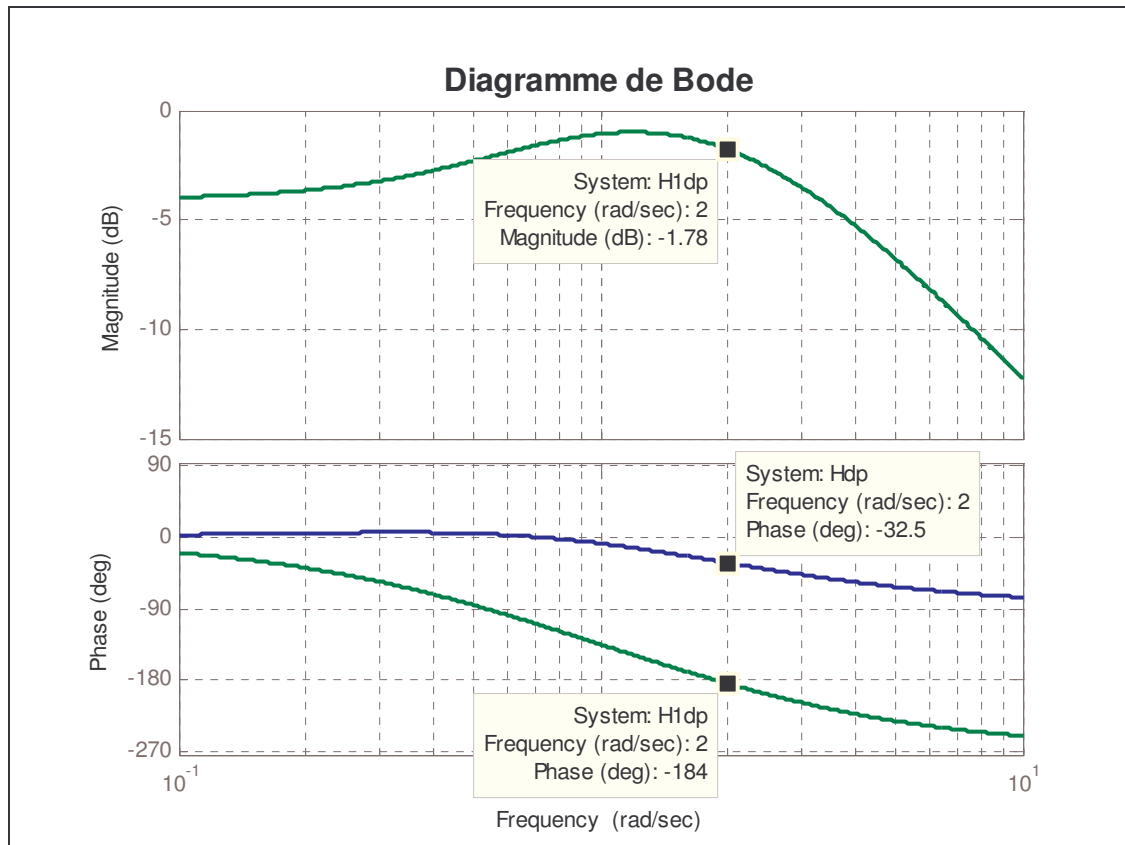
% Traçons le lieu de Bode
w=logspace(-1,1,500);
figure(2);bode(Hdp,H1dp,w);grid
title('Diagramme de Bode')
% Traçons le lieu de Black-Nichols
w=logspace(-1,1,500);
figure(3);nichols(Hdp,H1dp,w);grid
axis([-270,30,-10,0])
title('Diagramme de Black-Nichols')
%
% ANALYSE TEMPORELLE
figure(4);step(Hdp,H1dp,8);grid
title('Réponses indicielle de H(p) et de H1(p)')
%

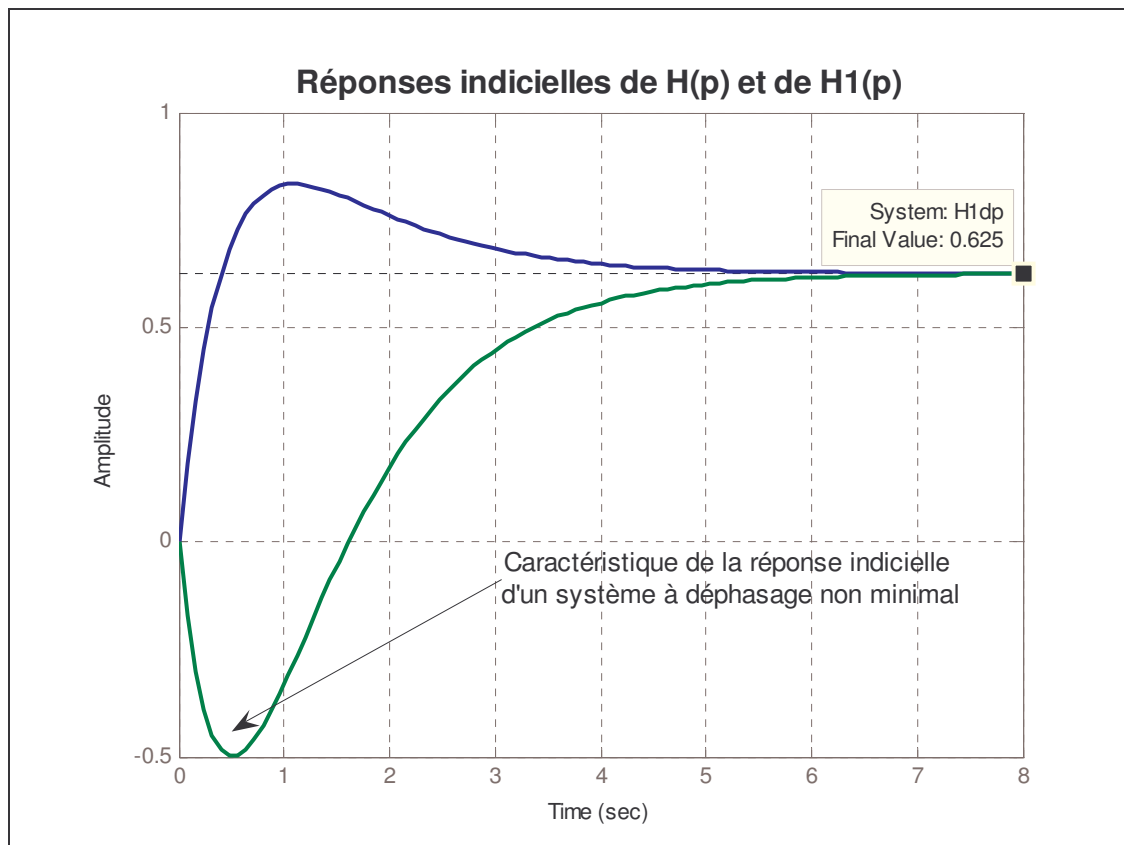
```

On remarque que le gain statique des deux fonctions de transfert est identique.

Sur les trois diagrammes fréquentiels tracés ci-dessous, on observe que pour une même pulsation l'amplitude de $H(j\omega)$ est égale à celle de $H1(j\omega)$ mais que les phases sont différentes.







8.7. TRANSMITTANCE DES SYSTEMES COMPLEXES

8.7.1. PRINCIPES

Comme indiqué au § 3.5, la fonction de transfert isomorphe d'un système linéaire quelconque peut être écrite sous la forme de BODE:

$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p) \dots \left(\frac{p^2}{\omega_n'^2} + \frac{2\zeta'}{\omega_n'} p + 1 \right) \dots}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \dots \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + 1 \right) \dots}$	<p>K = gain statique α = nombre d'intégration = type T_x et τ_x = constante de temps ω_n = pulsation propre non amortie ζ = coefficient d'amortissement</p>
--	--

La fonction de transfert isochrone correspondant est un nombre complexe égal à :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega) \dots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n'^2} + j \frac{2\zeta'\omega}{\omega_n'} \right) \dots}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega) \dots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right) \dots} = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Ce nombre complexe peut être représenté dans les plans de NYQUIST, BODE et BLACK-NICHOLS selon les principes évoqués au § 8.2.4. La représentation dans le plan de NYQUIST est peu utilisée car la multiplication de deux transmittances s'obtient difficilement sans moyen de calcul automatique. Malgré tout nous y aurons souvent recours, notamment à des fins pédagogiques, en particulier pour l'étude de la stabilité des systèmes bouclés.

La représentation dans les plans de BODE et de BLACK-NICHOLS est facilitée par le fait que le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de chacun des facteurs. Ainsi :

$$A_{dB} = -20\alpha \lg(\omega / \sqrt[\alpha]{K}) + \sum_i 20 \lg \sqrt{(1 + T_i^2 \omega^2)} + \sum_{i'} 20 \lg \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni'}^2}\right)^2 + \frac{4\zeta_{i'}^2 \omega^2}{\omega_{ni'}^2} \right]} \\ - \sum_j 20 \lg \sqrt{(1 + \tau_j^2 \omega^2)} - \sum_{j'} 20 \lg \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nj'}^2}\right)^2 + \frac{4\zeta_{j'}^2 \omega^2}{\omega_{nj'}^2} \right]}$$

L'écriture $-20\alpha \lg(\omega / \sqrt[\alpha]{K})$ indique que, dans le plan de BODE, nous sommes en présence d'une droite de pente $(-\alpha)$ qui coupe l'axe 0 dB à une pulsation égale à la racine d'ordre α du gain statique K . De même :

$$\phi = -\alpha \cdot 90^\circ + \sum_i \arg(1 + jT_i \omega) + \sum_{i'} \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni'}^2} + j \frac{2\zeta_{i'} \omega}{\omega_{ni'}}\right) \\ - \sum_j \arg(1 + j\tau_j \omega) - \sum_{j'} \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nj'}^2} + j \frac{2\zeta_{j'} \omega}{\omega_{nj'}}\right)$$

On retiendra que la multiplication de transmittances s'obtient dans les plans de BODE et de BLACK-NICHOLS en faisant :

- la somme des modules exprimés en dB,
- la somme des arguments exprimés en degrés.

La pulsation pour laquelle $A_{dB} = 0dB$ est appelée **pulsation de coupure**. Elle est notée ω_{co}

Les caractéristiques des systèmes du premier et du second ordre ayant été étudiées dans le détail aux paragraphes 8.3. et 8.4. ces opérations s'exécutent sans difficulté.

Rappelons cependant que :

- ☞ Connaissant les diagrammes de BODE et de BLACK-NICHOLS d'un système du premier ordre standard on obtient directement le tracé des transmittances suivantes.

$\frac{K}{1 + \tau p}$	Translation verticale de la courbe de gain de K en dB. Même courbe de phase.
$\frac{1}{(1 + \tau p)^n}$	Courbe asymptotique des amplitudes de pente $(-n)$ i.e. $20n$ dB/décade) Multiplication des ordonnées des courbes de gain et de phase par n .
$(1 + \tau p)$	Module et phase changés de signe : – avance de phase de 0 à 90° , – asymptote d'amplitude de pente $+1$.

- ☛ Connaissant les diagrammes de BODE et de BLACK-NICHOLS d'un système du second ordre standard on obtient directement le tracé des transmittances suivantes.

$\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + 1}$	Translation verticale de la courbe de gain de K en dB. Même courbe de phase.
$\frac{1}{\left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + 1\right)^n}$	Courbe asymptotique des amplitudes de pente $(-2n \text{ i.e. } -12n \text{ dB/octave ou encore } -40n \text{ dB/décade})$. Multiplication des ordonnées des courbes de gain et de phase par n .
$\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + 1$	Module et phase changés de signe : – avance de phase de 0 à 180° , – asymptote à la courbe d'amplitude pour $\omega > \omega_n$ de pente $+2$.

8.7.2. MISE EN PLACE DU LIEU DE TRANSFERT

La mise en place du lieu de transfert, qu'il s'agisse de BODE, NYQUIST ou BLACK-NICHOLS aux pulsations (fréquences) élevées, ou basses, est souvent fort utile pour réaliser un tracé correct de ces lieux et pour une bonne compréhension des phénomènes.

h. Comportement de $H(j\omega)$ aux fréquences élevées ($\omega \rightarrow \infty$)

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)}{(b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \dots + b_1 p + b_0)} \quad \text{avec } d > n.$$

$$\text{Si } p \rightarrow \infty \Rightarrow H(p) \approx \frac{a_n}{b_d} \frac{1}{p^{d-n}} \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{k}{\omega^{d-n}} e^{-j(d-n).90^\circ} = A e^{j\phi}$$

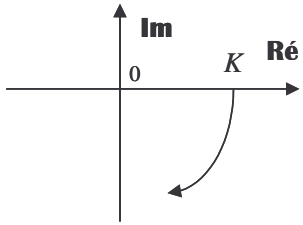
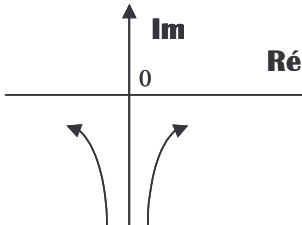
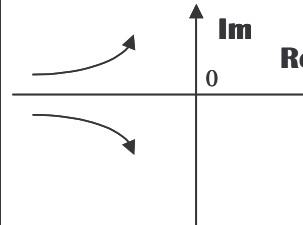
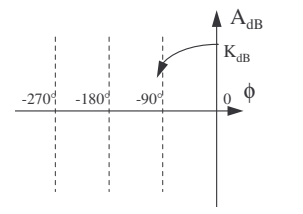
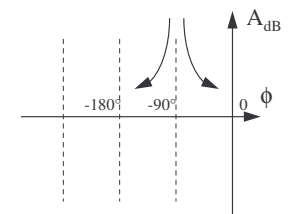
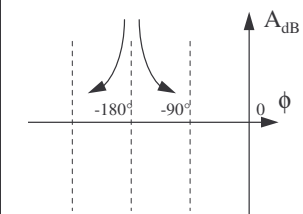
$$\begin{cases} \omega \rightarrow \infty \\ d > n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow 0 \Rightarrow A_{dB} \rightarrow -\infty \\ \phi \rightarrow -(d-n).90^\circ \end{cases}$$

	$d - n = 0$	$d - n = 1$	$d - n = 2$	$d - n = 3$
Allure du lieu de NYQUIST				
Allure du lieu de BLACK-NICHOLS				

i. Comportement de $H(j\omega)$ aux fréquences basses ($\omega \rightarrow 0$ i.e. $p \rightarrow 0$)

C'est le nombre d'intégrations (i.e. le type du système) qui détermine la position des lieux aux basses fréquences. En effet :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{(1+jT_1\omega)\dots}{(1+j\tau_1\omega)\dots} \quad \text{si } p \rightarrow 0 \Rightarrow H(p) \approx \frac{K}{p^\alpha} \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{K}{\omega^\alpha} \cdot e^{-j\alpha \cdot 90^\circ} = Ae^{j\phi}$$

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Allure du lieu de NYQUIST			
Allure du lieu de BLACK-NICHOLS			

8.7.3. TRACE DES LIEUX DE TRANSFERT

Soit la fonction de transfert $H(p) = \frac{6(1+10p)}{p(1+p)(1+100p)}$

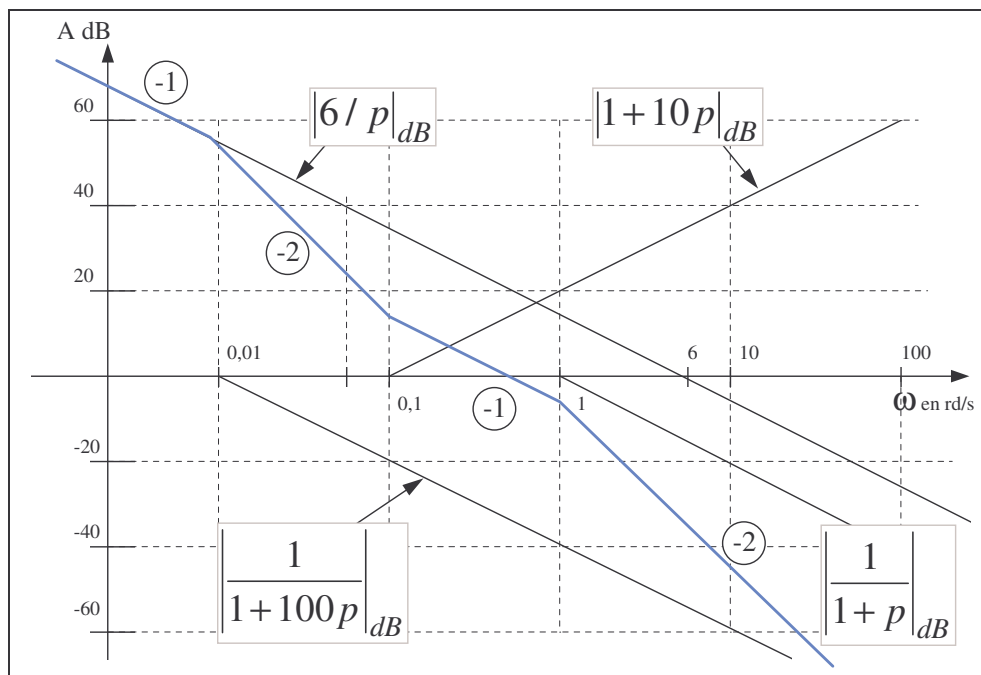
Par définition $H(j\omega) = Ae^{j\phi}$. Lorsque $\omega \rightarrow 0$ $\begin{cases} A \rightarrow +\infty \\ \phi \rightarrow -90^\circ \end{cases}$

$d - n = 2$ aussi lorsque $\omega \rightarrow \infty$ $\begin{cases} A \rightarrow 0 \\ \phi \rightarrow -180^\circ \end{cases}$

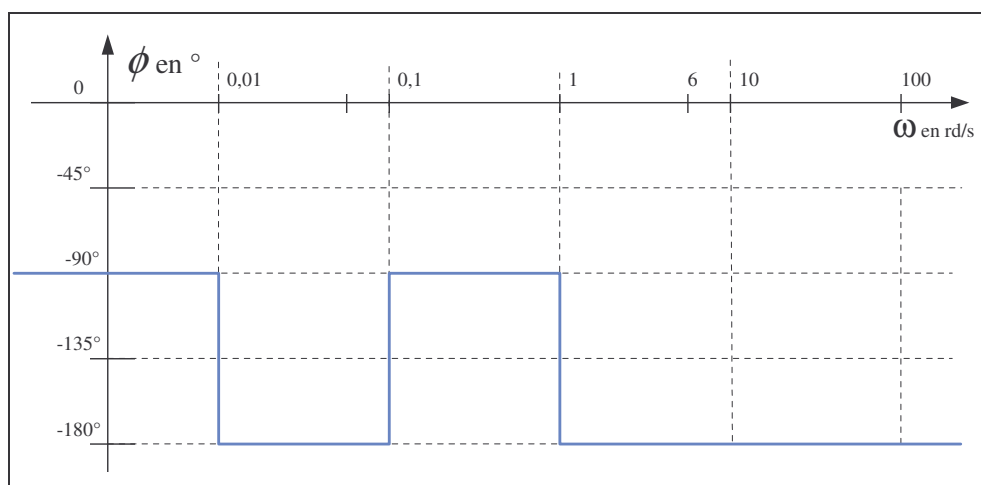
Le tracé précis du lieu de NYQUIST est réalisé au § 8.8 avec MATLAB.

Construisons le tracé asymptotique du diagramme de BODE.

- Courbe de gain asymptotique



- Courbe de phase asymptotique



Les courbes réelles se positionnent par rapport aux asymptotes en tenant compte des critères donnés au § 8.7.2.

8.8. UTILISATION DE MATLAB

8.8.1. COMMANDES MATLAB POUR OBTENIR DES VALEURS

On considère la transmittance $H(p) = \frac{6(1+10p)}{p(1+p)(1+100p)}$

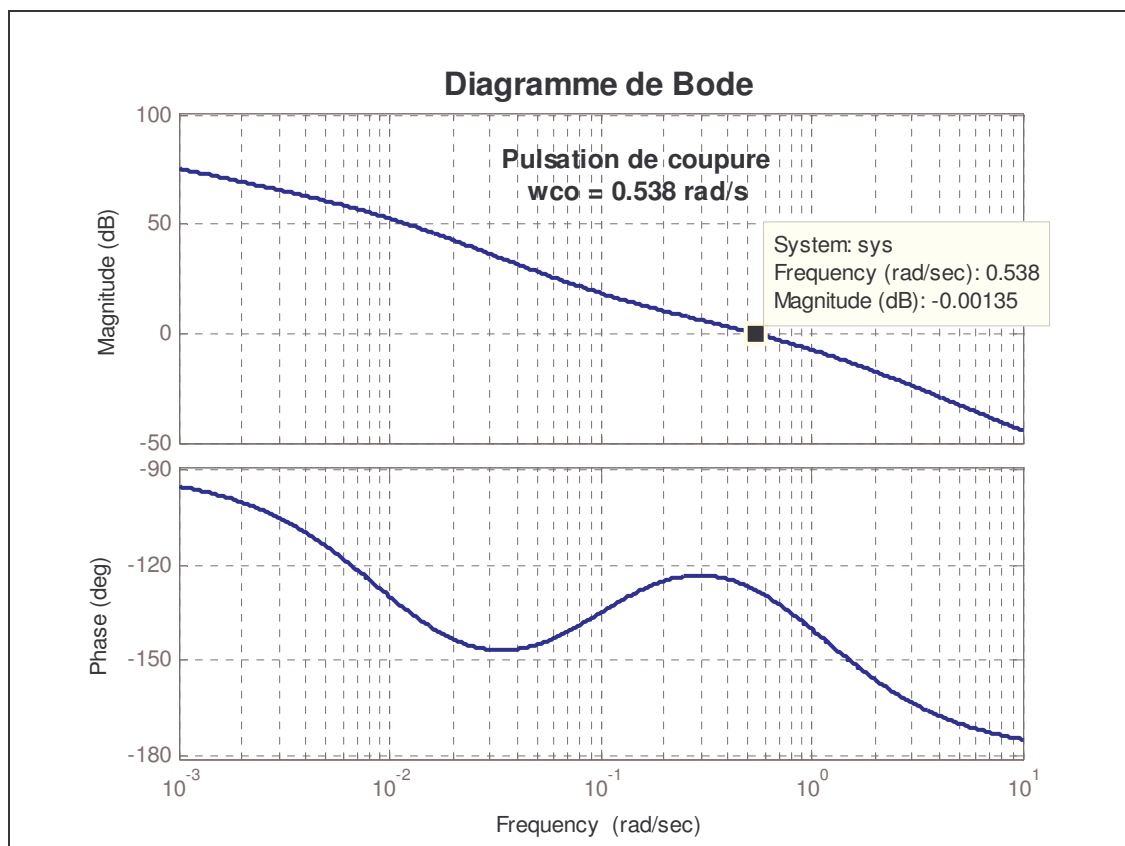
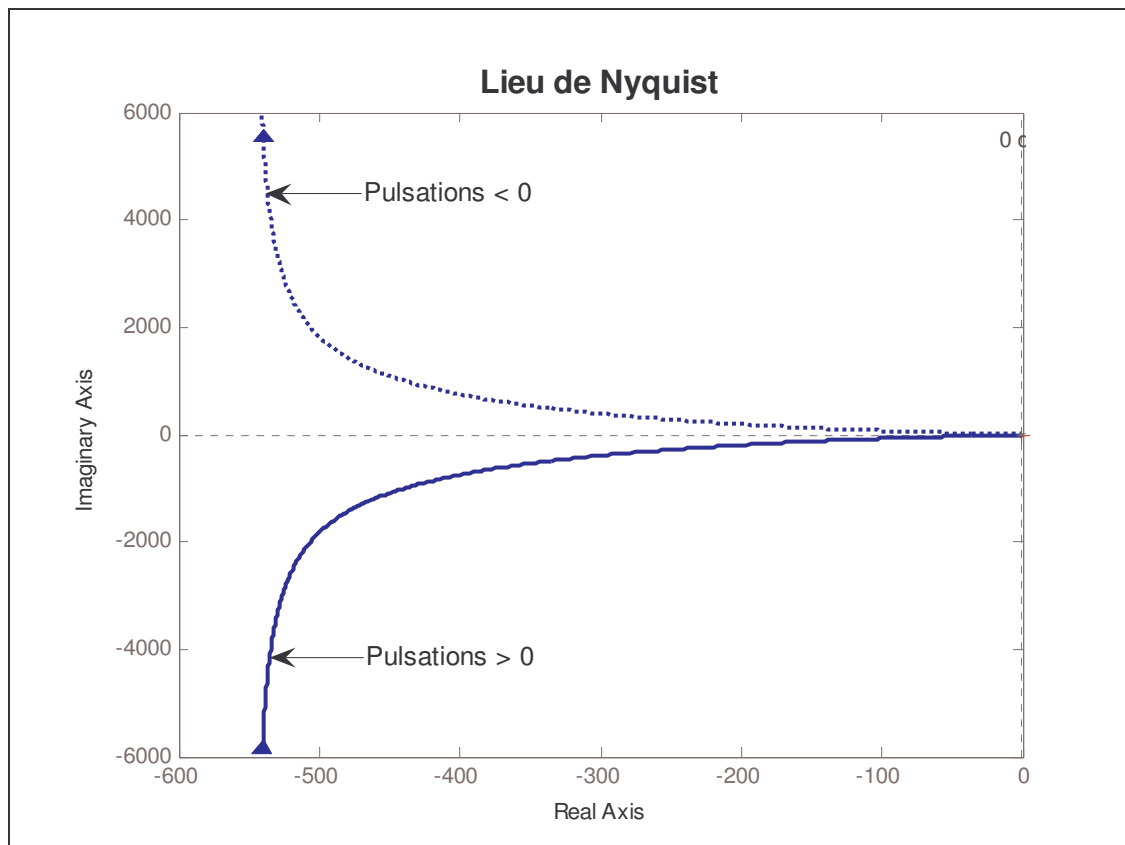
```
%
% Script Chap8_2.m
% ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYS. LIN.
% TRACE DES LIEUX DE TRANSFERT
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 7 juin 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
%
%
% On décrit les polynômes numérateur et dénominateur
num=[60, 6];
den=[100, 101, 1, 0];
% 20 points de calcul entre 10E-3 rad/s et 10 rad/s
w=logspace(-3,1,20);
% Calcul du module (a) et de la phase (phi)
[a,phi,w]=nichols(num,den,w);
% Sortie des 3 vecteurs et mise en forme dans word
w,AdB=20*log10(a),phi
```

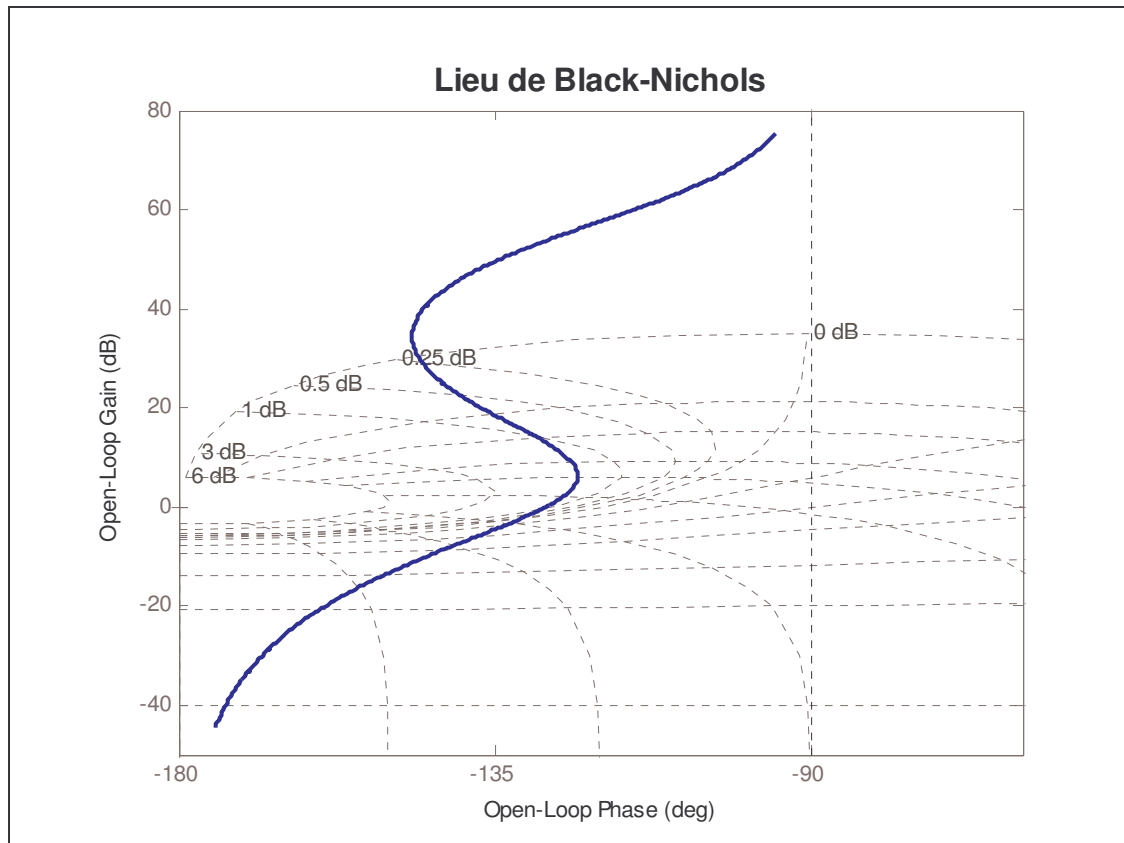
Tableau de valeurs mis en forme.

w en rad/seconde	Module A en dB	Argument phi en degré	w en rad/seconde	Module A en dB	Argument phi en degré
0.0010	75.5202	-95.1950	0.1274	15.4452	-130.8982
0.0016	71.2406	-98.3858	0.2069	9.9667	-124.7176
0.0026	66.8531	-103.4115	0.3360	4.9370	-123.4414
0.0043	62.2084	-110.9712	0.5456	-0.1633	-127.9519
0.0070	57.0294	-121.2283	0.8859	-5.8457	-137.3304
0.0113	50.9964	-132.6696	1.4384	-12.4443	-148.7717
0.0183	44.0472	-142.0481	2.3357	-19.8969	-159.0288
0.0298	36.5159	-146.5586	3.7927	-27.8838	-166.5885
0.0483	28.9141	-145.2824	6.1585	-36.1278	-171.6142
0.0785	21.7609	-139.1018	10.0000	-44.4798	-174.8050

8.8.2. COMMANDES MATLAB POUR OBTENIR DES TRACES

```
%
% Lieu de Nyquist
w1=logspace(-3,2,1000);figure(1);nyquist(num,den,w1);grid
title('Lieu de Nyquist')
%
%Diagramme de Bode
w2=logspace(-3,1,500);figure(2);bode(num,den,w2);grid
title('Diagramme de Bode')
%
% Lieu de Black-Nichols
figure(3);nichols(num,den,w2);grid
axis([-180,-60,-50,80])
title('Lieu de Black-Nichols')
%
```





Lieu de Black-Nichols avec grille.

8.9. INTERET DU LIEU DE BLACK-NICHOLS

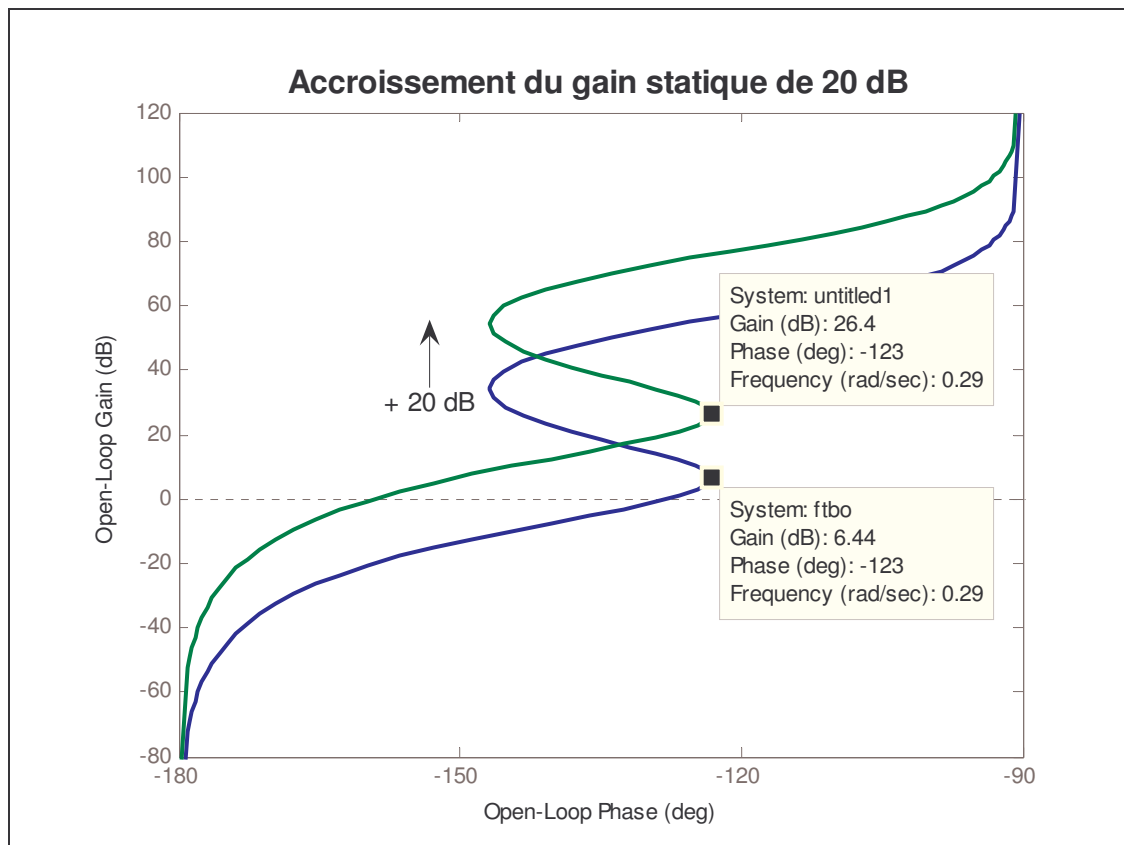
8.9.1. MODIFICATION DU GAIN STATIQUE

Soit la transmittance $H(p) = \frac{6(1+10p)}{p(1+p)(1+100p)}$

Un changement du gain statique (multiplication par x supérieur ou inférieur à 1) se traduit par une translation de lieu de $X_{dB} = 20 \cdot \log(x)$ parallèle à l'axe des ordonnées ($X_{dB} > 0$ si $x > 1$ et $X_{dB} < 0$ si $x < 1$).

Traitons un exemple.

```
%
% Modification du gain statique
ftbo=tf(num,den);
% On trace le lieu de ftbo et de 10*ftbo
figure(4);nichols(ftbo,10*ftbo)
title('Accroissement du gain statique de 20 dB')
%
```

Lieu de Black-Nichols sans grille.

8.9.2. MISE EN SERIE DE TRANSMITTANCES

La transmittance résultant de la mise en série de deux fonctions de transfert (e.g. l'insertion d'un correcteur $C(p)$ dans la $FTBO(p)$ d'un système) s'obtient par multiplication des deux fonctions de transfert.

Cette opération s'effectue très simplement dans les lieux de transfert de BODE et de BLACK-NICHOLS en additionnant respectivement les modules exprimés en dB et les phases exprimées en degrés.

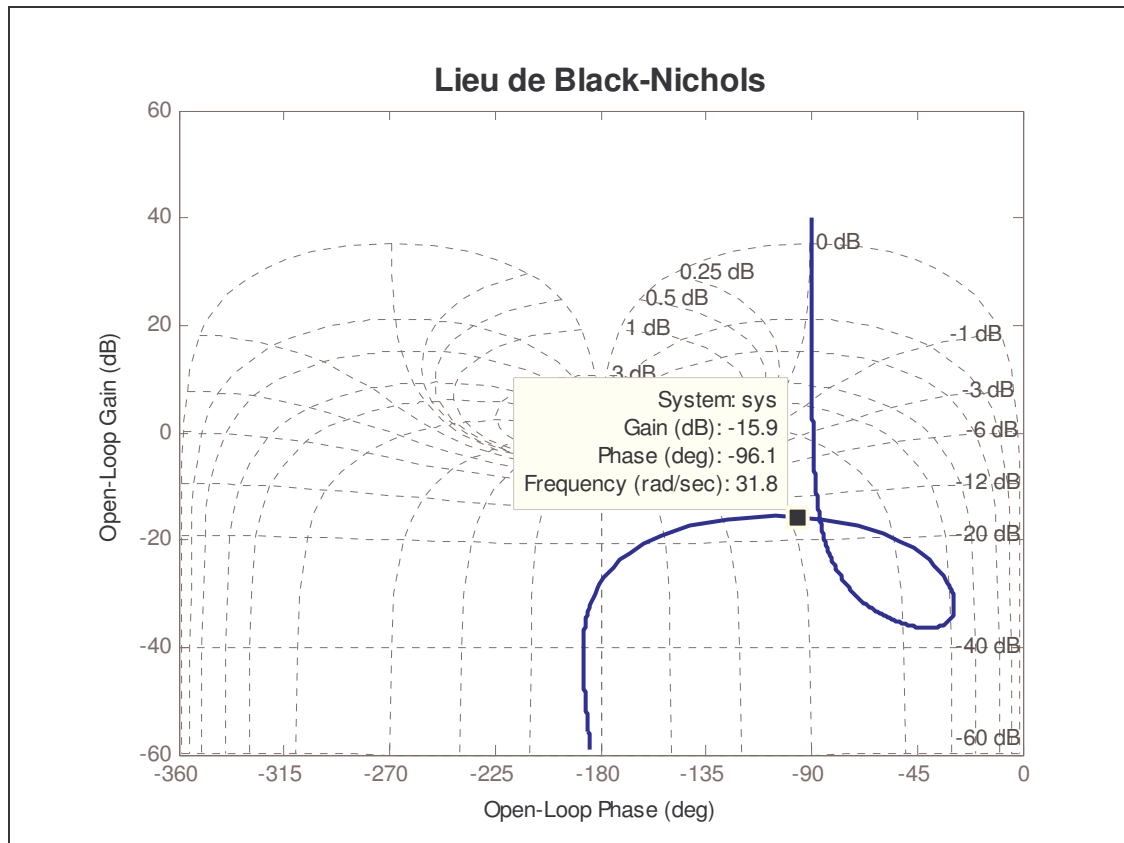
8.9.3. IDENTIFICATION D'UNE TRANSMITTANCE

Une résonance s'identifie sur le lieu de BLACK-NICHOLS par la présence d'une bosse. La pulsation de résonance se lit en ce point.

Traitons l'exemple suivant :

$$H(p) = 0,1 \frac{1 + 0,1p}{p(0,001p^2 + 0,002p + 1)}$$

```
%
% Identification d'une transmittance
sys=tf(0.1*[0.1 1],[0.001 0.002 1 0]);
w3=logspace(-3,2,1000);
figure(5);nichols(sys,w3);grid on
title('Lieu de Black-Nichols')
%
```



Sur le tracé ci-dessus on observe :

- que le système présente une intégration (il est de type 1) ;
- que $(d - n) = 2$;
- qu'il existe une résonance pour la pulsation $\omega_R = 31,8$ rad/s.

8.9.4. PRISE EN COMPTE DES RETARDS PURS

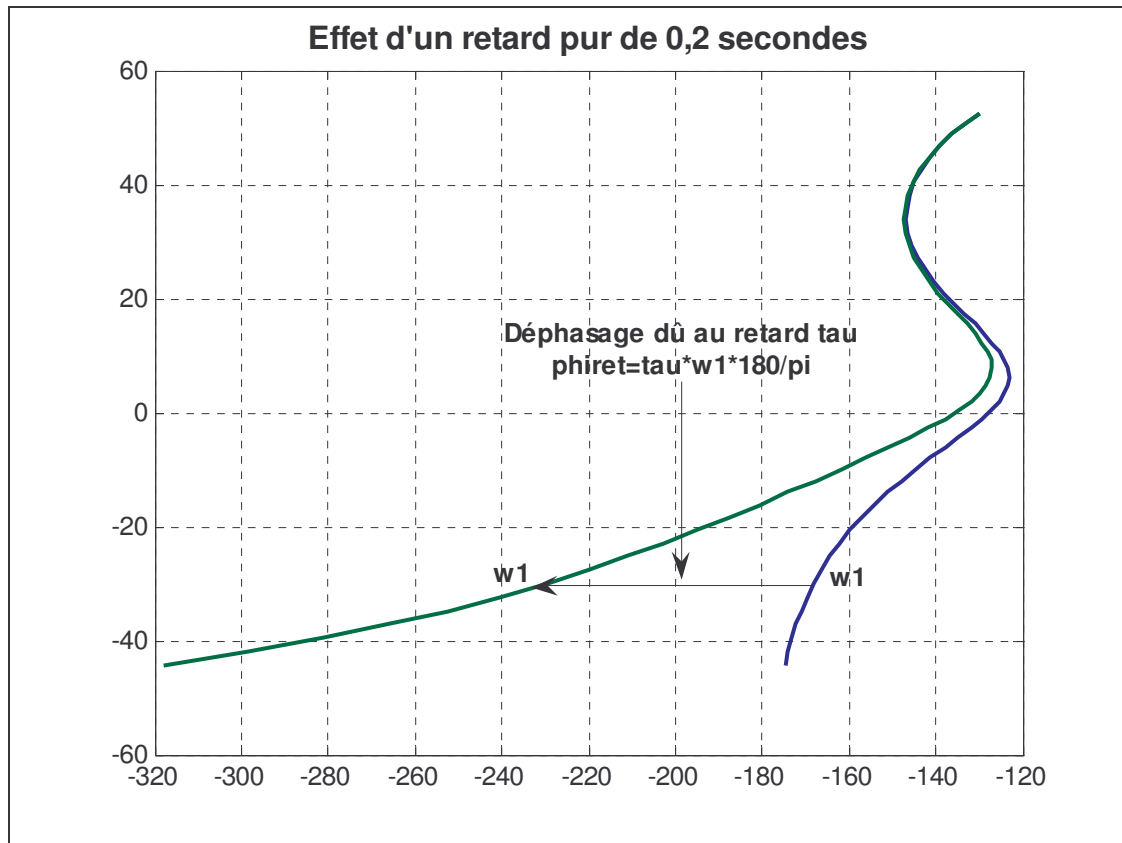
Soit la transmittance $ftbo(p) = \frac{60p + 6}{100p^3 + 101p^2 + p}$,

et la même transmittance affectée d'un retard pur de 0,25 seconde.

$$ftbo_ret(p) = e^{-0,25p} \frac{60p + 6}{100p^3 + 101p^2 + p}$$

Traçons les diagrammes de BLACK-NICHOLS correspondants.

```
%
% Prise en compte des retards purs
tau=0.25; num=[60, 6]; den=[100, 101, 1, 0];
w4=logspace(-2, 1, 50);
[a, phi, w4]=nichols(num, den, w4);
AdB=20*log10(a);
phiret=phi-(tau*w4*180/pi);
figure(6); plot(phi, AdB, phiret, AdB); grid on
title('Effet d''un retard pur de 0,2 secondes')
%
```



On se reportera aussi au § 8.5.3.

8.9.5. DETERMINATION DE LA FTBF

Nous verrons au chapitre suivant que, grâce à l'abaque de BLACK-NICHOLS qui dispose d'une grille particulière, il est possible, à partir du tracé du lieu de la $FTBO(j\omega)$, de déterminer les principales caractéristiques de $FTBF(j\omega)$ à partir d'une grille particulière.

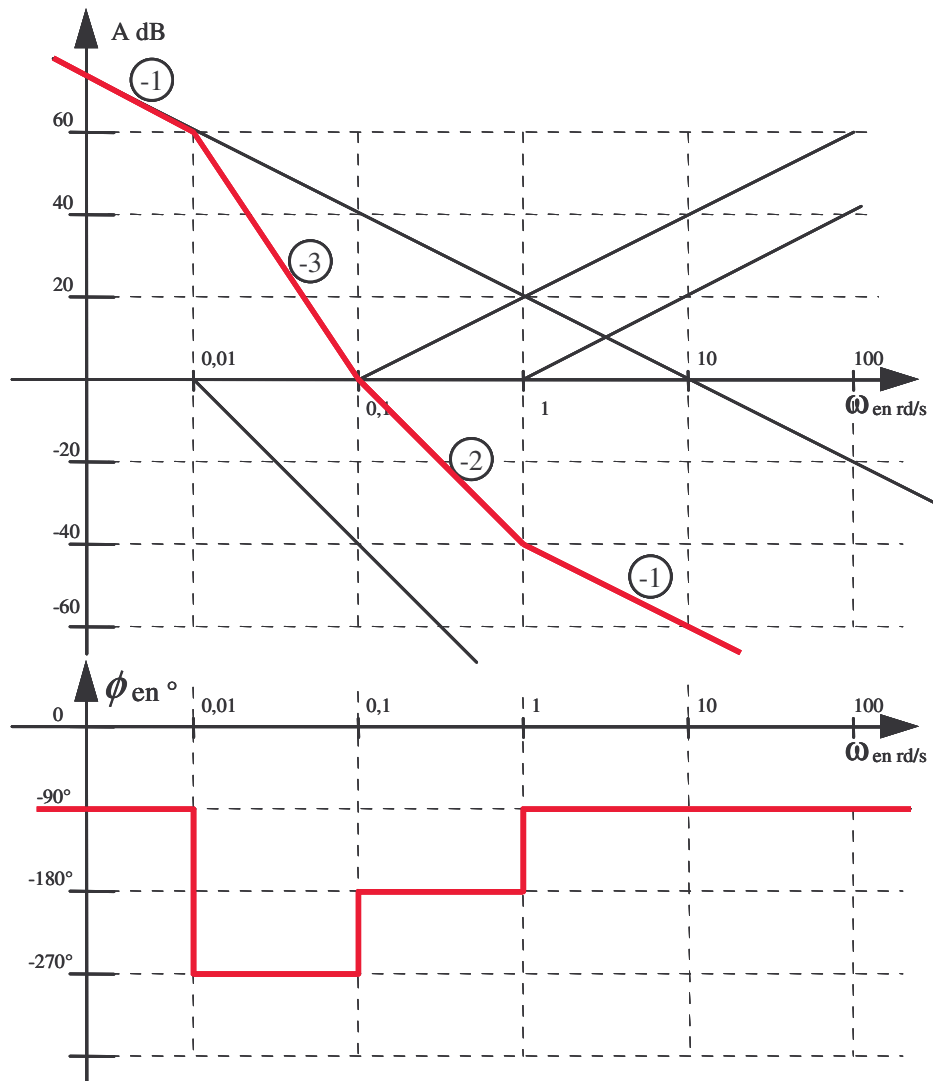
8.10. RELATION DE BAYARD-BODE

L'observation du diagramme de BODE asymptotique montre qu'il existe une étroite corrélation entre l'amplitude et la phase d'un système à déphasage minimum. Ainsi une variation de pente de + ou -1 entraîne à la limite un déphasage de + ou -90°. Soit $H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$.

BODE a démontré l'existence d'une relation entre amplitude et phase. La phase ϕ_1 à la pulsation ω_1 est définie par :

$$\phi_1 = \phi(\omega_1) = \frac{2\omega_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega$$

Quoique cette expression ne soit jamais utilisée dans les calculs numériques elle indique que la connaissance de $A(\omega)$ suffit pour caractériser la transmittance d'un système à déphasage minimal. Le tracé asymptotique de $A_{dB}(\omega)$ permet donc de déterminer sans ambiguïté le tracé asymptotique de la courbe de phase. Ainsi à la présence d'un tronçon de pente égale à $-n$ (i.e. $-20n$ dB/décade ou $-6n$ dB/octave) sur le tracé de $A_{dB}(\omega)$, on peut faire correspondre une asymptote $-n90^\circ$ à la courbe de phase.



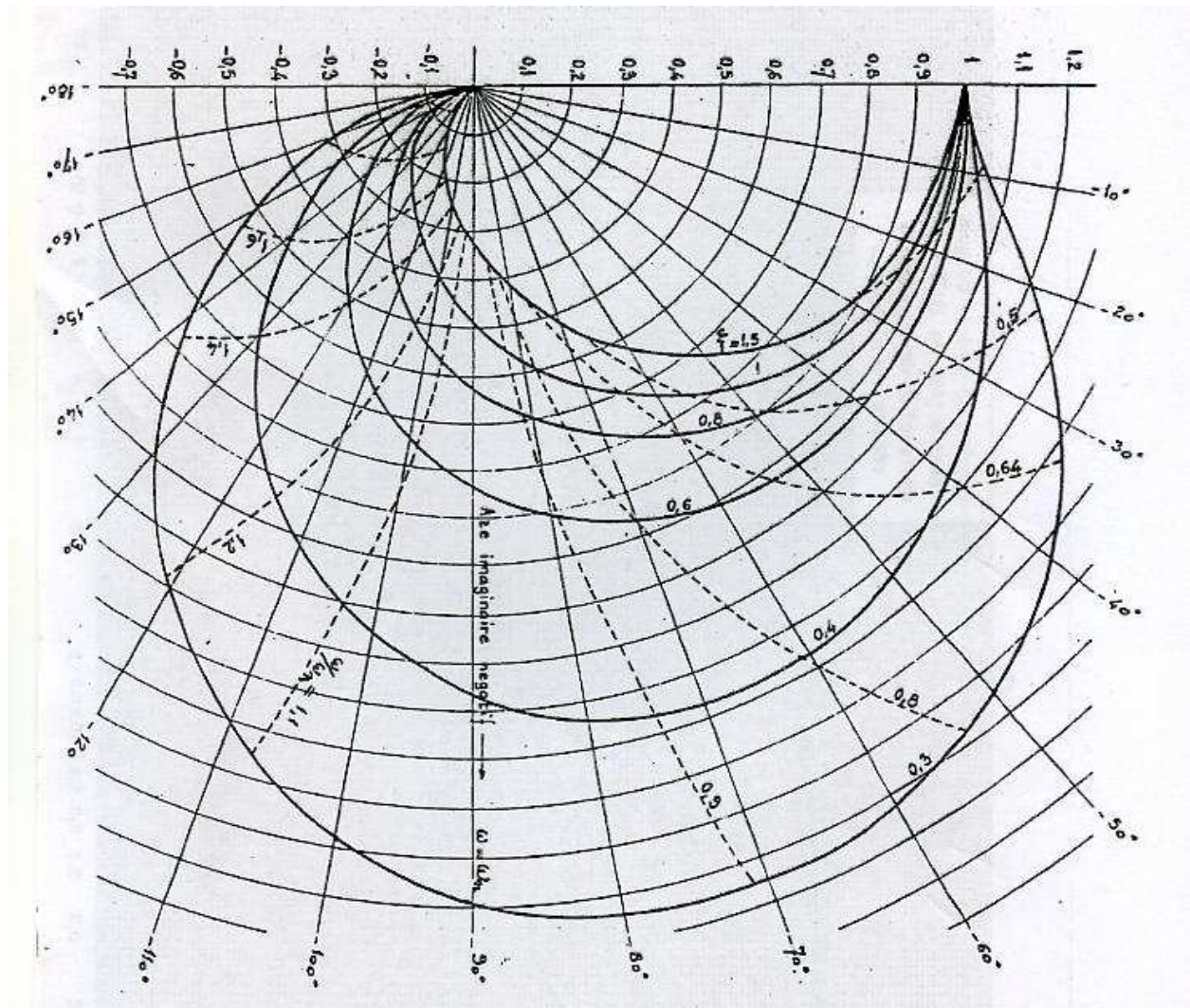
La construction de la courbe de phase ci-dessus est réalisée directement à partir d'un tracé asymptotique de A_{dB} . A la pente (-2) correspond l'asymptote (-180°).

On vérifie que ce tracé est représentatif de la transmittance :

$$H(p) = \frac{10.(1+p)(1+10p)}{p.(1+100p)^2}$$

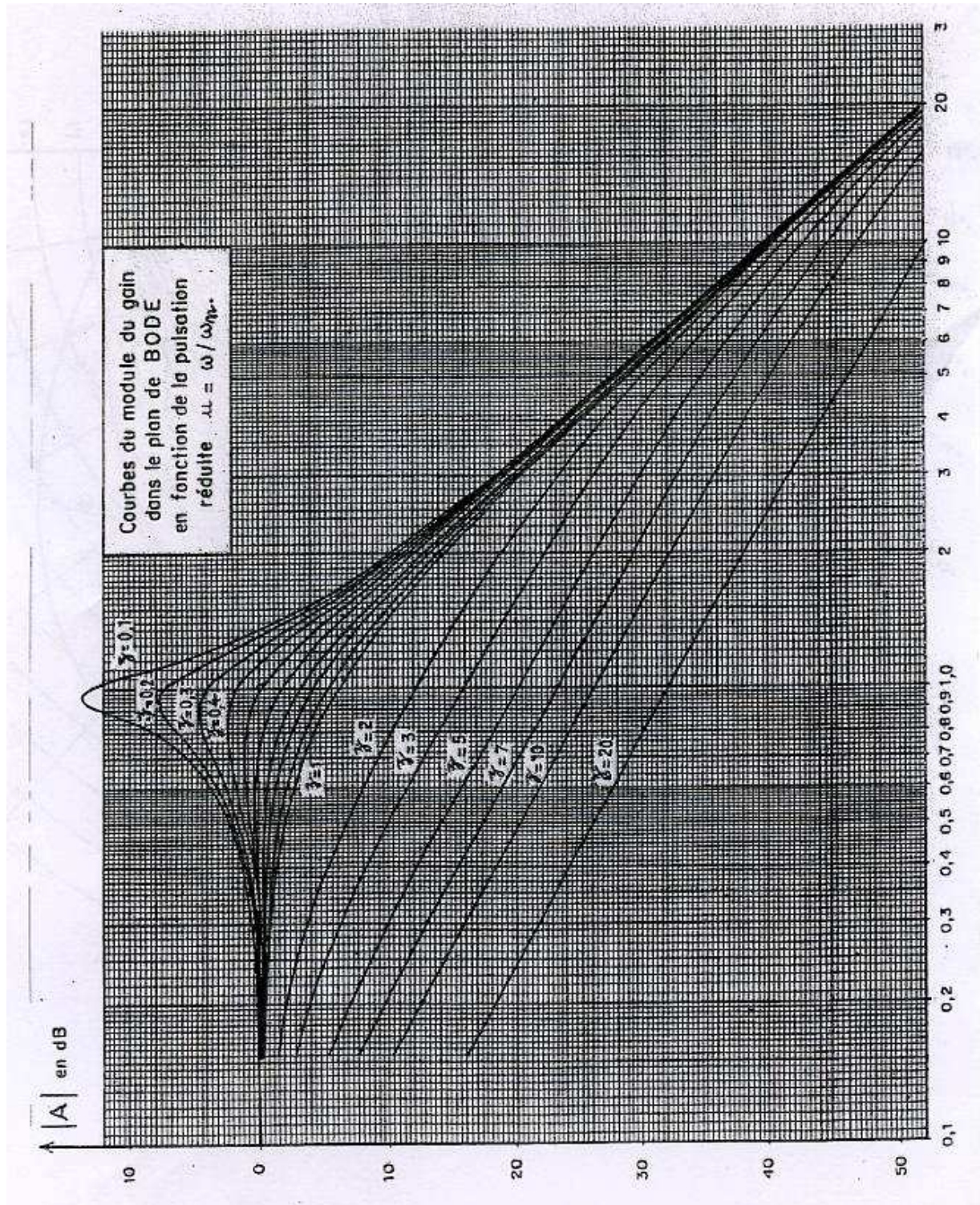
ANNEXE A.8.1.

SYSTEME DU SECOND ORDRE : REPRESENTATION DE NYQUIST



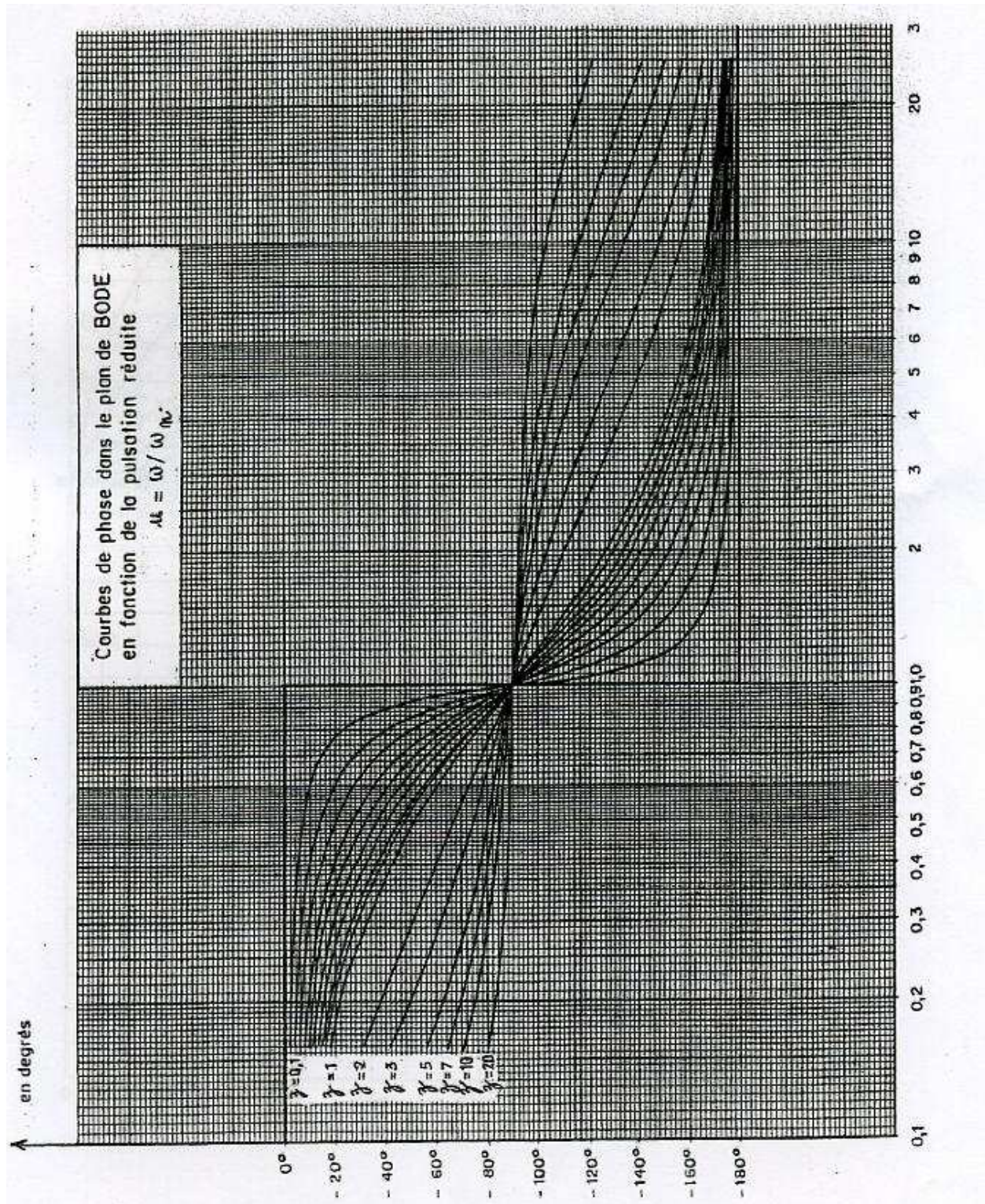
ANNEXE A.8.2.a

SYSTEME DU SECOND ORDRE : REPRESENTATION DE BODE
COURBE DES AMPLITUDES



ANNEXE A.8.2.b

SYSTEME DU SECOND ORDRE : REPRESENTATION DE BODE
COURBE DES PHASES



ANNEXE A.8.3.

SYSTEME DU SECOND ORDRE : REPRESENTATION DE BLACK-NICHOLS

