

# Chapitre 11

## Synthèse des correcteurs par "placement des pôles"

### 11.1. Méthode de « Zdan »

- 11.1.1. Problème à résoudre
- 11.1.2. Calcul du correcteur  $C(x)$
- 11.1.3. Exemple
- 11.1.4. Suppression des oscillations cachées
- 11.1.5. Conception d'un correcteur stable

### 11.2. Régulateur « RST »

- 11.2.1. Principe de la méthode et hypothèses
- 11.2.2. Précision en boucle fermée
- 11.2.3. Simplification des zéros
- 11.2.4. Choix du modèle à poursuivre
- 11.2.5. Résolution de l'identité de Bezout (equation diophantine)
- 11.2.6. Algorithme de synthèse du régulateur RST
- 11.2.7. Exemple n°1
- 11.2.8. Exemple n°2

### 11.1. METHODE DE « ZDAN »

#### 11.1.1. PROBLEME A RESOUDRE

La méthode des modes dominants proposée par ZDAN, permet de concevoir un correcteur numérique  $C(x)$  tel que la  $FTBF(x)$  du système compensé soit la plus simple possible et respecte des contraintes imposées sur les régimes transitoire et permanent. Indépendamment des contraintes de stabilité et de causalité, les spécifications à respecter sont les suivantes.

#### a. Spécification structurelle

La structure de la  $FTBF(z)$  doit être **la plus simple possible**. En d'autres termes elle doit comporter un nombre minimal de pôles et de zéros.

#### b. Spécification en régime permanent

Le correcteur doit permettre **d'annuler l'erreur permanente** correspondant à une entrée (consigne)  $y_c(t)$  polynomiale d'ordre  $n$ .

$$y_c(t) = \left[ Y_{p0} + Y_{v0}t + \dots + Y_{n0} \frac{t^n}{n!} \right] u(t) \Rightarrow \mathbf{Z}[y_c(t)] = Y_c(x) = \frac{V(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{v_0 + v_1x + \dots + v_nx^n}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{Y_c(x)}{1 + FTBO(x)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(kT) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\mathcal{E}(x)$$

Il faut que la  $FTBO(x)$  soit dotée de  $(n+1)$  intégrations, soit  $(n+1)$  pôles  $x=1$ .

#### c. Spécification transitoire

On désire que le système compensé ait un comportement en boucle fermée aussi voisin que possible de celui d'un **système du second ordre continu** de coefficient d'amortissement  $\zeta$  et de pulsation propre non amortie  $\omega_n$ .

Comme nous l'avons expliqué au § 7.2. la  $FTBF(z)$  doit posséder une paire de pôles dominants donnée par :

$$z_{p1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

### 11.1.2. CALCUL DU CORRECTEUR $C(x)$

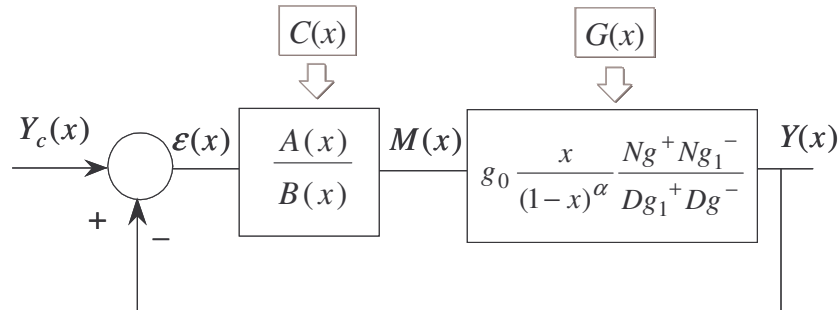


Figure 1 : Boucle de commande numérisée

$$P(p) = K \frac{P_1(p)}{p^\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \text{gain statique} \\ P_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ainsi 
$$G(x) = (1-x) \mathbf{Z} \left[ \frac{P(p)}{p} \right] = g_0 \frac{x}{(1-x)^\alpha} \frac{Ng^+ Ng_1^-}{Dg_1^+ Dg^-}$$

<b>Partie compensable de <math>G(x)</math></b>	$\frac{Ng^+}{Dg_1^+} = \frac{\prod_i (1 - c_i x)}{\prod_j (1 - \gamma_j x)} \quad \text{avec} \quad  c_i  \text{ et }  \gamma_j  < 1$
<b>Partie non-compensable de <math>G(x)</math></b>	$\frac{Ng_1^-}{Dg^-} = \frac{\prod_i (1 - r_i x)}{\prod_j (1 - \rho_j x)} \quad \text{avec} \quad  r_i  \text{ et }  \rho_j  > 1$

Pour tenir compte des trois spécifications formulées ci-dessus, on adopte un correcteur dont la structure est la suivante :

$$C(x) = C_A(x) C_B(x) C_C(x)$$

#### a. Détermination de $C_A(x)$

La $FTBF(z)$ doit comporter un nombre minimal de pôles et de zéros.	$\Rightarrow$	$C_A(x) = \frac{Dg_1^+}{Ng^+}$
---	---------------	--------------------------------

#### b. Détermination de $C_B(x)$

$C_B(x)$ doit permettre d'annuler l'erreur permanente correspondant à une entrée polynomiale d'ordre $n$ .	$\Rightarrow$	$C_B(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1-\alpha}}$
--	---------------	---

c. Détermination de  $C_C(x)$ 

$C_C(x)$  doit permettre de doter la  $FTBF(z)$  d'une paire de pôles dominants :

$$z_{P1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\Rightarrow$

$$C_C(x) = K_C \frac{N}{\Delta} = K_C \frac{\prod_i (1 - d_i x)}{\prod_j (1 - \delta_j x)}$$

Voir calcul ci après.

$$FTBF(x) = \frac{FTBO(x)}{1 + FTBO(x)} = \frac{Nbf(x)}{Dbf(x)} \text{ avec } FTBO(x) = C(x)G(x) = \frac{Nbo}{Dbo} \text{ ainsi :}$$

$$FTBO(x) = C_A(x)C_B(x)C_C(x)g_0 \frac{x}{(1-x)^\alpha} \frac{Ng^+ Ng_1^-}{Dg_1^+ Dg^-}$$

$$FTBO(x) = g_0 K_C \frac{N(x)}{\Delta(x)} \frac{x}{(1-x)^{n+1}} \frac{Ng_1^-}{Dg^-}$$

$$Dbf(x) = Dbo(x) + Nbo(x) = (1 - z_{P1}x)(1 - \bar{z}_{P1}x) \prod_k (1 - z_{Pk}x)$$

Les pôles secondaires  $z_{Pk}$  sont des pôles non dominants de la  $FTBF(z)$ . Aussi leur module sera tel que  $|z_{Pk}| < 0,1$ . Le plus souvent ces pôles peuvent être reportés à l'origine  $z_{Pk} = 0$ .

Les polynômes  $\Delta$  et  $N$  sont solutions de l'équation polynomiale :

$$(1-x)^{n+1} Dg^- \Delta + K_C g_0 x N g_1^- N = Dbf = (1 - z_{P1}x)(1 - \bar{z}_{P1}x) \prod_k (1 - z_{Pk}x)$$

## 11.1.3. EXEMPLE

Reprenons le système de commande étudié en 9.3.3. et 9.4.3.

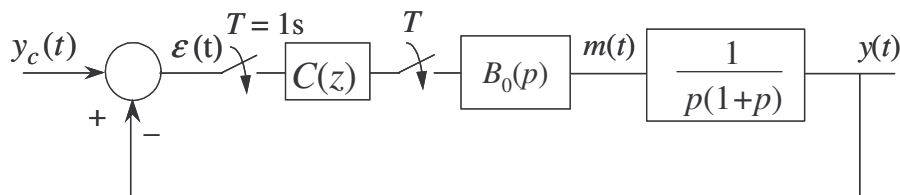


Figure 2 : Asservissement élémentaire de position

On désire calculer le correcteur  $C_7(x)$  permettant aux instants d'échantillonnage :

- d'annuler l'erreur de vitesse  $\varepsilon_v(nT)$ ,
- d'obtenir un comportement du processus compensé analogue à celui d'un système du second ordre tel que  $\zeta = 0,7$  et  $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$

## a. Eléments imposés

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} = \frac{0,37(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} \Rightarrow G(x) = \frac{0,37x(1+0,7x)}{(1-x)(1-0,37x)} = \frac{g_0 x}{(1-x)^\alpha} \frac{Ng^+ Ng_1^-}{Dg_1^+ Dg^-}$$

$$y_c(t) = t u(t) \Rightarrow Y_c(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow Y_c(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{R}{L^+}$$

$$\begin{array}{lll} n=1 & g_0 = 0,37 & \alpha = 1 \\ R = x & Ng^+ = 1 + 0,7x & Dg_1^+ = (1 - 0,37x) \\ L^+ = (1-x)^2 & Ng_1^- = 1 & Dg^- = 1 \end{array}$$

b. Détermination de  $C_A(x)$

$$C_A(x) = \frac{Dg_1^+}{Ng^+} = \frac{1 - 0,37x}{1 + 0,7x}$$

c. Détermination de  $C_B(x)$

$$C_B(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1-\alpha}} = \frac{1}{1-x}$$

d. Détermination de  $C_C(x)$

- Il s'agit de déterminer dans un premier temps  $Dbf(x)$  :

$$Dbf(x) = (1 - z_{P1}x)(1 - \bar{z}_{P1}x) = 1 - (z_{P1} + \bar{z}_{P1})x + z_{P1}\bar{z}_{P1}x^2$$

$$z_{P1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow z_{P1} = 0,2466e^{j1,414}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (z_{P1} + \bar{z}_{P1}) = 2|z_{P1}|\cos(1,414) = 0,077 \\ z_{P1} \cdot \bar{z}_{P1} = |z_{P1}|^2 = 0,061 \end{cases} \Rightarrow Dbf(x) = 1 - 0,077x + 0,061x^2$$

- Nous devons résoudre l'équation polynomiale suivante :

$$(1-x)^{n+1} Dg^- \Delta + K_C g_0 x Ng_1^- N = Dbf$$

$$(1-x)^2 \Delta + 0,37 K_C x N = 1 - 0,077x + 0,061x^2$$

Cette équation est régulière aussi calculerons-nous la solution minimale.

$$\|\Delta\| = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 \quad \text{et} \quad \|N\| = 2 - 1 = 1 \Rightarrow N = 1 - dx$$

$$(1-x)^2 + 0,37 K_C x (1-dx) = 1 - 0,077x + 0,061x^2 \Rightarrow K_C N = 5,2(1 - 0,49x)$$

- Le correcteur  $C_7(x)$  est donné par :

$$C_7(x) = \frac{5,2(1-0,49x)(1-0,37x)}{(1-x)(1+0,7x)} = \frac{5,2-4,47x+0,94x^2}{1-0,3x-0,7x^2}$$

e. Simulation de la boucle de commande compensée par  $C_7(x)$

Enregistrons la réponse en vitesse. Nous observons des oscillations « cachées ». Le temps de réponse est court mais la commande  $m(t)$  présente de fortes amplitudes (risque de saturation).

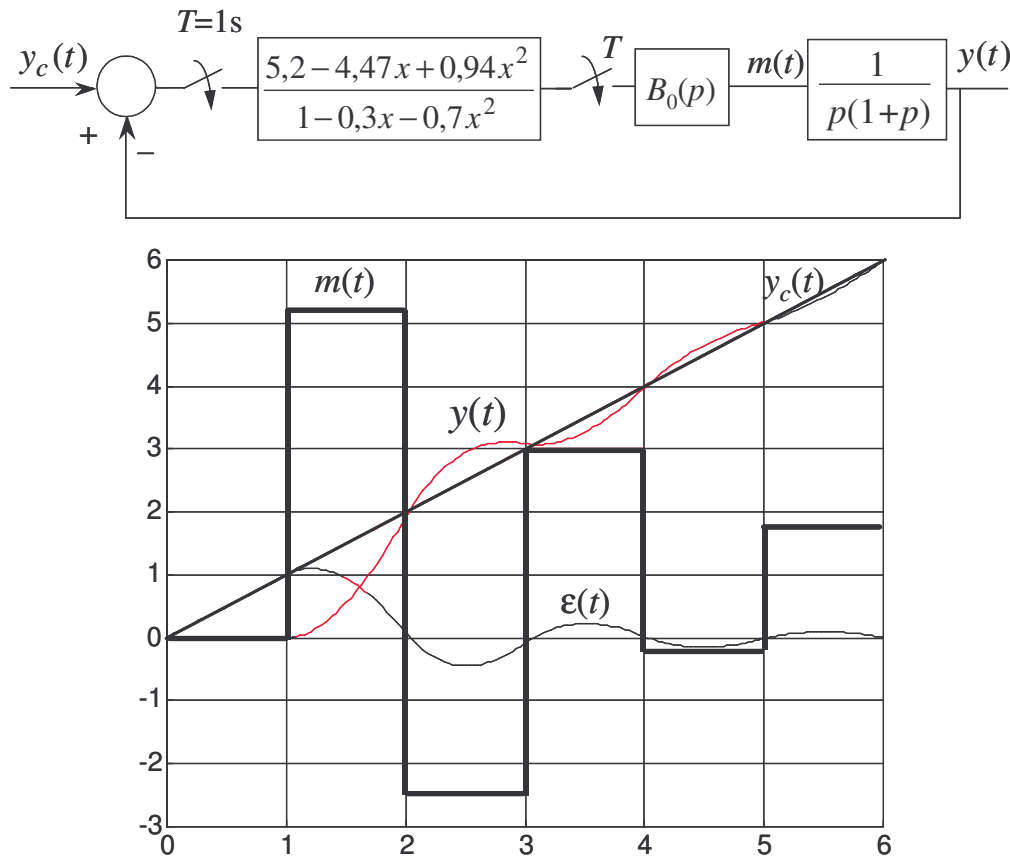


Figure 3 : Réponse en vitesse du système compensé par  $C_7(z)$

On vérifiera que la réponse indicielle présente des oscillations pratiquement inacceptables.

#### 11.1.4. SUPPRESSION DES OSCILLATIONS CACHEES

Comme nous pouvons le constater sur l'exemple précédent la sortie présente des oscillations cachées entre les instants d'échantillonnage dues aux discontinuités de  $m(t)$ . Pour annuler l'erreur continue  $\varepsilon(t)$  on applique les résultats établis pour le correcteur de VOLGUINE au § 9.4.2 à savoir que :

- le processus doit comporter un nombre d'intégrations  $\alpha$  suffisant ( $\alpha \geq n$ ),  $n$  étant le degré de l'entrée polynomiale,
- l'on ne doit pas compenser les zéros compensables de  $G(x)$ .

On adopte le correcteur  $C(x) = C_A(x) C_B(x) C_C(x)$  calculé selon les formules suivantes :

$C_A(x) = Dg_1^+$	$C_B(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1-\alpha}}$	$C_C(x) = K_C \frac{N}{\Delta}$ avec : $(1-x)^{n+1} Dg^- \Delta + K_C g_0 x N g^+ N g_1^- N = D b f$
-------------------	---	---

### 11.1.5. CONCEPTION D'UN CORRECTEUR STABLE

La méthode de ZDAN conduit souvent à la synthèse de correcteurs numériques instables. C'est notamment le cas lorsque la transmittance du processus contient un ou plusieurs zéros non compensables. Dans ce cas la solution minimale de l'équation polynomiale ne convient et il faut chercher une solution plus générale selon la démarche décrite au § 9.5.4.a.

A titre d'exemple étudions l'asservissement d'un processus intégrateur affecté par un retard pur de 0,7s. La période d'échantillonnage est de 1 seconde. La boucle de commande est la suivante :

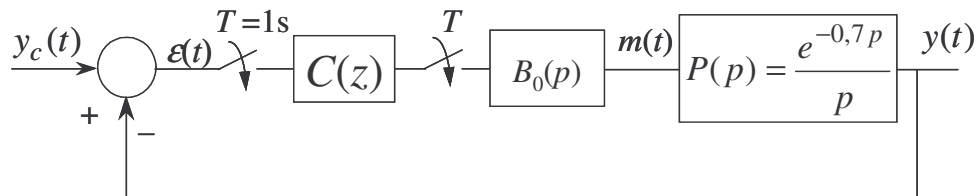


Figure 4 : Processus intégrateur avec retard

Il s'agit de régler  $C(x)$  de telle sorte que la  $FTBF(x)$  admette tous ses pôles à l'origine ( $z=0$ ) et présente une erreur de vitesse en régime stationnaire nulle aux instants d'échantillonnage.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{e^{-0,7p}}{p^2} \right] = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z}_m \left[ \frac{1}{p^2} \right]_{m=0,3} \Rightarrow G(x) = \frac{0,3x(1+2,33x)}{(1-x)}$$

$n=1$	$g_0=0,3$	$\alpha=1$	$Dbf=1$
$R=x$	$Ng^+=1$	$Dg_1^+=1$	
$L^+=(1-x)^2$	$Ng_1^-=1+2,33x$	$Dg^-=1$	

$C_A(x)=1$	$C_B(x)=\frac{1}{(1-x)}$	$C_C(x)=K_C \frac{N}{\Delta}$ avec :
		$(1-x)^2 \Delta + 0,3K_C x(1+2,33x)N=1$

Réolvons l'équation polynomiale :

$$(1-x)^2 \Delta + 0,3K_C x(1+2,33x)N=1$$

Cette équation est régulière aussi calculerons-nous sa solution minimale.

$$\|\Delta_0\|=2-1=1 \Rightarrow \Delta_0=(1-\delta x) \quad \text{et} \quad \|N_0\|=2-1=1 \Rightarrow N_0=(1-dx)$$

$$(1-x)^2(1-\delta x) + 0,3K_C x(1+2,33x)(1-dx)=1 \Rightarrow \begin{cases} K_C=2,7 \\ \delta=-1,19 \\ d=0,64 \end{cases}$$

$$C_8(x) = \frac{2,7(1-0,64x)}{(1-x)(1+1,19x)}$$

Le correcteur  $C_8(x)$  est instable. Il ne convient pas. On cherche une solution plus générale de l'équation polynomiale.

$$N(x) = 2,7(1 - 0,64x) - P(1 - x)^2$$

$$\Delta(x) = (1 + 1,19x) + P0,3x(1 + 2,33x)$$

Cherchons une solution telle que  $P = p_0$ .

$$C_9(x) = \frac{N(x)}{(1-x)\Delta(x)} = \frac{2,7(1-0,64x) - p_0(1-x)^2}{(1-x)((1+1,19x) + 0,3p_0x(1+2,33x))}$$

$$C_9(x) = \frac{2,7(1-0,64x) - p_0(1-x)^2}{(1-x)(1 + (1,19 + 0,3p_0)x + 0,7p_0x^2)}$$

Pour que ce correcteur soit stable il faut que son dénominateur admette des racines situées à l'intérieur du cercle unité. Appliquons le critère de JURY à  $\Delta(x)$  afin d'identifier les conditions que doit respecter le paramètre  $p_0$ .

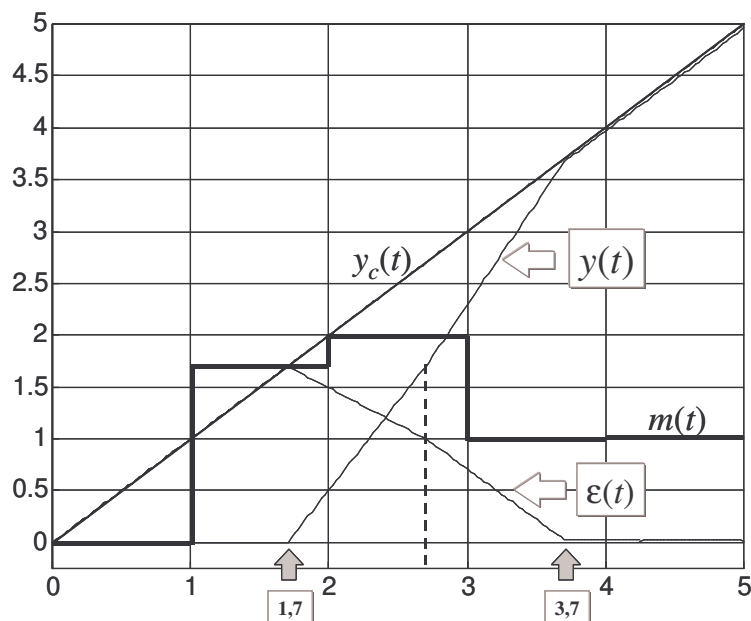
$$\Delta(z) = z^2 + (1,19 + 0,3p_0)z + 0,7p_0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta(1) = 2,19 + p_0 > 0 \\ \Delta(-1) = -0,19 + 0,4p_0 > 0 \\ |0,7p_0| < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0,475 < p_0 < 1,428}$$

Choisissons  $p_0 = 1$ . Dans ce cas le correcteur est égal à :

$$C_9(x) = \frac{2,7(1-0,64x) - (1-x)^2}{(1-x)((1+1,19x) + 0,3x(1+2,33x))} = \frac{2,7(1-0,64x) - (1-x)^2}{(1-x)(1+1,49x+0,7x^2)}$$

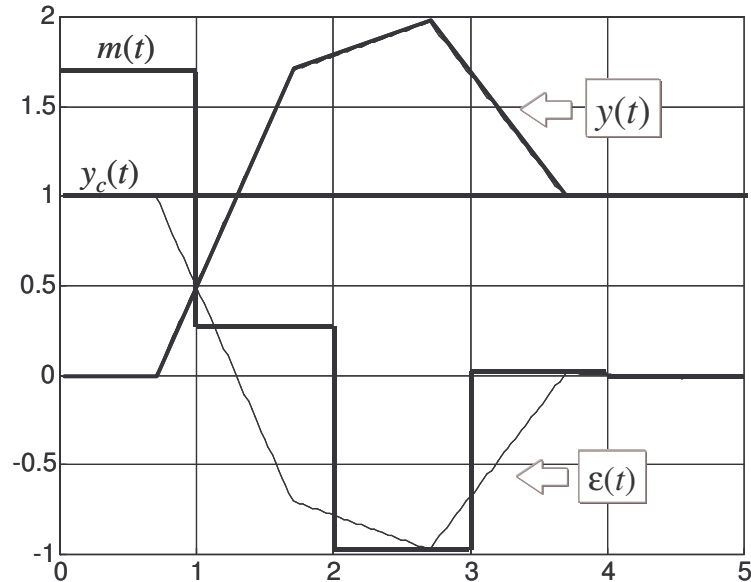
$$C_9(x) = \frac{1,7 + 0,272x - x^2}{1 + 0,49x - 0,79x^2 - 0,7x^3}$$

Enregistrons la réponse en vitesse du processus asservi.



On observe que l'erreur de vitesse s'annule en 3 commandes au temps  $t = 3,7$  secondes (i.e.  $3T + \text{retard du processus}$ ). On remarquera que ce correcteur correspond au correcteur à temps de réponse minimal (pourquoi ?).

Pour l'information de nos étudiants nous avons enregistré la réponse indicielle du système compensé. Ils exploiteront ces très intéressants résultats.



## 11.2. REGULATEUR « RST »

### 11.2.1. PRINCIPE DE LA METHODE ET HYPOTHESES

La méthode consiste à déterminer 3 polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  correspondant à la structure de commande représentées ci-après et à choisir un polynôme  $K(z)$  dit polynôme observateur.

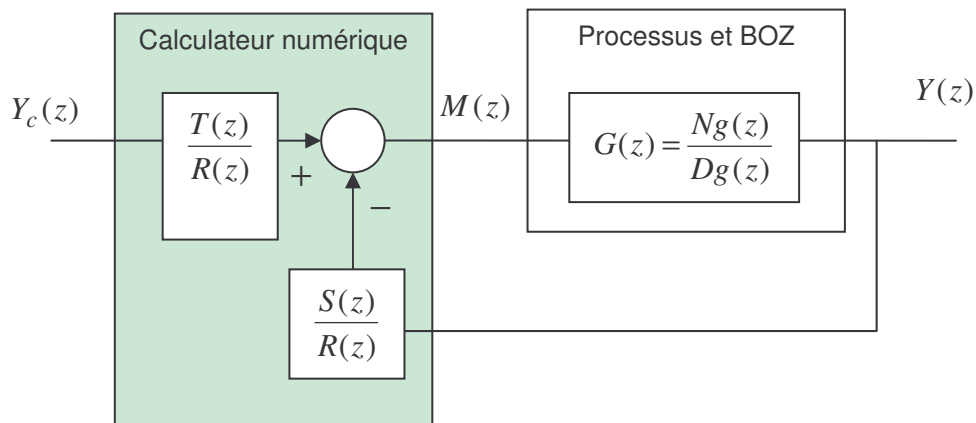


Figure 5 : Schéma fonctionnel du correcteur RST

La transmittance du système en boucle fermée est égale à

$$FTBF(z) = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)} = \frac{Ng(z)T(z)}{Dg(z)R(z) + Ng(z)S(z)}$$



Les fonctions de transfert étant réalisables on vérifiera que :

$$\begin{array}{l} \|R\| \geq \|S\| \\ \|R\| \geq \|T\| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \|Dg\| \geq \|Ng\| \\ \|Dbf\| \geq \|Nbf\| \end{array}$$

- Le calcul des polynômes résulte du choix de la  $FTBF(z) = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)}$  qui est une donnée du problème. Les polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont définis afin que la  $FTBF(z)$  soit identique à celle du modèle à poursuivre (modèle de référence) que nous noterons :

$$FTBF_m(z) = \frac{Nbf_m(z)}{Dbf_m(z)}$$

- $\|Dbf_m\|$  n'est pas nécessairement égal à  $\|DgR + NgS\| = \|Dg\| + \|R\|$ . Le plus souvent il est inférieur.
- Pour régler le placement des pôles de la  $FTBF(z)$  on dispose des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$ .
- Le polynôme  $R(z) = z^\rho + r_1 z^{\rho-1} + \dots + r_\rho$  est monique (i.e. normalisé  $r_0 = 1$ )
- $S(z) = s_0 z^\sigma + s_1 z^{\sigma-1} + \dots + s_\sigma$
- $T(z) = t_0 z^\tau + t_1 z^{\tau-1} + \dots + t_\tau$

La loi de commande (équation récurrente) à implanter dans le calculateur est donnée par :

$$M(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

n supposant<sup>1</sup> que  $R$ ,  $S$  et  $T$  soient de même degré  $\rho = \tau = \sigma$  et en écrivant les polynômes en  $x = z^{-1}$  il vient :

$$M(z) = \frac{t_0 + t_1 x + \dots + t_\rho x^\rho}{1 + r_1 x + \dots + r_\rho x^\rho} Y_c(z) - \frac{s_0 + s_1 x + \dots + s_\rho x^\rho}{1 + r_1 x + \dots + r_\rho x^\rho} Y(z)$$

$$\boxed{m_k = -r_1 m_{(k-1)} - r_2 m_{(k-2)} - \dots - r_\rho m_{(k-\rho)} + t_0 y_{c(k)} + t_1 y_{c(k-1)} + \dots + t_\rho y_{c(k-\rho)} - s_0 y_{(k)} - s_1 y_{(k-1)} - \dots - s_\rho y_{(k-\rho)}}$$

n supposant<sup>2</sup> que  $S$  et  $T$  soient de degré  $\tau = \sigma = (\rho - 1)$  et en écrivant les polynômes en  $x = z^{-1}$  on obtient :

$$\boxed{m_k = -r_1 m_{(k-1)} - r_2 m_{(k-2)} - \dots - r_\rho m_{(k-\rho)} + t_0 y_{c(k-1)} + t_1 y_{c(k-2)} + \dots + t_{\rho-1} y_{c(k-\rho)} - s_0 y_{(k-1)} - s_1 y_{(k-2)} - \dots - s_{\rho-1} y_{(k-\rho)}}$$

<sup>1</sup> Cela signifie que les temps d'acquisition, de calcul et de conversion sont négligeables vis à vis de  $T$  et que l'on peut sortir la commande sans attendre.

<sup>2</sup> Cela signifie que les temps d'acquisition, de calcul et de conversion ne sont pas négligeables vis à vis de  $T$  et que

l'on attend la récurrence suivante pour sortir la commande (retard d'une période d'échantillonnage).

### 11.2.2. PRECISION EN BOUCLE FERMÉE

La précision du système en boucle fermée est en particulier tributaire du nombre d'intégration de la fonction de transfert en boucle ouverte donnée par :

$$FTBO(z) = \frac{Ng(z)S(z)}{Dg(z)R(z)}$$

Aussi  $R(z)$  sera-t-il choisi égal à  $R(z) = (z-1)^j R'(z)$ .

### 11.2.3. SIMPLIFICATION DES ZEROS

Le processus à commander possède des zéros, racines de  $Ng(z) = Ng^+(z)Ng^-(z)$ .

- Le polynôme  $Ng^+(z)$  regroupe les zéros compensables qui seront modifiés par la boucle de commande. On choisira  $Ng^+(z)$  monique.  $Y(z)$
- Le polynôme  $Ng^-(z)$  regroupe les zéros non compensables et **ceux qu'on ne souhaite pas modifier par la boucle de commande.**

Ainsi :

$$FTBF_m(z) = \frac{Nbf_m(z)}{Dbf_m(z)} = \frac{Ng^+(z)Ng^-(z)T(z)}{Dg(z)R(z) + Ng^+(z)Ng^-(z)S(z)}$$

Les zéros de  $Ng^-(z)$  ne sont pas zéro de  $[Dg(z)R(z) + Ng^+(z)Ng^-(z)S(z)]$  aussi sont-ils zéros de  $Nbf_m(z)$  et l'on peut écrire :

$$Nbf_m(z) = Ng^-(z)Nbf'_m(z)$$

Par contre pour compenser  $Ng^+(z)$  on choisira  $R(z) = (z-1)^j R_1(z)Ng^+(z) = R'(z)Ng^+(z)$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{Nbf_m(z)}{Dbf_m(z)} &= \frac{Ng^-(z)T(z)}{Dg(z)[(z-1)^j R_1(z)] + Ng^-(z)S(z)} \\ \frac{Nbf_m(z)}{Dbf_m(z)} &= \frac{Ng^-(z)Nbf'_m(z)}{Dbf_m(z)} = \frac{Ng^-(z)Nbf'_m(z)K(z)}{Dbf_m(z)K(z)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{Ng^-(z)T(z)}{Dg(z)[(z-1)^j R_1(z)] + Ng^-(z)S(z)} = \frac{Ng^-(z)Nbf'_m(z)K(z)}{Dbf_m(z)K(z)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Dg(z)(z-1)^j R_1(z) + Ng^-(z)S(z) &= Dbf_m(z)K(z) \\ T &= Nbf'_m(z)K(z) \end{aligned}$$

$K(z)$  est appelé polynôme observateur. **Il est choisi par le concepteur.** On adopte souvent :

$$K(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-\|K\|}$$

### 11.2.4. CHOIX DU MODELE A POURSUIVRE

Il faut choisir un modèle simple d'ordre peu élevé.

Le numérateur de  $FTBF_m$  doit comporter les zéros non compensables de  $G(z)$  et ainsi :

$$Nbf_m(z) = Ng^-(z)Nbf'(z)$$

On peut par exemple choisir :

$$FTBF_m = \frac{Ng^-(z) \frac{P(1)}{Ng^-(1)}}{z^a P(z)}$$

Le terme  $z^a$  provoque un retard de  $a$  période d'échantillonnage. Il permet de répondre à la spécification  $\|Dbf_m\| - \|Nbf_m\| \geq \|Dg\| - \|Ng\|$  qui signifie que le retard du modèle est supérieur ou égal au retard du processus à régler (i.e. le régulateur ne rattrape pas les retards).

Le terme  $\frac{P(1)}{Ng^-(1)}$  assure que le gain statique de  $FTBF_m$  est égal à 1 (pas d'erreur de position).

Le polynôme  $P(z)$  est monique et l'on choisit selon le cas :

$$P(z) = z + p_0 \text{ ou encore}$$

$$P(z) = z^2 + p_1 z + p_0$$

### 11.2.5. RESOLUTION DE L'IDENTITE DE BEZOUT (EQUATION DIOPHANTINE)

Il s'agit de résoudre :

$$(i) \quad Dg(z)(z-1)^j R_1(z) + Ng^-(z)S(z) = Dbf_m(z)K(z)$$

$$(ii) \quad T = Nbf'_m(z)K(z)$$

$$(iii) \quad R(z) = Ng^+(z)(z-1)^j R_1(z)$$

$$(iv) \quad Nbf_m(z) = Ng^-(z)Nbf'_m(z)$$

Il existe un correcteur RST tel que  $\|R\| \geq \|T\|$  et  $\|R\| \geq \|S\|$  si l'on vérifie :

$$(v) \quad \|Dbf_m\| - \|Nbf_m\| \geq \|Dg\| - \|Ng\|$$

$$(vi) \quad \|K\| \geq 2\|Dg\| - \|Dbf_m\| - \|Ng^+\| + j - 1$$

$R(z)$ ,  $Dg(z)$  et  $Dbf_m$  sont des polynômes moniques.

Dans ce cas :

$$(vii) \quad \|R_1\| = \|Dbf_m\| + \|K\| - \|Dg\| - j$$

$$(viii) \quad \|S\| = \|Dg\| + j - 1$$

### 11.2.6. ALGORITHME DE SYNTHÈSE DU REGULATEUR RST

La méthode de résolution se déroule selon la démarche suivante :

Données	Vérifier que $Ng(z)$ et $Dg(z)$ sont premiers entre eux
Spécifications	Le cahier des charges permet de déterminer $Dbf_m$ voire $Nbf_m$
Etape 1	Si $Nbf_m$ est libre on calcule ce polynôme à partir de : $\ Dbf_m\  - \ Nbf_m\  \geq \ Dg\  - \ Ng\ $
Etape 2	Factoriser $Ng(z) = Ng^+ Ng^-$ avec $Ng^+$ monique.
Etape 3	Déterminer $Nbf_m'$ à partir $Nbf_m = Ng^- Nbf_m'$
Etape 4	Déterminer le nombre $j$ d'intégrations à rajouter dans la $FTBO(z)$
Etape 5	$\ K\  \geq 2\ Dg\  - \ Dbf_m\  - \ Ng^+\  + j - 1$ $\ R_1\  = \ Dbf_m\  + \ K\  - \ Dg\  - j$ $\ S\  = \ Dg\  + j - 1$
Etape 6	Résoudre $Dbf_m(z)K(z) = Dg(z)(z-1)^j R_1(z) + Ng^-(z)S(z)$
Etape 7	$R(z) = (z-1)^j Ng^+(z)R_1(z) + Ng^+(z)Ng^-(z)S(z) \text{ et}$ $T(z) = Nbf_m'(z)K(z)$

### 11.2.7. EXEMPLE N°1

On considère un système du second ordre très faiblement amorti ( $\zeta = 0,1$ ) et de pulsation propre non-amortie  $\omega_n = 0,7$  rad/s. Son gain statique est égal à 1.

$$P(p) = \frac{0,49}{p^2 + 0,14p + 0,49}$$

On désire un système mieux amorti ( $\zeta' = 0,8$ ) pour lequel  $\omega'_n = 1,4$  rad/s, le gain statique étant égal à l'unité. Pour obtenir cela on insère le second ordre dans une boucle de commande numérique (calculateur numérique et son BOZ associé) à retour unitaire. On adopte  $T = (1/1,4)$  s. On calcule  $G(z) = \mathbf{Z}[B_0(p)P(p)]$  avec la Control system toolbox (CST).

```

>> n=[0.49];d=[1 0.14 0.49];
>> P=tf(n,d)
Transfer function:
      0.49
-----
s^2 + 0.14 s + 0.49

>> G=c2d(P,1/1.4)
Transfer function:
      0.1185 z + 0.1145
-----
z^2 - 1.672 z + 0.9048
Sampling time: 0.71429

>> [nz,dz,T]=tfdata(G,'v')
nz = 0 0.1185 0.1145
dz = 1.0000 -1.6718 0.9048
T = 0.7143

>> zP=roots(dz)
zP = 0.8359 + 0.4540i
      0.8359 - 0.4540i

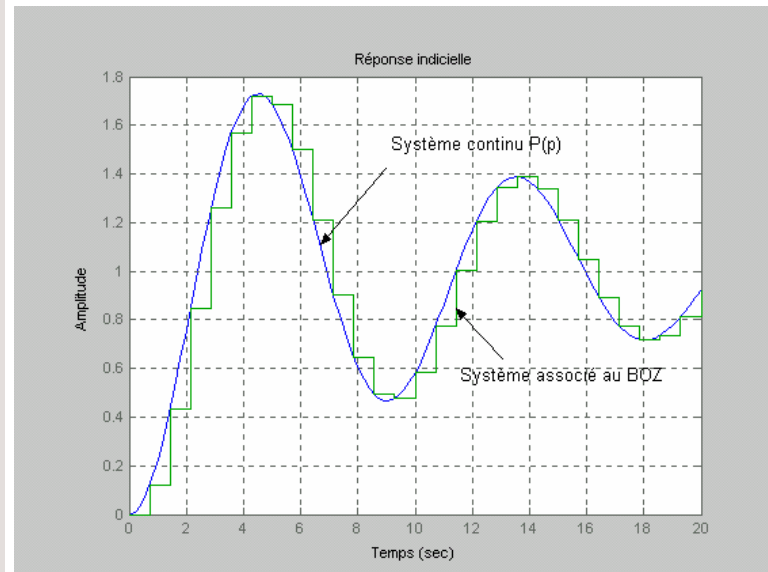
>> zpk(G)
Zero/pole/gain:
      0.11845 (z+0.9669)
-----
(z^2 - 1.672z + 0.9048)
Sampling time: 0.71429

>> step(P,G,20)

```

La commande « c2d » intègre le BOZ.

On observe la réponse indicielle du système continu et celle du système discret correspondant pour  $T = 0,7143$  s



On notera :

- l'effet du faible amortissement sur la réponse indicielle;
- la correspondance des 2 modèles.

On ne désire pas compenser le zéro égal à  $-0,9669$ . Ainsi 
$$\begin{cases} Ng^- = 0,118(z + 0,967) \\ Ng^+ = 1 \end{cases}$$

Déterminons la  $FTBF_m(z)$

$$\|Dbf_m\| - \|Nbf_m\| \geq \|Dg\| - \|Ng\| \Rightarrow \|Dbf_m\| - \|Nbf_m\| \geq 1$$

Admettons que 
$$\begin{cases} Nbf_m = Ng^- Nbf'_m = 0,118k(z + 0,967) \\ \|Dbf_m\| = 2 \end{cases}$$

On désire que le système en boucle fermée admette  $\zeta' = 0,8$  et  $\omega'_n = 1,4$  rad/s.

Etablissons le modèle à poursuivre. Nous trouvons

$$FTBF_m(z) = \frac{0,2336(z + 0,967)}{z^2 - 0,7417z + 0,2019}$$

La méthode est la suivante :

```
>> [nbfc,dbfc]=ord2(1.4,0.8);
>> zp=exp(0.7143*roots(dbfc))
zp =
    0.3708 + 0.2537i
    0.3708 - 0.2537i
```

```
>> Dbfm=conv([1 -zp(1)],[1 -zp(2)])
Dbfm =
    1.0000 -0.7417 0.2019
```

On détermine le second ordre modèle.

On calcule les pôles de la  $FTBF_m(z)$  et on détermine les coefficients de son dénominateur.

Ainsi :

$$FTBF_m(z) = \frac{0,118(z + 0,967)k}{z^2 - 0,7417z + 0,2019}$$

$k$  permet d'ajuster le gain statique à 1.  
 $k = 1,98$

Il n'est pas nécessaire de prévoir des intégrations supplémentaire ( $j = 0$ ).

$\ K\  \geq 2\ Dg\  - \ Dbf\  - \ Ng^+\  + j - 1$	$\ K\  \geq 4 - 2 - 0 + 0 - 1 = 1$ Choix $K = z$
$\ R_1\  = \ Dbf\  + \ K\  - \ Dg\  - j$	$\ R_1\  = 2 + 1 - 2 - 0 = 1$ Choix $R = z + r_0$
$\ S\  = \ Dg\  + j - 1$	$\ S\  = 2 + 0 - 1 = 1$ Choix $S = s_1z + s_0$

Il faut résoudre  $Dbf_m \cdot K = Dg(z-1)^j R_1 + Ng^- S$

$$z(z^2 - 0,74z + 0,2) = (z^2 - 1,672z + 0,905)(z + r_0) + 0,118(z + 0,967)(s_1z + s_0)$$

On obtient la solution :

$$\begin{cases} r_0 = 0,449 \\ s_1 = 4,086 \\ s_0 = -3,563 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(z) = z + 0,449 \\ S(z) = 4,086z - 3,563 \\ T(z) = 1,98z \end{cases}$$

D'où la loi de commande :

$$M(z) = \frac{1,98z}{z + 0,449} Y_c(z) - \frac{4,086z - 3,563}{z + 0,449} Y(z)$$

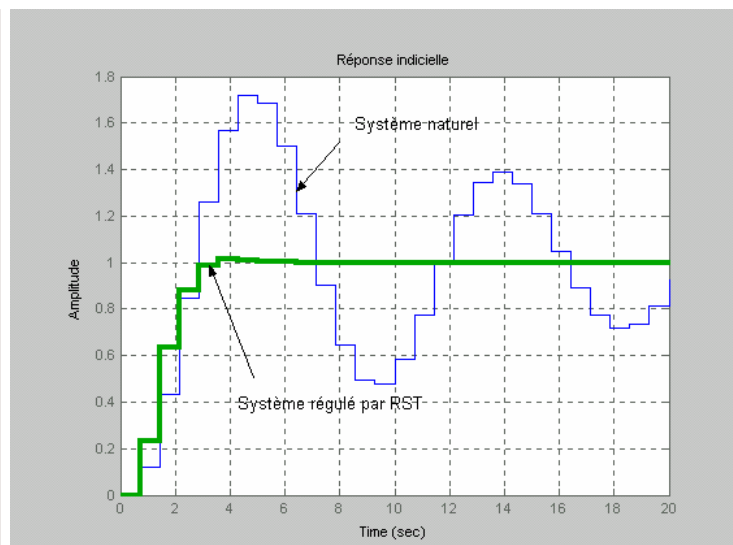
$$m_n = -0,449m_{n-1} + 1,98y_{cn} - 4,086y_n + 3,563y_{n-1}$$

```
>> Nbfm=0.2336*[1 0.967];
>> Dbfm=[1 -0.7417 0.2019];
>> FTBF=tf(Nbfm,Dbfm,1/1.4)
```

Transfer function:  
0.2336 z + 0.2259

-----  
 $z^2 - 0.7417 z + 0.2019$   
Sampling time: 0.71429

```
>> step(G, FTBF,20)
```



On remarque l'effet spectaculaire de la boucle de commande sur la réponse indicielle du

système ainsi corrigé.

### 11.2.8. EXEMPLE N°2

Soit un processus à réguler de transmittance  $P(p) = \frac{4}{p+2}$ .

La période d'échantillonnage retenue étant  $T = 0,025$  s, déterminons  $G(z)$ .

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[ \frac{4}{p(p+2)} \right]$$

```
>> Pdp=tf([4],[1 2]);
Transfer function:
4
-----
s + 2
>> Gdz=c2d(Pdp,0.025)
Transfer function:
0.09754
-----
z - 0.9512
Sampling time: 0.025
```

On désire améliorer la dynamique du processus à régler. On spécifiera de la manière suivante l'amélioration des performances dynamiques :

« On désire que le régime transitoire dû au pôle réel s'atténue d'un facteur  $\alpha$  en  $\beta$  périodes d'échantillonnage ». Ainsi le pôle réel doit être égal à :

$$z_P = e^{-\frac{\ln \alpha}{\beta}}$$

Ici on choisit  $\alpha = 20$  et  $\beta = 5$ . On trouve  $z_P = e^{-\frac{\ln 20}{5}} = 0,55$

Choisissons le modèle à poursuivre  $FTBF_m = \frac{Ng^-(z) \frac{P(1)}{Ng^-(1)}}{z^a P(z)} = \frac{0,45}{z - 0,55}$ .

Appliquons la méthode :

Etape	Actions	Résultats
Etape 1	Vérifier que $\ Dbf_m\  - \ Nbf_m\  \geq \ Dg\  - \ Ng\ $	Vérifié puisque $(1-0) = (1-0)$
Etape 2	Factoriser $Ng(z) = Ng^+ Ng^-$ ( $Ng^+$ monique).	$Ng^+ = 1$ $Ng^- = 0,09754$
Etape 3	Déterminer $Nbf'_m$ à partir de $Nbf_m = Ng^- Nbf'_m$	$Nbf'_m = \frac{Nbf_m}{Ng^-} = \frac{0,45}{0,0975} = 4,615$

Etape 4	Déterminer le nombre $j$ d'intégrations à rajouter	$j = 0$
Etape 5	$\ K\  \geq 2\ Dg\  - \ Dbf_m\  - \ Ng^+\  + j - 1$ $\ R_1\  = \ Dbf_m\  + \ K\  - \ Dg\  - j$ $\ S\  = \ Dg\  + j - 1$	$\ K\  \geq 2 - 1 - 0 + 0 - 1 = 0$ $\ R_1\  = 1 + 0 - 1 - 0 = 0$ $\ S\  = 1 + 0 - 1 = 0$ $K(z) = 1 ; R(z) = 1 ; S(z) = s_0$
Etape 6	Résoudre : $Dbf_m(z)K(z) = Dg(z)(z-1)^j R_1(z) + Ng^-(z)S(z)$	$(z - 0,55).1 = (z - 0,95).1 + 0,975 s_0$ $\Rightarrow s_0 = 4,1$
Etape 7	$R(z) = (z-1)^j Ng^+(z)R_1(z) + Ng^+(z)Ng^-(z)S(z)$ et $T(z) = Nbf_m'(z)K(z)$	$R(z) = 1$ et $T(z) = 4,615$

Simulons ce régulateur avec SIMULINK.

Sur ce schéma nous avons représenté le processus en boucle avec le régulateur RST et le processus en boucle ouverte. Dans les deux cas nous excitons le dispositif par une perturbation injectée en entrée du processus.

On observe, sur les courbes enregistrées, l'évolution des performances dynamiques. C'est ainsi que le temps de réponse est très inférieur (amélioration dans le rapport 10 approximativement 50 ms au lieu de 500 ms) et la précision statique est largement améliorée (dans le rapport de 9 environ).

