

Chapitre 5

Stabilité des systèmes linéaires continus

5.1. Condition de stabilité

5.2. Notion de mode

5.2.1. Différents cas

5.2.2. Modes dominants

5.3. Critère de Routh-Hurwitz

5.3.1. Énoncé du critère

5.3.2. Cas particulier

5.3.3. Application aux systèmes bouclés

5.3.4. Insuffisance du critère de Routh-Hurwitz

5.4. Utilisation de Matlab

5.4.1. Application n°1

5.4.2. Application n° 2

5.1. CONDITION DE STABILITE

Cette question est au centre des préoccupations de l'automaticien chargé de réaliser la synthèse d'un système de commande. Beaucoup de processus sont naturellement instables. Par la réalisation d'une boucle de commande l'automaticien cherchera à les stabiliser.

On parlera de stabilité absolue et de stabilité relative. Cette dernière notion est importante. En effet, plus un système est stable plus il est difficile à manœuvrer. C'est notamment le cas des avions : un avion de combat dont on privilégiera la capacité de manœuvre sera moins stable qu'un avion de la gamme commerciale.

On dit qu'un système est stable si écarté de sa position d'équilibre il tend à y revenir. En d'autres termes, un système est réputé stable si, après avoir été soumis à une perturbation de durée finie, il revient à son état initial. Plus précisément nous retiendrons qu'un système est stable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

$$\text{Un système linéaire est stable si } \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

Soit un système de transmittance $H(p)$ telle que :

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(p) = \frac{N(p)}{(p - p_{P_1})(p - p_{P_2}) \dots (p - p_{P_d})} = \frac{A_1}{(p - p_{P_1})} + \frac{A_2}{(p - p_{P_2})} + \dots + \frac{A_d}{(p - p_{P_d})}$$

$$s(t) = \left(A_1 e^{p_{P_1} t} + A_2 e^{p_{P_2} t} + \dots + A_d e^{p_{P_d} t} \right) u(t) \quad \text{avec} \quad p_{P_i} = \sigma_i + j\omega_i$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ si toutes les exponentielles $e^{p_{P_i} t}$ admettent un module tendant vers zéro lorsque le temps t devient infiniment grand.

$$\text{Or } \left| e^{p_{P_i} t} \right| = e^{\sigma_i t}.$$

Ainsi un système linéaire est stable si :

$$\forall i \in [1, d] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sigma_i t} = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, d] \quad \sigma_i < 0$$

Un système linéaire est strictement stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative

Les pôles de la transmittance $H(p)$ sont les racines de son polynôme dénominateur $D(p)$. Ce polynôme correspond à l'équation caractéristique du système linéaire. Cette équation décrit le comportement du régime libre (solution de l'équation différentielle sans second membre) et du régime transitoire (régime forcé = régime permanent + régime transitoire).

- **Remarque 5.1. :**

Si la transmittance $H(p)$ possède un pôle unique à l'origine (un intégrateur) on dit que le système est **marginalement stable**.

- **Remarque 5.2. :**

Dire qu'un système est stable si ses pôles sont à partie réelle < 0 cela signifie que le système est stable si **ses pôles appartiennent à la partie gauche du plan complexe**.

5.2. NOTION DE MODE

5.2.1. DIFFERENTS CAS

Un pôle réel ou une paire de pôles complexes conjugués de $H(p)$ constituent un mode du système admettant la fonction de transfert $H(p)$. Différents cas sont à envisager :

un pôle réel tel que $\sigma_i < 0$	Mode aperiodique amorti
un pôle réel tel que $\sigma_i > 0$	Mode aperiodique divergent
un pôle réel tel que $\sigma_i = 0$	Intégrateur
une paire de pôle $P_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ avec $\sigma_i < 0$	Mode periodique amorti
une paire de pôle $P_i = \pm j\omega_i$	Mode periodique non amorti (oscillations)
une paire de pôle $P_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ avec $\sigma_i > 0$	Mode periodique divergent

La réponse impulsionnelle, correspondant à chacun de ces cas, est illustrée en annexe A.5.1.

5.2.2. MODES DOMINANTS

On conçoit aisément que **le comportement du système soit plus sensible aux pôles situés près de l'axe imaginaire** qu'à tout autre pôle plus éloigné de cet axe puisque le régime transitoire associé à ces pôles « s'éteint » plus lentement.

Considérons le système de transmittance $H(p)$ et de gain statique unité tel que :

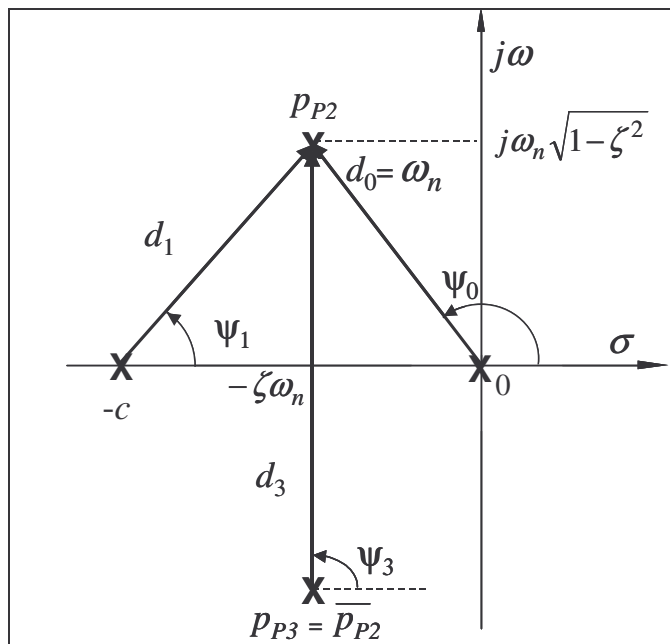
$$H(p) = \frac{c\omega_n^2}{(p+c)(p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)} \quad \text{avec} \quad \zeta < 1$$

Sa réponse indicielle est donnée par :

$$Q(p) = \frac{c\omega_n^2}{p(p+c)(p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p+c} + \frac{A_2}{p-p_{P_2}} + \frac{A_3}{p-p_{P_3}}$$

On trouve $A_0 = 1$ et $A_1 = \frac{-\omega_n^2}{c^2 - 2c\zeta\omega_n + \omega_n^2}$

Calculons le résidu A_2 par la méthode graphique.



$$A_2 = \left[k \frac{c\omega_n^2}{p_{P_2}(p_{P_2} - p_{P_1})(p_{P_2} - p_{P_3})} \right]$$

$$A_2 = \frac{k\rho_1}{d_0 d_1 d_3} e^{j(\phi_1 - \psi_0 - \psi_1 - \psi_3)}$$

$$A_2 = \frac{c}{2d_1\sqrt{1-\zeta^2}} e^{j(-\psi_0 - \psi_1 - 90^\circ)}$$

La réponse indicielle recherchée est donc égale à :

$$s(t) = \left(1 - \frac{\omega_n^2 e^{-ct}}{c^2 - 2\zeta\omega_n c + \omega_n^2} + \frac{ce^{-\zeta\omega_n t}}{d_1\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \psi_0 - \psi_1) \right) u(t)$$

Cette expression rend compte du rôle joué par le pôle $(-c)$ vis à vis du mode complexe.

- Si $(-c)$ est très à gauche des pôles complexes (i.e. $c \gg \zeta\omega_n$) alors $d_1 \cong c$ et $\psi_1 \cong 0$. Ainsi :

$$s(t) = \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \psi) \right) u(t)$$

C'est la réponse indicielle de $H(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$

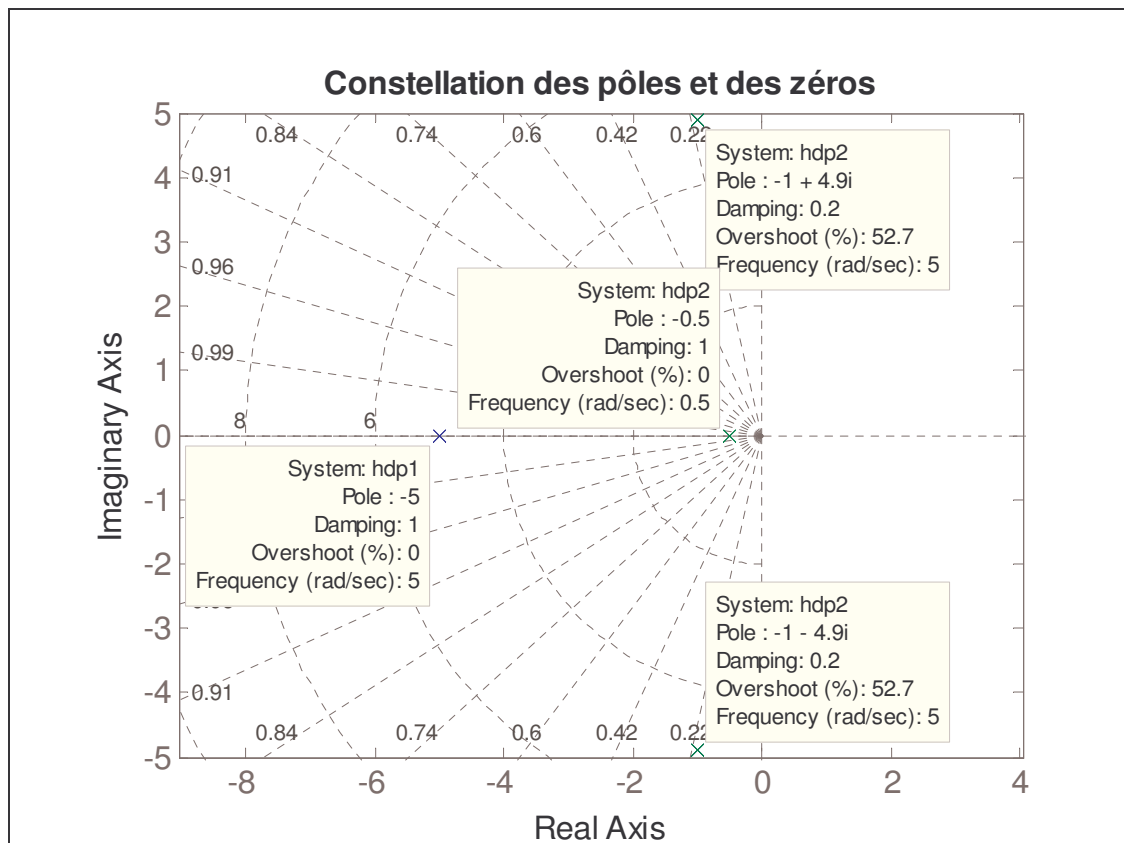
Le pôle $(-c)$ est négligeable vis à vis du mode complexe qui est le mode dominant du système (en pratique cette hypothèse est vérifiée si $c > 4\zeta\omega$).

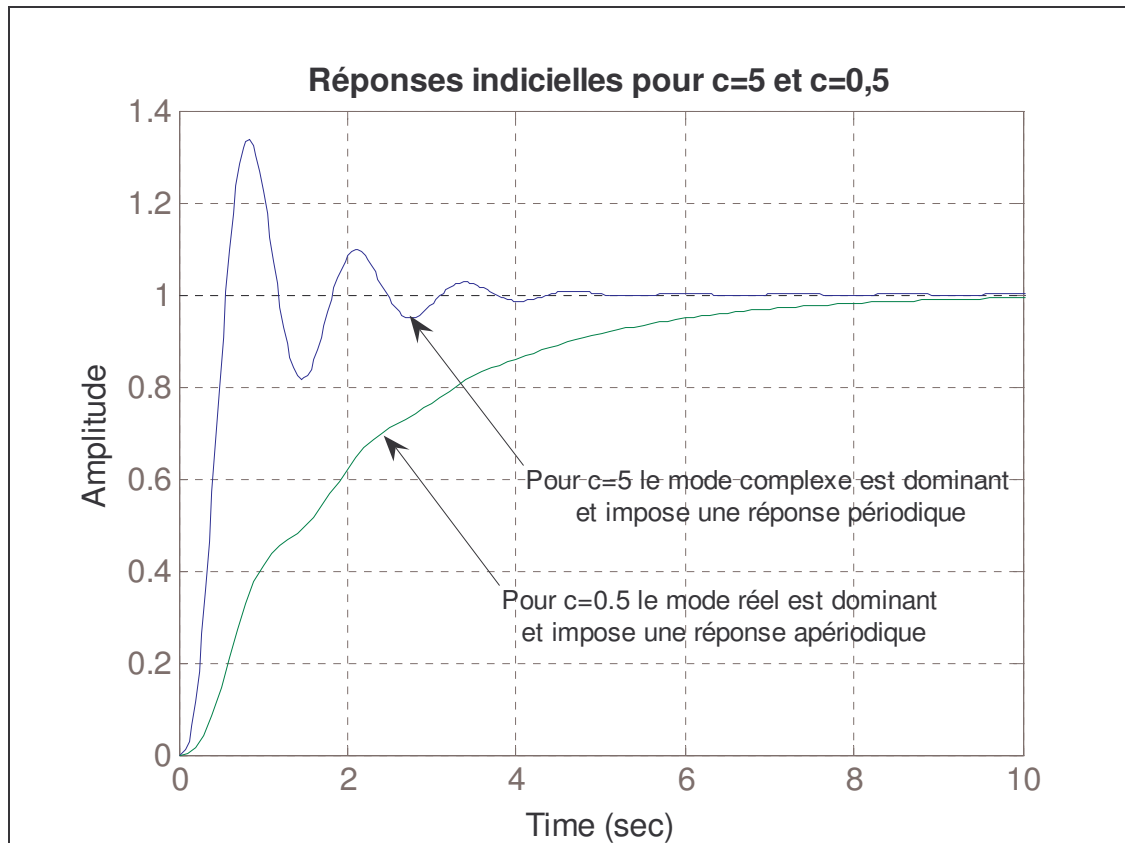
- Si (c) diminue $(-c)$ se rapproche des pôles complexes et son effet se manifeste sur la réponse indicielle (moindre dépassement).
- Si $c \ll \zeta\omega_n$ le système se comporte comme un système du premier ordre de pôle $p = -c$. Ce mode est dit dominant.

Illustrons ces résultats sur la transmittance $H(p) = \frac{25.c}{(p+c)(p^2+2p+25)}$ pour 2 valeurs de la constante « c » (5 et 0,5).

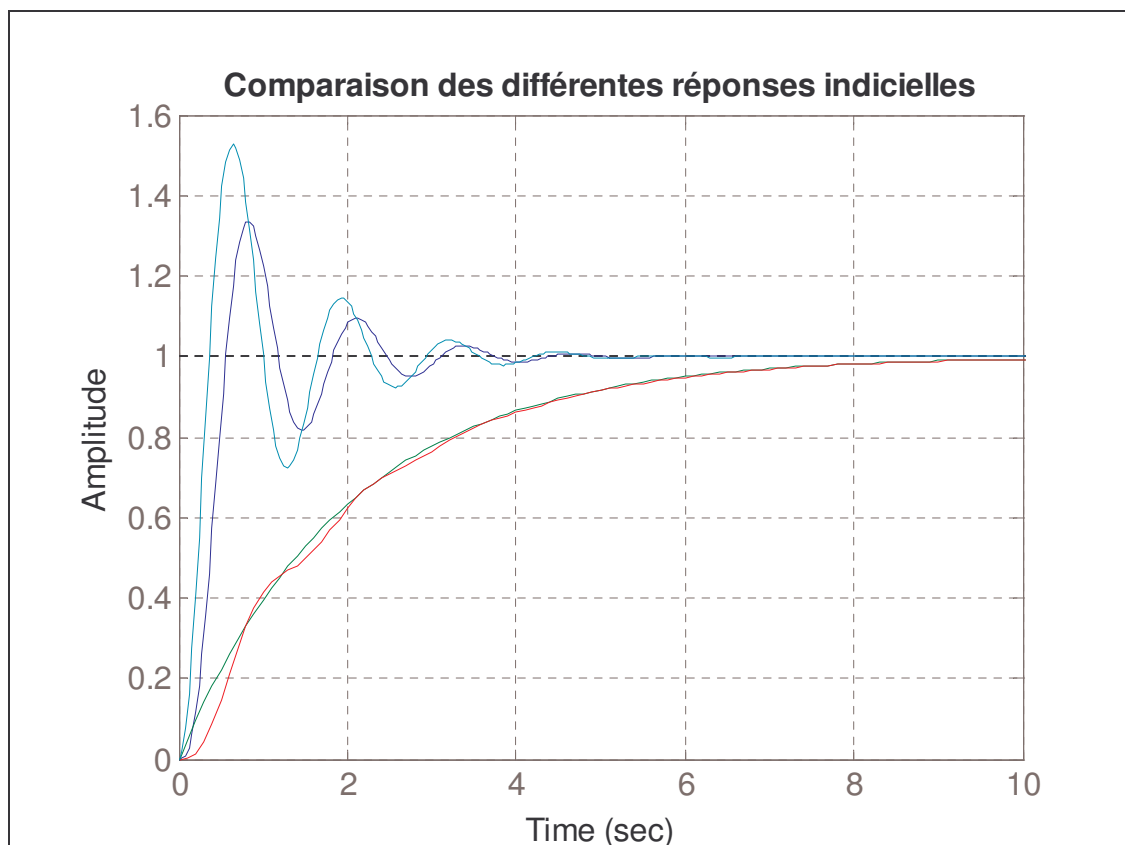
Noter que dans les 2 cas le gain statique de $H(p)$ est égal à 1.

```
%
% Script Chap5_1.m
% STABILITE DES FONCTIONS DE TRANSFERT
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 20 mai 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
num1=125;
den1=conv([1 5],[1 2 25]);
num2=12.5;
den2=conv([1 0.5],[1 2 25]);
hdp1=tf(num1,den1);
hdp2=tf(num2,den2);
% Carte des pôles et des zéros
figure(1);pzmap(hdp1,hdp2);grid
title('Constellation des pôles et des zéros')
axis equal
% Réponse indicielle
figure(2);step(hdp1,hdp2,10);grid
title('Réponses indicielles pour c=5 et c=0,5')
%
```





Ainsi pour $c = 5$, $H(p) \approx \frac{25}{p^2 + 2p + 25}$ alors que pour $c = 0,5$, $H(p) \approx \frac{1}{1 + 2p}$



On obtient ces 4 courbes à partir du programme suivant :

```
%
% Vérifions ces résultats
Hdp1=tf([1],[2 1]);
Hdp2=tf([25],[1 2 25]);
figure(3);step(hdp1,Hdp1,hdp2,Hdp2,10);grid
title('Comparaison des différentes réponses indicielles')
%
```

5.3. CRITERE DE ROUTH-HURWITZ

5.3.1. ENONCE DU CRITERE

Nous avons montré qu'une *fonction de transfert* $H(p)$ est stable si les racines de son *polynôme dénominateur* $D(p)$ sont à *partie réelle négative*. Si l'on ne dispose pas d'outils adaptés, le calcul des racines d'un polynôme de degré élevé n'est pas toujours chose facile. Aussi la stabilité peut-elle être étudiée à partir d'un critère algébrique établi par indépendamment par ROUTH et HURWITZ vers la fin du 19^{ième} siècle.. Nous indiquerons la méthode sans en justifier les mécanismes.

Ce critère repose sur l'examen des racines de l'équation caractéristique du système c'est à dire sur celles du dénominateur $D(p)$ de sa fonction de transfert.

Soit $D(p) = (b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \dots + b_1 p + b_0)$

- La première condition à vérifier par $D(p)$ est que tous les coefficients b_i soient différents de zéro et de même signe (positif).
- La seconde condition exige que tous les coefficients de première colonne de la table de ROUTH soient de même signe (positif). Sinon le nombre de changements de signe indique le nombre de racines à partie réelle positive.
- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, il existe des racines imaginaires et le système est juste oscillant.

La table de ROUTH est construite de la manière suivante.

p^d	b_d	b_{d-2}	b_{d-4}	...
p^{d-1}	b_{d-1}	b_{d-3}	b_{d-5}	...
p^{d-2}	$c_1 = \frac{b_{d-1}b_{d-2} - b_d b_{d-3}}{b_{d-1}}$	$c_2 = \frac{b_{d-1}b_{d-4} - b_d b_{d-5}}{b_{d-1}}$	$c_3 = \frac{b_{d-1}b_{d-6} - b_d b_{d-7}}{b_{d-1}}$...
p^{d-3}	$d_1 = \frac{c_1 b_{d-3} - c_2 b_{d-1}}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 b_{d-5} - c_3 b_{d-1}}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 b_{d-7} - c_4 b_{d-1}}{c_1}$...
...
p^1
p^0

L'algorithme de calcul des termes $A_{i,j}$ de la table est le suivant (i = indice de ligne, j = indice de colonne) :

$$A_{i,j} = \frac{A_{i-1,1}A_{i-2,j+1} - A_{i-2,1}A_{i-1,j+1}}{A_{i-1,1}}$$

Pour simplifier la formation de la table il est possible de multiplier ou de diviser par un nombre positif tous les coefficients d'une même ligne.

Exercice 5.1. : Etudier la stabilité de la transmittance admettant comme dénominateur :

$$D(p) = 3p^5 + 4p^4 + 3p^2 + 4p + 2$$

Cette fonction de transfert est instable car il manque le terme en p^3 .

Exercice 5.2. : Etudier la stabilité de la transmittance admettant comme dénominateur :

$$D(p) = 3p^5 + 4p^4 + p^3 - 3p^2 + 4p + 2$$

Cette fonction de transfert est instable car le terme en p^2 est négatif.

Exercice 5.3. : Etudier la stabilité de la transmittance admettant comme dénominateur :

$$D(p) = p^3 + 2p^2 - 4p + 20$$

$$D(p) = p^4 + p^3 + 2p^2 + 10p + 8$$

$$D(p) = p^5 + p^4 + 2p^3 + p + 5$$

$$D(p) = p^5 + p^4 + 2p^3 + p^2 + p + K$$

Exercice 5.4. : Etudier la stabilité de la transmittance admettant comme dénominateur :

$$D(p) = p^4 + mp^3 + 8p^2 + 6p + 10$$

p^4	1	8	10
p^3	m	6	0
p^2	$\frac{8m-6}{m}$	10	0
p^1	$6 - \frac{10m^2}{8m-6}$	0	0
p^0	10	0	0

Les conditions de stabilité sont :

$$\begin{array}{lcl}
 m > 0 & \Rightarrow & m > 0 \\
 \frac{8m-6}{m} > 0 & \Rightarrow & m > \frac{3}{4} \\
 6 - \frac{10m^2}{8m-6} > 0 & \Rightarrow & 0,93 < m < 3,87
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \text{Le système stable si :} \\
 \Rightarrow 0,93 < m < 3,87
 \end{array} \right.$$

5.3.2. CAS PARTICULIER

Il s'agit d'examiner le cas où tous les termes d'une ligne sont nuls. Cela signifie que $p = \pm j\omega$ est racine de $D(p)$. Le système est donc juste oscillant et l'on peut écrire :

$$D(p) = (p^2 + \omega^2)D_1(p)$$

Pour construire la table de ROUTH on applique la méthode suivante :

- à partir des coefficients de la dernière ligne non nulle on construit un polynôme dit auxiliaire P_{aux} admettant $p = \pm j\omega$ comme racine,
- on calcule la dérivée de P_{aux} par rapport à p et l'on remplit la ligne nulle par les coefficients de ce polynôme dérivé,
- on construit la suite de la table de ROUTH.

Illustrons le procédé sur un exemple.

Exercice 5.5. : Etudier la stabilité de la transmittance admettant comme dénominateur :

$$D(p) = p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18$$

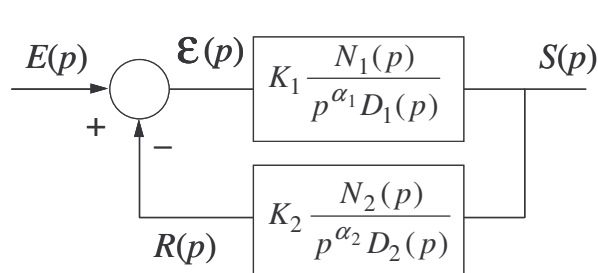
On construit la table de ROUTH.

p^4	1	11	18	
p^3	1(2)	9(18)	0	
p^2	1(2)	9(18)	0	<i>Dernière ligne non nulle</i> $\Rightarrow P_{aux} = p^2 + 9 \Rightarrow P'_{aux} = 2p$
p^1	0/2	0/0	0/0	<i>Ligne nulle</i> : on remplace par $P'_{aux} = 2p$
p^0	9	0	0	

$$D(p) = p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18 = (p^2 + 9)(p^2 + 2p + 2) \Rightarrow p = \pm 3j$$

Le système oscille à la pulsation $\omega_{os} = 3 \text{ rad/s}$

5.3.3. APPLICATION AUX SYSTEMES BOUCLES



$$FTBO(p) = K_1 K_2 \frac{G_1(p) G_2(p)}{p^{(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

avec $\lim_{p \rightarrow 0} G_{1,2}(p) = 1$

K_1 et K_2 = gains statiques

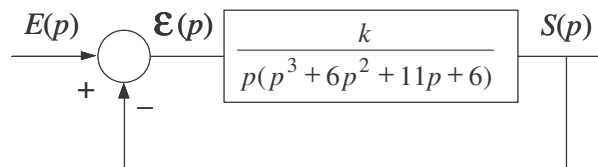
$\alpha_{1,2}$ = nombre d'intégrations

$$FTBF(p) = \frac{KG(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{K_1 \cdot p^{\alpha_2} N_1(p) D_2(p)}{p^{(\alpha_1 + \alpha_2)} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 \cdot N_1(p) N_2(p)}$$

Pour évaluer la stabilité de la FTBF on applique le critère de ROUTH à son polynôme dénominateur :

$$D(p) = p^{(\alpha_1 + \alpha_2)} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 \cdot N_1(p) N_2(p)$$

Exercice 5.6. : Etudier, selon le facteur de gain k , la stabilité du système suivant.



$$FTBF(p) = \frac{k}{p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p + k}$$

$$D(p) = p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p + k$$

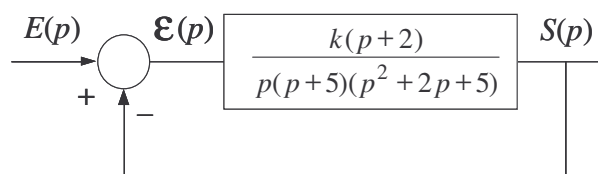
p^4	1	11	k
p^3	1(6)	1(6)	0
p^2	10	k	0
p^1	$1 - k/10$	0	0
p^0	k	0	0

Le système est stable pour $0 < k < 10$.

Remarque 5.3. :

- k est le facteur de gain de la FTBO le gain statique lui est égal $k/6$.
- le système est juste oscillant pour $k = 10 \Rightarrow P_{aux} = 10p^2 + 10 \Rightarrow \omega_{os} = 1 \text{ rad/s}$

Exercice 5.7. : Etudier, selon le facteur de gain k , la stabilité du système suivant.



$$FTBF(p) = \frac{k(p+2)}{p^4 + 7p^3 + 15p^2 + (25+k)p + 2k}$$

$$D(p) = p^4 + 7p^3 + 15p^2 + (25+k)p + 2k$$

p^4	1	15	$2k$
p^3	7	$25+k$	0
p^2	$80-k$	$14k$	0
p^1	A	0	0
p^0	$14k$	0	0

$80 - k > 0$	\Rightarrow	$k < 80$
$A = 25 + k - \frac{98k}{80 - k} > 0$	\Rightarrow	$-71,1 < k < 28,1$
$k > 0$	\Rightarrow	$k > 0$

Système stable si :

$$\Rightarrow 0 < k < 28,1$$

Remarque 5.4. :

- k est le facteur de gain de la FTBO ; le gain statique est égal ($2k/25$).
- le système est juste oscillant pour :

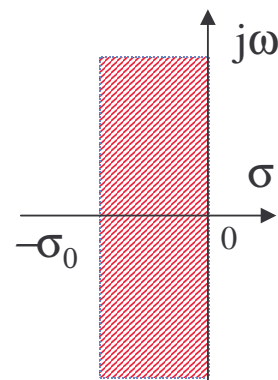
$$k = k_{os} = 28,1 \Rightarrow P_{aux} = 51,9p^2 + 393,4 \Rightarrow \omega_{os} = 2,75 \text{ rad/s}$$

5.3.4. INSUFFISANCE DU CRITERE DE ROUTH-HURWITZ

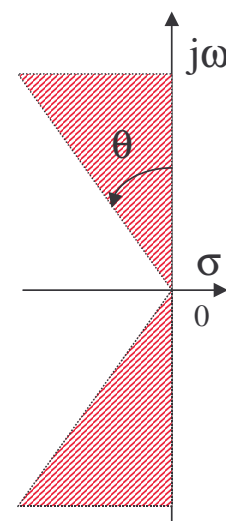
Le critère répond à la question : le système est-il stable ? Certes cette réponse est fondamentale pour l'automaticien, mais elle reste insuffisante car elle ne précise pas **le degré de stabilité du système** c'est à dire sa **stabilité relative**. Il est clair que seule la position de ses pôles dans le plan complexe donne accès à l'information recherchée.

On exige d'un système de commande que son **régime transitoire soit rapide et bien amorti**. Ainsi en pratique on est amené à interdire aux pôles de la fonction de transfert non seulement le demi-plan droit mais encore une zone plus vaste qui se définit de la manière suivante :

Pour éviter une réponse transitoire trop lente on interdit une région du plan complexe limitée par une parallèle à l'axe imaginaire. On s'impose ainsi une marge de stabilité absolue de telle sorte que tous les modes s'éteignent plus rapidement que $e^{-\sigma_0 t}$.



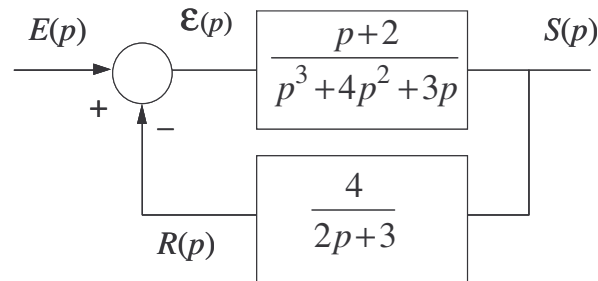
Pour assurer un régime transitoire bien amorti on interdit une zone du plan limitée par deux droites passant par l'origine. En effet nous avons montré que pour un système du second ordre l'angle θ représente le coefficient d'amortissement puisque $\zeta = \sin \theta$. Cette limitation constitue une marge de stabilité relative.



5.4. UTILISATION DE MATLAB

5.4.1. APPLICATION N°1

Considérons le système asservi suivant :



```
%
% Script Chap5_2.m
% STABILITE DES FONCTIONS DE TRANSFERT
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 20 mai 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
```

Calculons la FTBO de cette boucle de commande :

$$FTBO(p) = \frac{nbo(p)}{dbo(p)} = \frac{num1(p).num2(p)}{den1(p).den2(p)}$$

<pre>% % Description du système % FT de chaîne directe num1=[1 2]; den1=[1 4 3 0]; disp('FT de la chaîne directe') Hcd=tf(num1,den1) % FT de chaîne de retour num2=[4]; den2=[2 3]; disp('FT de la chaîne de retour') Hcr=tf(num2,den2)</pre>	<p>FT de la chaîne directe Transfer function: s + 2 ----- s^3 + 4 s^2 + 3 s</p> <p>FT de la chaîne de retour Transfer function: 4 ----- 2 s + 3</p>
<pre>% % Etude de la FTBO % Calcul à partir des polynômes nbo=conv(num1,num2); dbo=conv(den1,den2); disp('Expression de la FTBO') ftbo_tf=tf(nbo,dbo) % Ou encore ftbo_tf=Hcd*Hcr</pre>	<p>Expression de la FTBO</p> <p>Transfer function: 4 s + 8 ----- 2 s^4 + 11 s^3 + 18 s^2 + 9 s</p> <p>Transfer function: 4 s + 8 ----- 2 s^4 + 11 s^3 + 18 s^2 + 9 s</p>

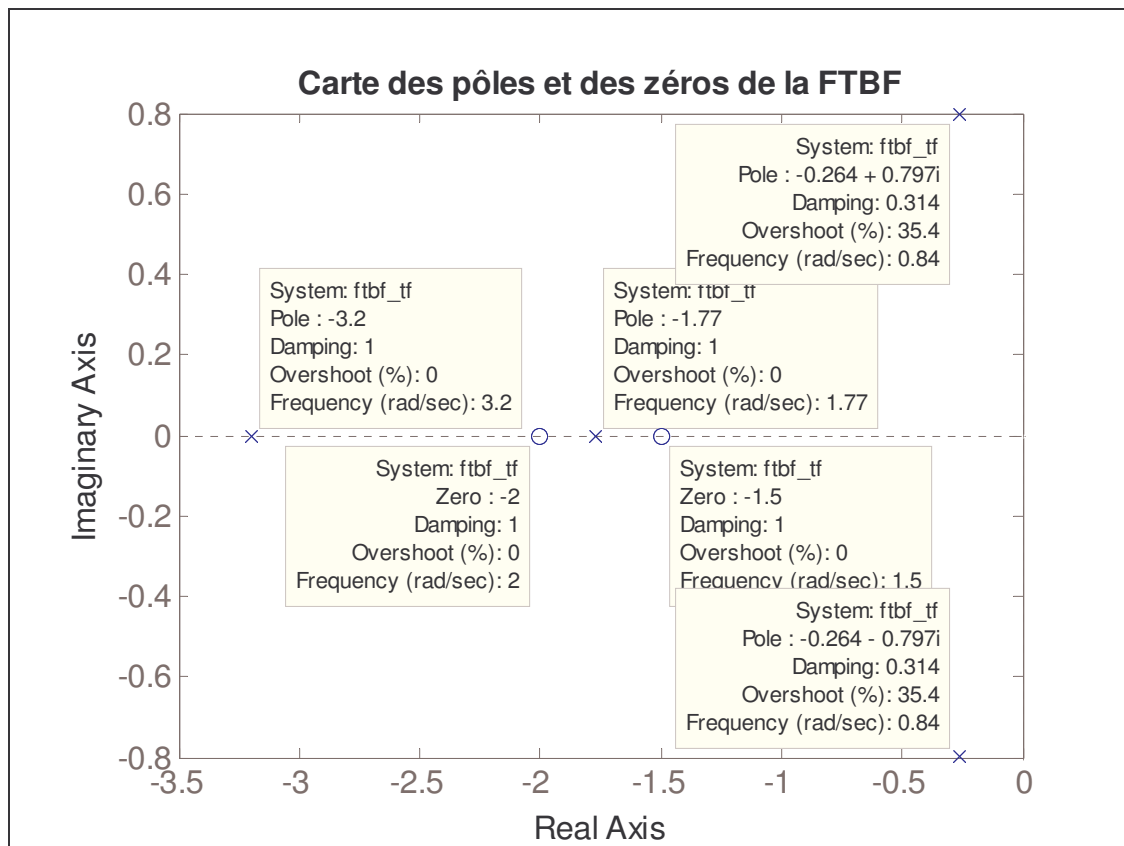
<pre> % Ecriture avec "p" et non "s" printsys(nbo, dbo, 'p') % Autre méthode disp('Calcul de nbo et de dbo') [nbo, dbo]=series(num1, den1, num2, den2) % Calcul des zéros et des pôles de la FTBO disp('Calcul des pôles et des zéros') pZbo=roots(nbo) pPbo=roots(dbo) % FT sous la forme de Evans disp('FTBO sous la forme de Evans') ftbo_zpk=zpk(ftbo_tf) </pre>	<p>num/den =</p> $\frac{4p + 8}{2p^4 + 11p^3 + 18p^2 + 9p}$ <p>Calcul de nbo et de dbo</p> <p>nbo =</p> $0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 8$ <p>dbo =</p> $2 \quad 11 \quad 18 \quad 9 \quad 0$ <p>Calcul des pôles et des zéros</p> <p>pZbo =</p> -2 <p>pPbo =</p> 0 -3.0000 -1.5000 -1.0000 <p>FTBO sous la forme de Evans</p> <p>Zero/pole/gain:</p> $2(s+2)$ <p>-----</p> $s(s+3)(s+1.5)(s+1)$
<pre> % Autre méthode de calcul [pZbo, pPbo, kbo]=tf2zp(nbo, dbo) </pre>	<p>pZbo =</p> -2 <p>pPbo =</p> 0 -3.0000 -1.5000 -1.0000 <p>kbo =</p> 2
<pre> % % Remarques % Obtention des polynômes à partir des vecteurs racines disp('Obtention d''un polynôme connaissant ses racines') nbo=poly(pZbo) dbo=poly(pPbo) % Autre méthode [nbo, dbo]=zp2tf(pZbo, pPbo, kbo) % </pre>	<p>Obtention d'un polynôme connaissant ses racines</p> <p>nbo =</p> $1 \quad 2$ <p>dbo =</p> $1.0000 \quad 5.5000 \quad 9.0000 \quad 4.5000 \quad 0$ <p>nbo =</p> $0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4$ <p>dbo =</p> $1.0000 \quad 5.5000 \quad 9.0000 \quad 4.5000 \quad 0$

<pre> % % Calculons la FTBF % Sous la forme d'une fraction rationnelle disp('Calcul de la FTBF') ftbf_tf=feedback(Hcd,Hcr) [nbf,dbf]=feedback(num1,den1,num2,den2) % Calcul des zéros et des pôles de la FTBF [pZbf,pPbf,kbf]=tf2zp(nbf,dbf) % Forme de Evans de la FTBF disp('Forme de Evans de la FTBF') ftbf_zpk=zpk(ftbf_tf) disp('Gain statique de la FTBF') K=dcgain(ftbf_tf) %</pre>	<p>Calcul de la FTBF</p> <p>Transfer function:</p> $\frac{2s^2 + 7s + 6}{2s^4 + 11s^3 + 18s^2 + 13s + 8}$ <hr/> <p>nbf =</p> <p>0 0 2 7 6</p> <p>dbf =</p> <p>2 11 18 13 8</p> <p>pZbf =</p> <p>-2.0000 -1.5000</p> <p>pPbf =</p> <p>-3.2005 -1.7718 -0.2639 + 0.7974i -0.2639 - 0.7974i</p> <p>kbf =</p> <p>1</p> <p>Forme de Evans de la FTBF</p> <p>Zero/pole/gain:</p> $\frac{(s+2)(s+1.5)}{(s+3.2)(s+1.772)(s^2 + 0.5277s + 0.7054)}$ <hr/> <p>Gain statique de la FTBF</p> <p>K =</p> <p>0.7500</p>
<pre> % % Performances de la boucle fermée % Calculons la FT de l'erreur / entrée disp('FT de l''erreur') ft_erreur_tf=feedback(1,ftbo_tf) ft_erreur_zpk=zpk(ft_erreur_tf) %</pre>	<p>FT de l'erreur</p> <p>Transfer function:</p> $\frac{2s^4 + 11s^3 + 18s^2 + 9s}{2s^4 + 11s^3 + 18s^2 + 13s + 8}$ <hr/> <p>Zero/pole/gain:</p> $\frac{s(s+3)(s+1.5)(s+1)}{(s+3.2)(s+1.772)(s^2 + 0.5277s + 0.7054)}$ <hr/>
<pre> % % Carte de pôles et des zéros de la FTBF figure(1);pzmap(ftbf_tf) title('Carte des pôles et des zéros de la FTBF') % Réponse indicielle de la FTBF figure(2);step(ftbf_tf);grid title('Réponse indicielle de la FTBF') %</pre>	

```

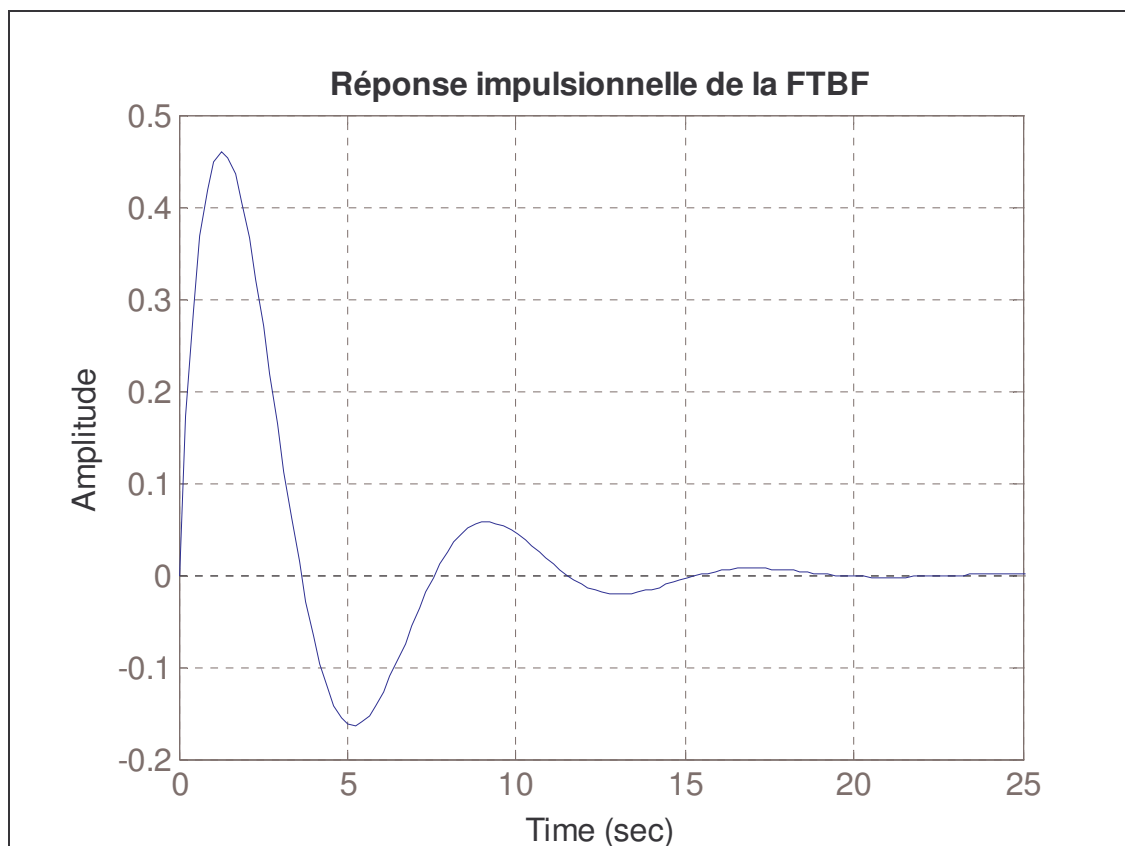
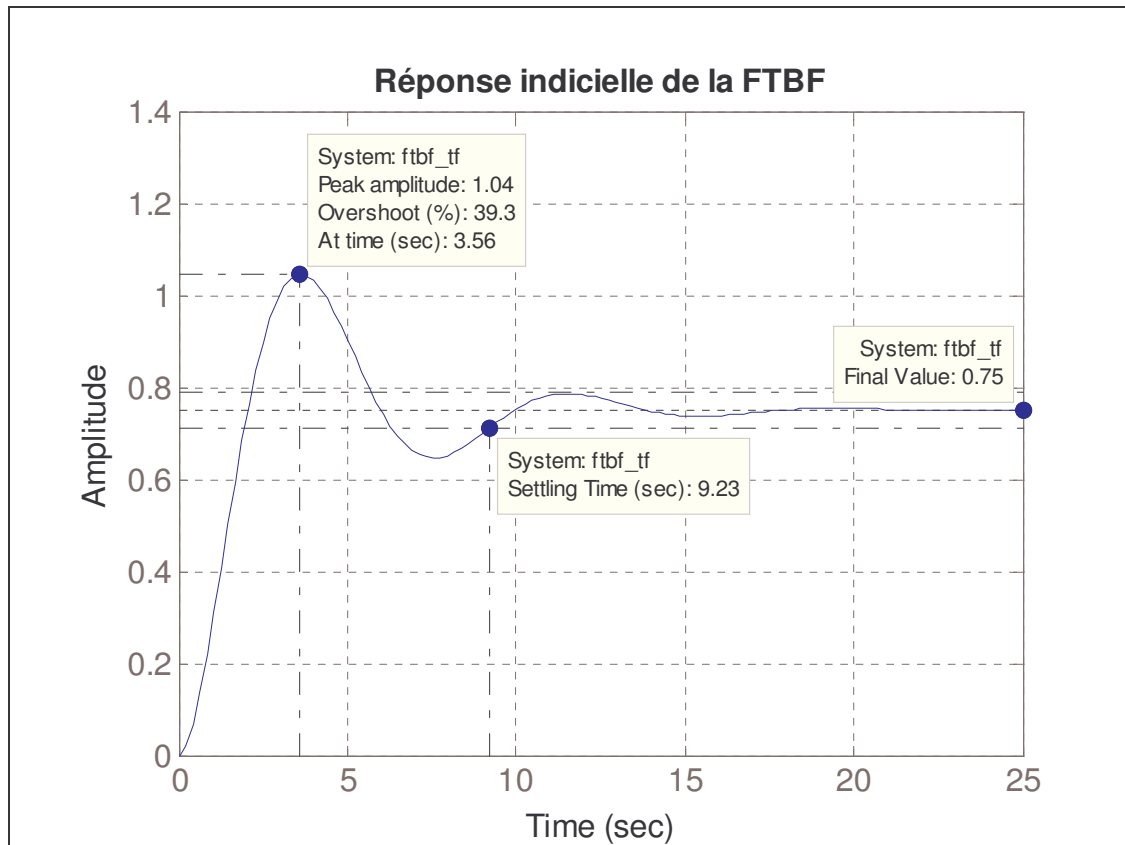
%
% Réponse indicielle de la FTBF
figure(3);step(ftbf_tf);grid
title('Réponse indicielle de la FTBF')
% Réponse impulsionnelle de l'erreur
figure(4);impulse(ft_erreur_tf);grid
title('Réponse indicielle de l''erreur')
%

```

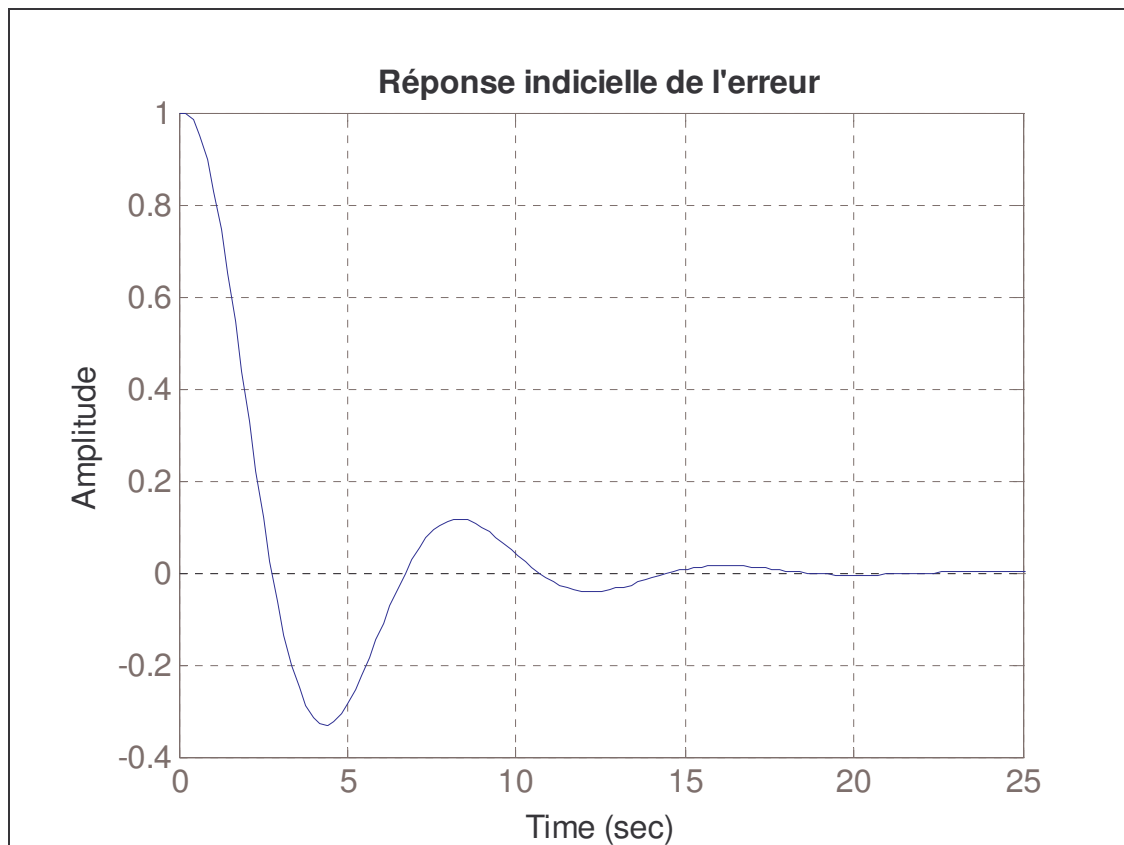


Comme on peut l'observer sur la courbe qui suit la réponse indicielle est de nature oscillante. Les caractéristiques de cette réponse sont directement lues sur le courbe à partir du « Property Editor » obtenu par un clic droit de la souris sur la figure.

- Le temps de pic (*Peak time*) est de 3,56 seconde.
- Le dépassement (*Overshoot*) est de 39,3 %.
- Le temps de réponse (*Settling time*) à 5% est de 9,23 seconde.
- La valeur en régime permanent (*Final value*) est égale à 0,75.
- Le gain statique est donc de 0,75.



Le système est stable.



L'erreur s'annule en régime permanent.

Les caractéristiques (pulsation propre non amortie et coefficient d'amortissement) des différents modes de la FTBF peuvent être obtenues de la façon suivante :

<pre>% % Mode dominant % Caractéristiques des modes de la FTBF damp (dbf)</pre>	Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
	-2.64e-001 + 7.97e-001i	3.14e-001	8.40e-001
	-2.64e-001 - 7.97e-001i	3.14e-001	8.40e-001
	-1.77e+000	1.00e+000	1.77e+000
	-3.20e+000	1.00e+000	3.20e+000

Sur la carte des pôles et des zéros il apparaît que le mode du second ordre est le mode dominant de la FTBF. Vérifions cela.

<pre>% % Caractéristiques des modes oscillants [wn, zeta]=damp (dbf)</pre>	<pre>wn = 0.8399 0.8399 1.7718 3.2005 zeta = 0.3142 0.3142 1.0000 1.0000</pre>
--	---


```
%
% Formons la transmittance du mode dominant
num_md=K*(wn(1)^2);
den_md=[1 2*zeta(1)*wn(1) wn(1)^2];
disp('FTBF approchée par le mode dominant')
ftbf_md=tf(num_md,den_md)
```

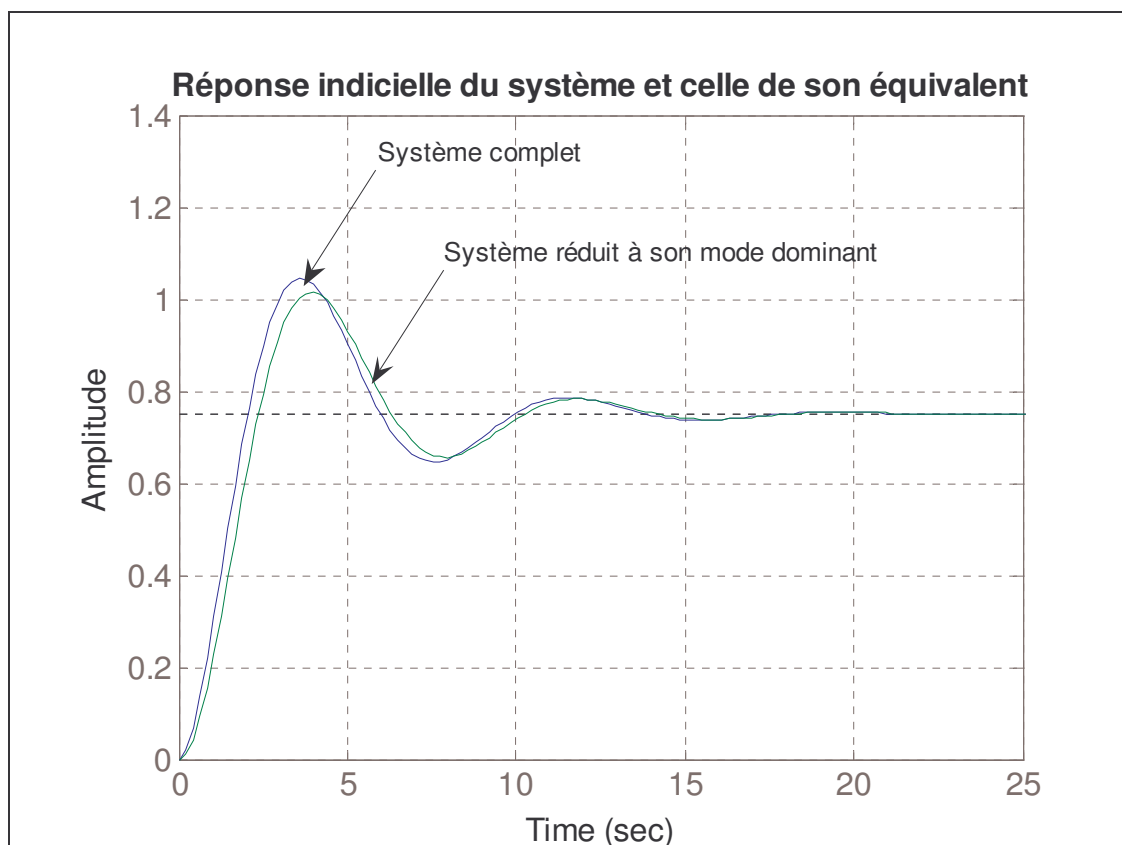
Transfer function:

0.529

 $s^2 + 0.5277 s + 0.7054$

Superposons la réponse indicielle du système complet avec celle du système réduit au mode dominant.

```
%
% Vérifions l'approximation
figure(5);step(ftbf_tf,ftbf_md);grid
title('Réponse indicielle du système et celle de son équivalent')
```



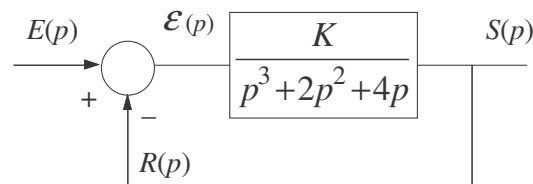
Nous vérifions ainsi que l'on peut assimiler le système complet à son mode dominant sans erreur majeure. Ce choix peut simplifier considérablement les travaux d'analyse ou de synthèse.

Ainsi :

$$FTBF(p) = \frac{2p^2 + 7p + 6}{2p^4 + 11p^3 + 18p^2 + 13p + 8} \cong \frac{0.529}{p^2 + 0.5277p + 0.7054} = \frac{0.75}{\frac{p^2}{0.7054} + 0.7481p + 1}$$

5.4.2. APPLICATION N° 2

Il s'agit d'étudier la stabilité en fonction du gain K de la boucle de commande représentée ci-après.



L'application du critère de ROUTH montre que cette boucle de commande est stable si $0 < K < 8$. Nous allons vérifier cela en calculant, pour différentes valeurs de K , les pôles de la $FTBF(p)$ et en traçant ses pôles dans le plan complexe.

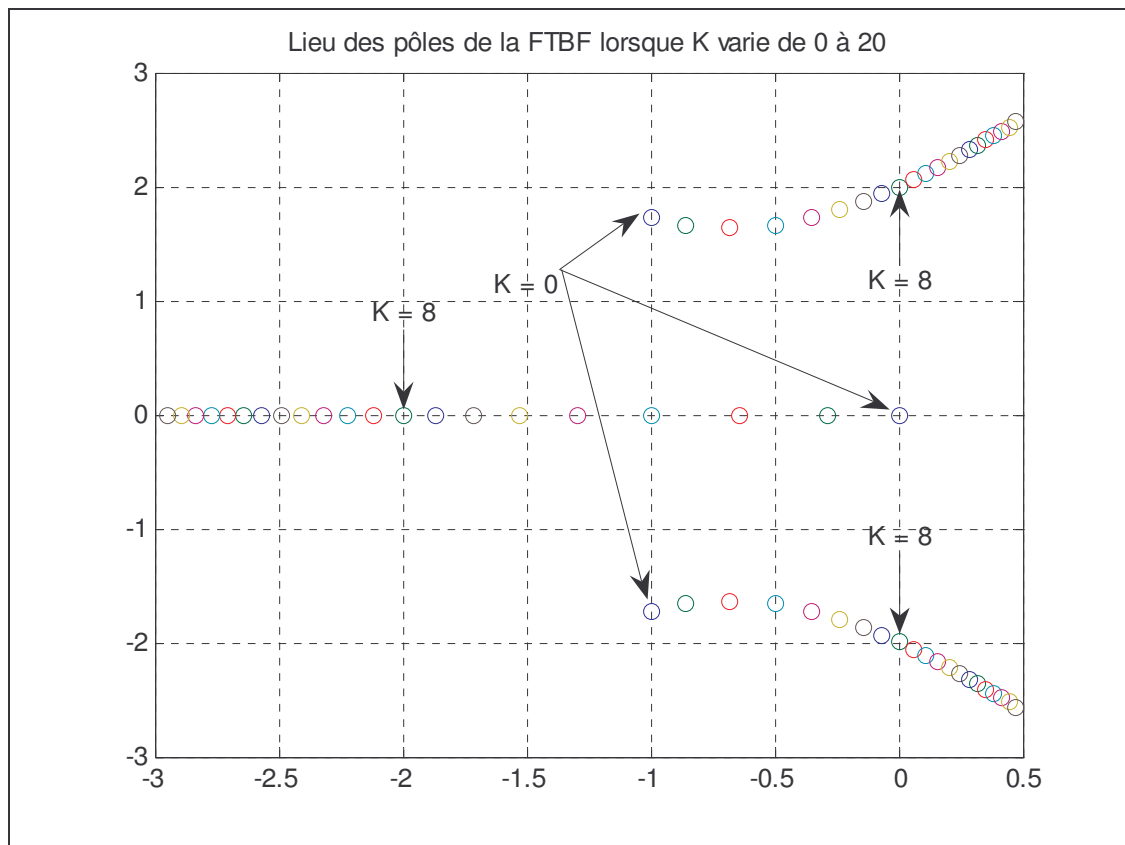
```
%
% Script Chap5_3.m
% STABILITE DES FONCTIONS DE TRANSFERT
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 21 mai 2005
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;

%
% On fait varier le gain K de 0 à 20.
% On crée un vecteur ligne K(i) à 21 composantes
K=[0:1:20];
for i=1:length(K);
    nbo=[K(i)];
    dbo=[1 2 4 0];
    ftbo=tf(nbo,dbo);
    ftbf=feedback(ftbo,1);
    [nbf,dbf]=tfdata(ftbf,'v');
    pole_bf(:,i)=roots(dbf);
end
% Traçons le lieu des racines du dénominateur de la FTBF
figure(1);plot(real(pole_bf),imag(pole_bf),'x')
title('Lieu des pôles de la FTBF lorsque K varie de 0 à 20')
%
```

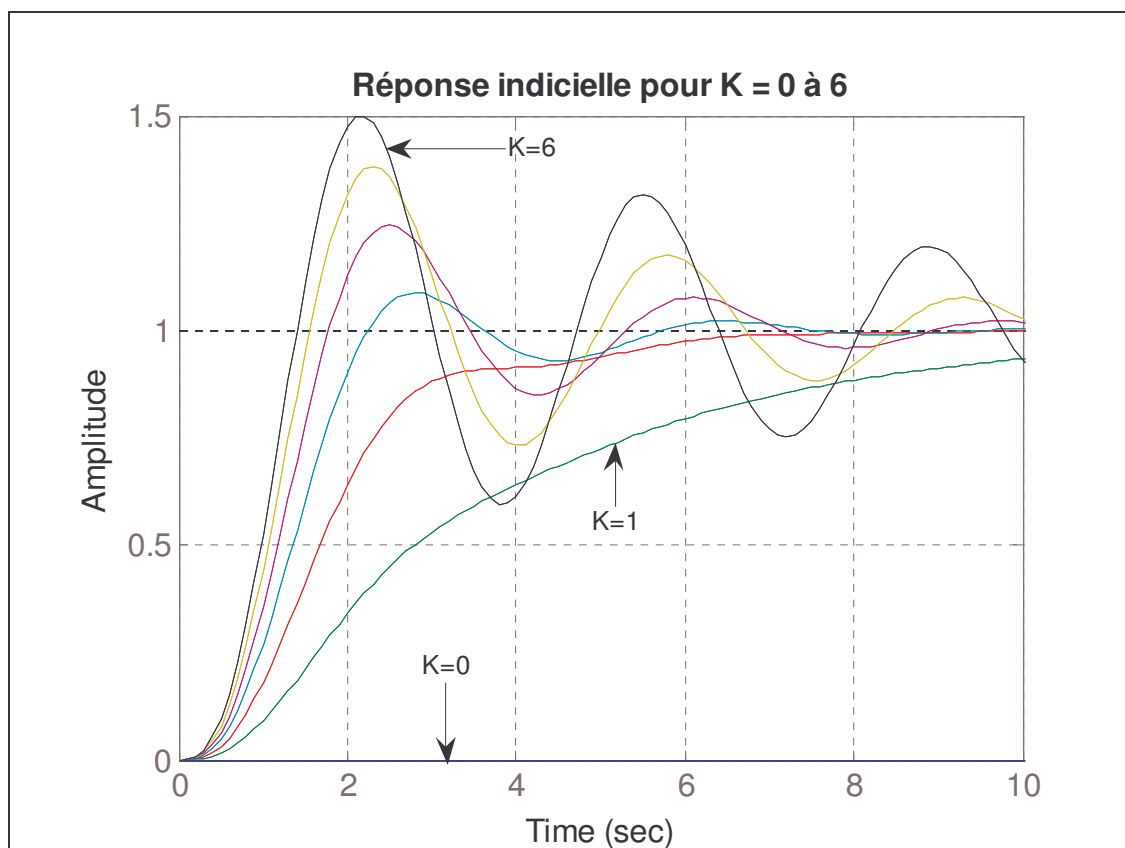
On observe que les 3 pôles de la FTBF se déplacent sur 3 branches.

- Pour $K < 8$ les pôles sont tous les 3 dans la partie gauche du plan complexe : le système est bien stable.
- Pour $K = 8$ on obtient une paire de pôles imaginaires purs : le système est juste oscillant à la pulsation de 2 rad/s.
- Pour $K > 8$, 2 pôles prennent place dans la partie droite du plan complexe : le système est instable.

Cette méthode d'analyse sera largement développée au chapitre 12.



Traçons la réponse indicielle lorsque le gain statique K de la FTBO varie de 0 à 20.



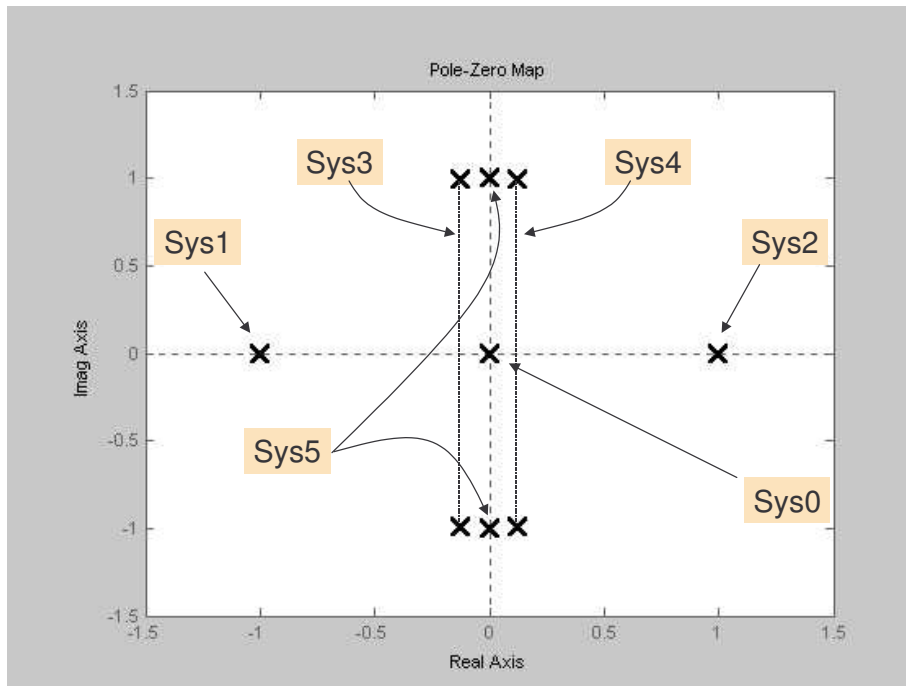
On obtient cette avec le script suivant :

```
%  
% Traçons la réponses indicielle pour K=0 à 6  
K=[0:1:6];  
for i=1:length(K);  
    nbo=[K(i)];  
    dbo= [1 2 4 0];  
    ftbo=tf(nbo,dbo);  
    ftbf=feedback(ftbo,1);  
    figure(2);step(ftbf,10);hold on;grid on  
end  
title('Réponse indicielle pour K = 0 à 6')  
%
```

ANNEXE A.5.1.

Position des pôles dans le plan complexe – Réponse impulsionnelle

On considère 6 fonctions de transfert (sys0 à sys5) dont les pôles sont représentés dans le plan complexe.



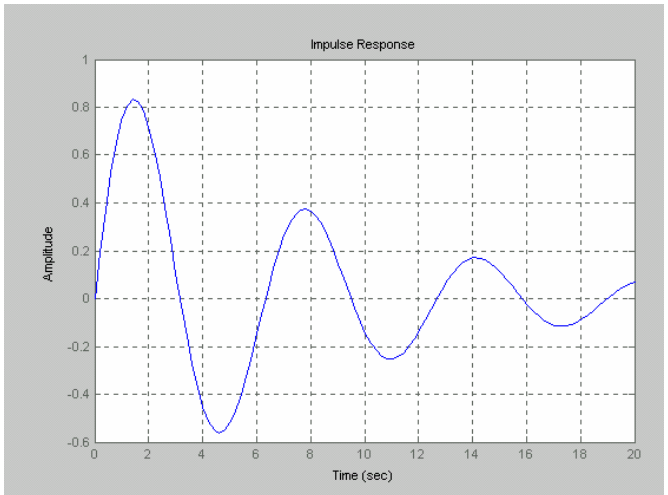
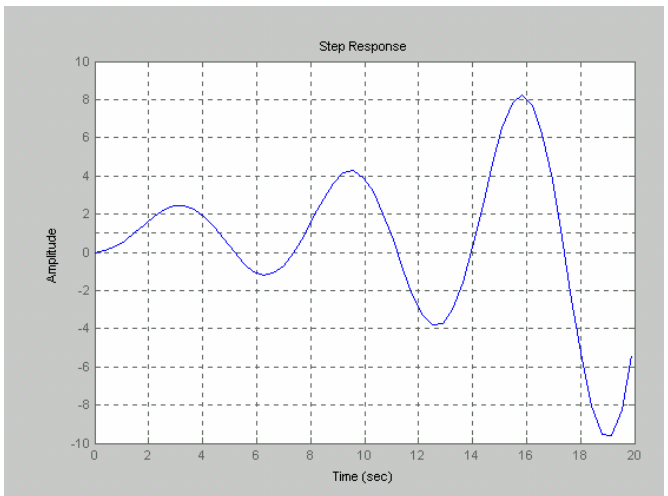
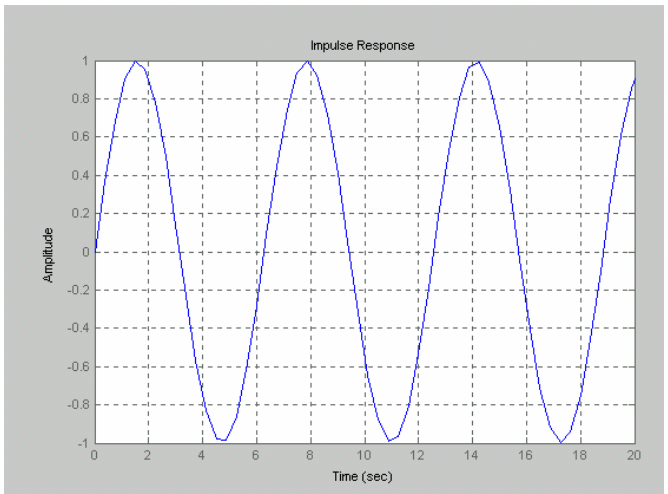
Enregistrons la réponse impulsionnelle de chaque fonction de transfert.

- Cas des pôles réels**

Transmittance	Réponse impulsionnelle	Conclusion
$sys1 = \frac{1}{p+1}$		Stable
$sys0 = \frac{1}{p}$		Stable à la marge
$sys2 = \frac{1}{p-1}$		Instable

-

- Cas des pôles complexes**

Transmittance	Réponse impulsionnelle	Conclusion
$\text{sys3} = \frac{1}{p^2 + 0,25p + 1}$		Stable
$\text{sys4} = \frac{1}{p^2 - 0,25p + 1}$		Instable
$\text{sys5} = \frac{1}{p^2 + 1}$		Juste oscillant