

Chapitre 7

Précision et régime transitoire des systèmes échantillonnés

7.1. Précision en régime permanent

- 7.1.1. Calcul de l'erreur en régime permanent vis à vis de l'entrée
- 7.1.2. Calcul des erreurs correspondant aux entrées canoniques
- 7.1.3. Tableau récapitulatif - Conclusions
- 7.1.4. Erreur en régime permanent vis à vis d'une perturbation

7.2. Mode dominant du second ordre

7.3. Réponse indicielle et régime transitoire

- 7.3.1. Réponse indicielle d'un système
- 7.3.2. Cas du système du second ordre
- 7.3.3. Application

7.1. PRECISION EN REGIME PERMANENT

On étudie la précision des systèmes asservis à commande numérique selon une démarche identique à celle utilisée afin d'évaluer la précision des systèmes asservis continus à commande analogique. Pour une entrée $e(t)$ donnée on calcule *l'erreur de la boucle de commande $\mathcal{E}(z)$ aux instants d'échantillonnage* et l'on applique le théorème de la valeur finale pour *déterminer l'erreur en régime permanent $\mathcal{E}(\infty)$* .

La méthode de calcul décrite ci-dessous ne permet pas de détecter les oscillations entre les instants d'échantillonnage (oscillations cachées). Pour connaître les signaux entre les instants d'échantillonnage on aura recours à l'emploi de la transformée en z modifiée ou à la simulation, cette dernière méthode doit être privilégiée dès lors qu'on dispose des outils nécessaires.

7.1.1. CALCUL DE L'ERREUR EN REGIME PERMANENT VIS A VIS DE L'ENTREE

La précision statique s'étudie pour des entrées canoniques :

Entrée	Appellation	Erreur
$e(t) = E_p \cdot u(t)$	Echelon de position	$\mathcal{E}_p(\infty)$
$e(t) = E_v \cdot t \cdot u(t)$	Echelon de vitesse	$\mathcal{E}_v(\infty)$
$e(t) = E_a \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$	Echelon d'accélération	$\mathcal{E}_a(\infty)$

Il ne faut pas confondre l'erreur dite de vitesse avec l'erreur faite sur la vitesse. Qu'il s'agisse de $\mathcal{E}_p(\infty)$, de $\mathcal{E}_v(\infty)$ ou de $\mathcal{E}_a(\infty)$, *l'erreur est toujours de même nature que le signal d'entrée et s'exprime avec la même unité.*

Considérons un asservissement classique à entrée unique $e(t)$.

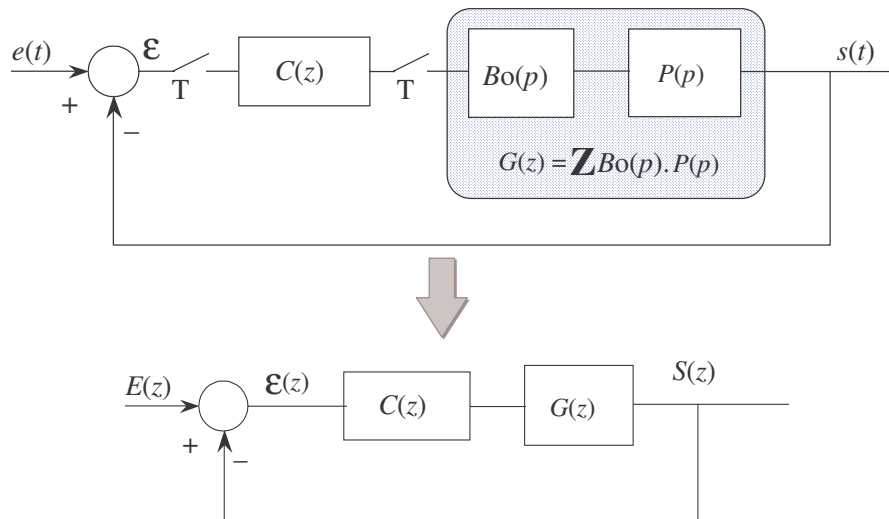


Figure 1 : Modèle numérique de la boucle de commande

Nous avons montré que l'erreur échantillonnée est donnée par $\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + FTBO(z)}$

Soit :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[\frac{E(z)}{1 + FTBO(z)} \right]$$

La forme générale de la $FTBO(z)$ est (Cf. § 5.4.2) :

$$FTBO(z) = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z)} = \frac{K}{(z-1)^\alpha} z^{-\mu} \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \quad \text{avec } \mu \in \mathbf{N} \text{ et } K = \text{gain statique}$$

Pour une entrée quelconque *l'erreur séquentielle (i.e. l'erreur aux instants d'échantillonnage)* en régime permanent est donnée par :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[\frac{E(z)(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K \frac{N_1(z)}{D_1(z)}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{E(z)(z-1)^{\alpha+1}}{(z-1)^\alpha + K} \right]$$

Si l'entrée de référence est un polynôme en t , nul pour $t < 0$, et tel que :

$$e(t) = e_0 + e_1 t + e_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + e_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{alors } \mathbf{Z}[e(t)] = E(z) = \frac{V(z)}{(z-1)^{n+1}} \text{ et}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{V(z)(z-1)^{\alpha-n}}{(z-1)^\alpha + K} \right]$$

7.1.2. CALCUL DES ERREURS CORRESPONDANT AUX ENTREES CANONIQUES

Le nombre d'intégration du système est donné par α . Ce paramètre définit *le type (ou la classe) du système*. L'erreur en régime permanent dépend de la nature du signal d'entrée du gain statique et du type du système.

a. Echelon de position $e(t) = E_0.u(t)$

$$e(t) = E_{P0}.u(t) \quad (n=0) \Rightarrow E(z) = E_{P0} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{E_{P0}(z-1)^\alpha}{(z-1)^\alpha + K} \right]$$

$\alpha =$	0	1	2
$\varepsilon_p(\infty) =$	$\frac{E_{P0}}{1+K}$	0	0

b. Echelon de vitesse $e(t) = E_{v0}.t.u(t)$

$$e(t) = E_{v0}.t.u(t) \quad (n=1) \Rightarrow E(z) = E_{v0} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{TE_{v0}(z-1)^{\alpha-1}}{(z-1)^\alpha + K} \right]$$

$\alpha =$	0	1	2
$\varepsilon_v(\infty) =$	∞	$\frac{TE_{v0}}{K}$	0

c. Echelon d'accélération $e(t) = E_{a0} \cdot \frac{t^2}{2}.u(t)$

$$e(t) = E_{a0} \cdot \frac{t^2}{2}.u(t) \quad (n=2) \Rightarrow E(z) = E_{a0} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\varepsilon_a(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T^2 E_{a0}(z-1)^{\alpha-2}}{(z-1)^\alpha + K} \right]$$

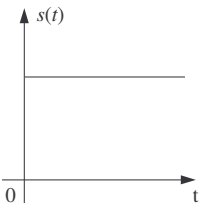
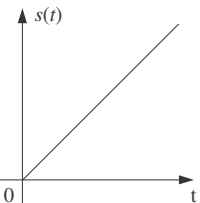
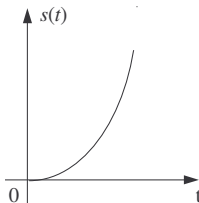
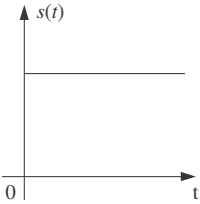
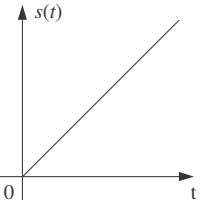
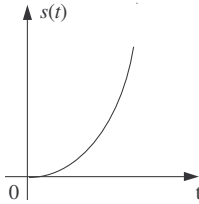
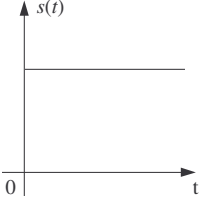
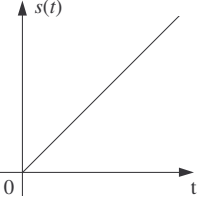
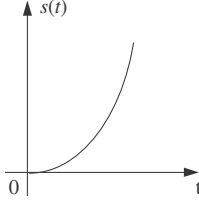
$\alpha =$	0	1	2
$\varepsilon_a(\infty) =$	∞	∞	$\frac{T^2 E_{a0}}{K}$

7.1.3. TABLEAU RECAPITULATIF - CONCLUSIONS

Récapitulons les résultats précédents dans le tableau ci-dessous.

$\alpha =$	0	1	2
$\varepsilon_p(\infty) =$	$\frac{E_{P0}}{1+K}$	0	0
$\varepsilon_v(\infty) =$	∞	$\frac{TE_{v0}}{K}$	0
$\varepsilon_a(\infty) =$	∞	∞	$\frac{T^2 E_{a0}}{K}$

On perçoit l'impact du **gain statique K** et du **nombre d'intégrations α** de la $FTBO(z)$ sur les performances, en précision statique, de la boucle d'asservissement.

Entrée \Rightarrow	$e(t) = u(t)$		$e(t) = t.u(t)$		$e(t) = \frac{t^2}{2}.u(t)$	
Type \Downarrow	$\varepsilon_P(\infty)$ \Downarrow	$s(t)$ \Downarrow	$\varepsilon_V(\infty)$ \Downarrow	$s(t)$ \Downarrow	$\varepsilon_a(\infty)$ \Downarrow	$s(t)$ \Downarrow
$\alpha = 0$	$\frac{1}{1+K}$		∞		∞	
$\alpha = 1$	0		$\frac{1}{K}$		∞	
$\alpha = 2$	0		0		$\frac{1}{K}$	

Examinons, à titre d'exemple, l'erreur statique de position $\varepsilon_P(\infty)$. Il apparaît que le gain statique de la boucle ouverte K joue un rôle essentiel. Plus ce gain est élevé, moins l'erreur statique est importante. Par ailleurs si la $FTBO(z)$ ne contient pas de pôle à l'origine, l'erreur statique est finie. Pour annuler cette erreur il convient d'introduire un correcteur dont la transmittance comporte une intégration. Ainsi de manière plus générale :

- l'erreur statique, lorsqu'elle est finie et non nulle, décroît lorsque le gain K de la boucle ouverte augmente,
- une erreur statique nulle suppose que la $FTBO(z)$ comporte un nombre d'intégration suffisant.

On ne perdra pas de vue qu'il s'agit, dans ce chapitre, de **calculs concernant l'erreur observée aux instants d'échantillonnage**.

7.1.4. ERREUR EN REGIME PERMANENT VIS A VIS D'UNE PERTURBATION

Considérons une **boucle de régulation** dans laquelle le processus est soumis à une perturbation $b(t)$. L'entrée $e(t)$, consigne de l'asservissement, est fixe. Lorsque la consigne est modifiée la boucle de commande fonctionne en mode asservissement et intervient pour que la sortie recopie l'entrée dans les meilleures conditions.

La perturbation $b(t)$ altère le signal de sortie $s(t)$. La boucle de régulation agit de telle sorte que le signal d'erreur soit annulé.

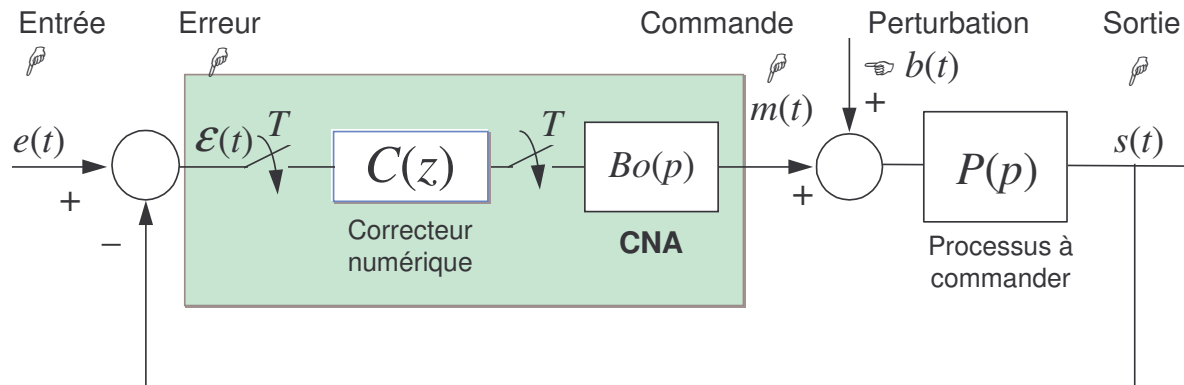


Figure 2 : Insertion des perturbations dans la boucle de commande

Le calcul de l'erreur $\mathcal{E}(z)$ totale est obtenu en appliquant le principe de superposition.

$$FTBO(z) = C(z) \cdot \overline{B_0 P}(z) = C(z)(1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[\frac{P(p)}{p} \right]$$

En posant $B(p) = \mathbf{L}[b(t)]$ il vient :

$$\mathcal{E}(z) = \frac{E(z)}{1 + FTBO(z)} - \frac{\overline{BP}(z)}{1 + FTBO(z)}$$

Si l'entrée est constante (consigne en mode régulation) le système est en régime permanent vis à vis de ce signal et **l'erreur due à la seule perturbation** est donnée par :

$$\mathcal{E}(z) = - \frac{\overline{BP}(z)}{1 + FTBO(z)}$$

La valeur de l'erreur en régime permanent se calcule selon la méthode développée au précédent paragraphe.

7.2. MODE DOMINANT DU SECOND ORDRE

Considérons un système du second ordre d'amortissement $\zeta < 1$, commandé à travers un bloqueur d'ordre zéro et calculons la transmittance $G(z)$ de cet ensemble.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[\frac{\omega_n^2}{p(p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[\frac{\omega_n^2}{p(p - p_{P1})(p - p_{P2})} \right]$$

avec :

$$p_{P1} = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \overline{p_{P2}}$$

Posons pour simplifier les expressions :	Dans ces conditions on écrira :
$\alpha = e^{-\zeta\omega_n T}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $b_0 = \alpha^2$ $b_1 = -2\alpha \cdot \cos(T\omega_p)$ $a_0 = \alpha^2 + \alpha \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(T\omega_p) - \cos(T\omega_p) \right]$ $a_1 = 1 - \alpha \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(T\omega_p) + \cos(T\omega_p) \right]$	$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0}$
$z_{P1} = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{jT\omega_p}$ $z_{P2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{-jT\omega_p} = \overline{z_{P1}}$ $z_{Z1} = -a_0/a_1$ $k = a_1$	$G(z) = k \frac{(z - z_{Z1})}{(z - z_{P1})(z - z_{P2})}$ <p>avec :</p> $z_{P1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{\pm jT\omega_p}$

A l'instar des méthodes de synthèse utilisées en commande analogique on est souvent conduit à élaborer un correcteur numérique tel, qu'en boucle fermée, le système asservi se «comporte» comme un système du second ordre. Les spécifications, exprimées en terme d'amortissement (ζ) et de pulsation propre non amortie (ω_n), font référence aux performances spécifiées dans le domaine analogique. Ainsi le cahier des charges pourra indiquer que le système concerné doit, en boucle fermée, présenter un coefficient d'amortissement de « ζ » et une pulsation propre non amortie de « ω_n ». Cependant la présence du zéro $z_{Z1} = -a_0/a_1$ modifie la réponse indicielle du système du second ordre numérique par rapport à celle obtenue pour le système du second ordre analogique. Précisons les relations existant entre les domaines p et z .

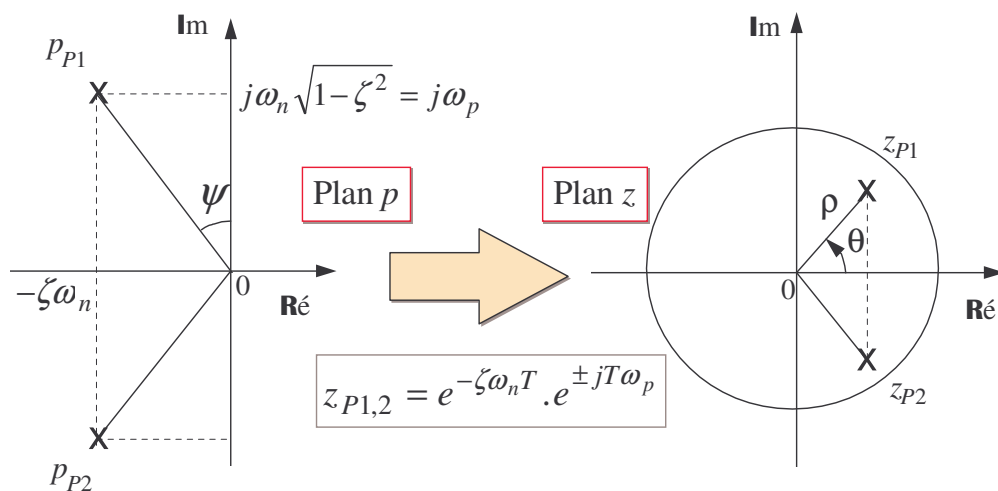


Figure 3 : Equivalent discret d'un système du second ordre défini dans le domaine continu

On vérifie que $\zeta = \sin \psi$

La correspondance entre les domaines p et z se traduit par la relation suivante :

$$z_{p1} = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{+jT\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \rho \cdot e^{j\theta} = \overline{z_{p2}}$$

Le lieu des pôles à amortissement (ζ) constant et produit ($\omega_n T$) constant, dans le plan z , est représenté ci-dessous (Cf. annexe A.7.1)

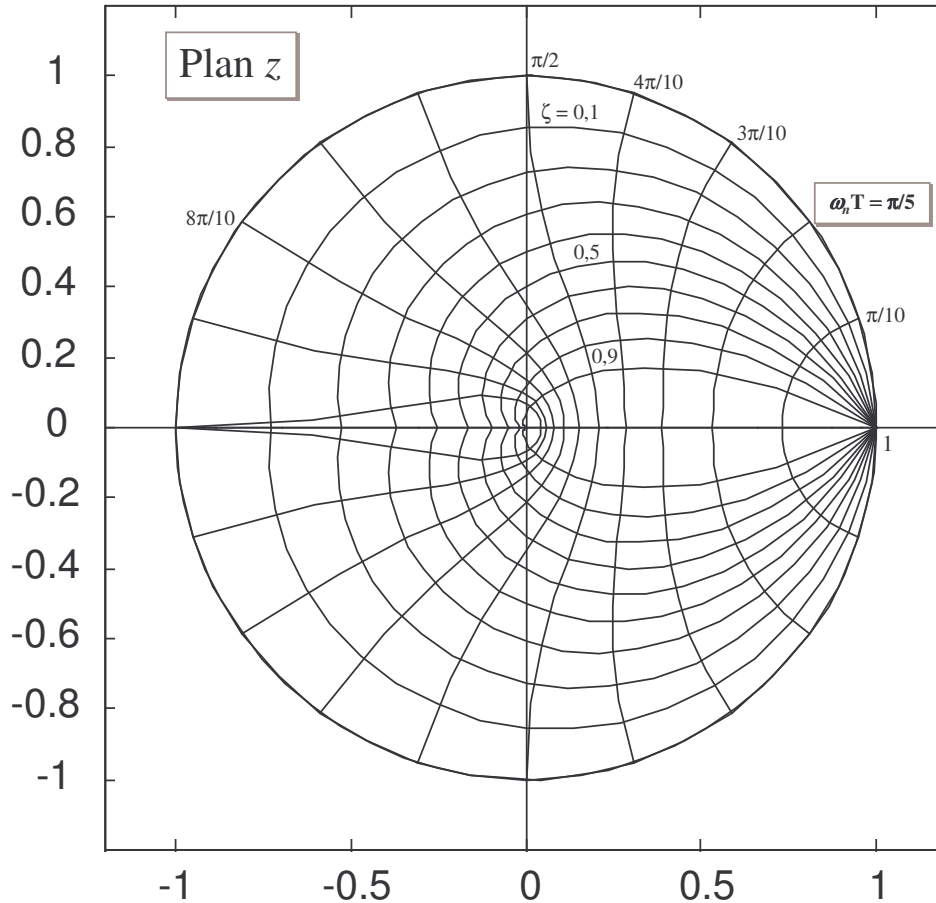


Figure 4 : Lieu des pôles à amortissement constant ζ et produit $\omega_n T$ constant

7.3. REPONSE INDICIELLE ET REGIME TRANSITOIRE

7.3.1. REPONSE INDICIELLE D'UN SYSTEME

Soit $\frac{S}{E}(z) = FTBF(z) = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)}$ avec $E(z) = E_{p0} \frac{z}{z-1}$

La réponse aux instants d'échantillonnage est donnée par :

$$s_n = s(nT) = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{de } S(z)}} \text{Résidus de } z^{n-1} S(z) = E_{p0} \sum_{\substack{z=1 \\ + \\ \text{pôles de} \\ FTBF(z)}} \text{Résidus de } \frac{z^n Nbf(z)}{(z-1) Dbf(z)}$$

Supposons que tous les pôles de la $FTBF(z)$ $\begin{cases} z_{P_r} \in \mathbf{R} \\ z_{P_i} = \alpha_i + j\beta_i \\ \overline{z_{P_i}} = \alpha_i - j\beta_i \end{cases}$ soient simples.

En posant :

$$\theta_i = \text{atan} \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

$$\phi_i = \arg Nbf(z_{P_i}) - \arg(z_{P_i} - 1) - \arg D'bf(z_{P_i})$$

il vient :

$$s_n = E_{P0} \left\{ \frac{Nbf(1)}{Dbf(1)} + \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{réels } z_r}} \frac{z_{P_r}^n Nbf(z_{P_r})}{(z_{P_r} - 1) D'bf(z_{P_r})} + \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{complexes}}} 2 \left| \frac{Nbf(z_{P_i})}{(z_{P_i} - 1) D'bf(z_{P_i})} \right| |z_{P_i}|^n \cos(n\theta_i + \phi_i) \right\}$$

\Downarrow

\Downarrow

\Downarrow

**Régime
permanent** $s(\infty)$

Action des pôles réels

$$\begin{aligned} z_{P_r} > 0 \quad \forall n \quad z_{P_r}^n > 0 \\ z_{P_r} < 0 \quad \begin{cases} z_{P_r}^n > 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ z_{P_r}^n < 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \\ \text{Stable si } |z_{P_r}| < 1 \end{aligned}$$

Action des pôles complexes
Oscillations dues au terme en cosinus

$$\text{Stable si } |z_{P_i}| < 1$$

7.3.2. CAS DU SYSTEME DU SECOND ORDRE

a. Réponse indicielle d'un second ordre

Considérons le cas où la $FTBF(z)$ possède deux pôles dominants imaginaires, conjugués, proches du cercle unité, alors que les autres pôles sont proches de l'origine et donc négligeables. Dans ces conditions le système est équivalent au système du second ordre de transmittance :

$$FTBF(z) = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)} = k \frac{(z - z_Z)}{(z - z_P)(z - \overline{z_P})}$$

$$\text{Si le gain statique} = K = 1 \text{ alors } k = \frac{(1 - z_P)(1 - \overline{z_P})}{(1 - z_Z)}$$

$$\text{L'entrée est un échelon de position } e(t) = u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$S(z) = \frac{(1 - z_P)(1 - \overline{z_P})}{(1 - z_Z)} \cdot \frac{z(z - z_Z)}{(z - 1)(z - z_P)(z - \overline{z_P})}$$

Avec les notations précédentes :

$$\text{Posons } \begin{cases} \theta_0 = \text{atan} \frac{\beta}{\alpha} \\ \phi_0 = \arg(z_P - z_Z) - \arg(z_P - 1) - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{on obtient :}$$

$$s_n = 1 + 2k \left| \frac{\alpha + j\beta - z_Z}{(\alpha + j\beta - 1)2j\beta} \right| |z_P|^n \cos(n\theta_0 + \phi_0)$$

Examinons le plan complexe z .

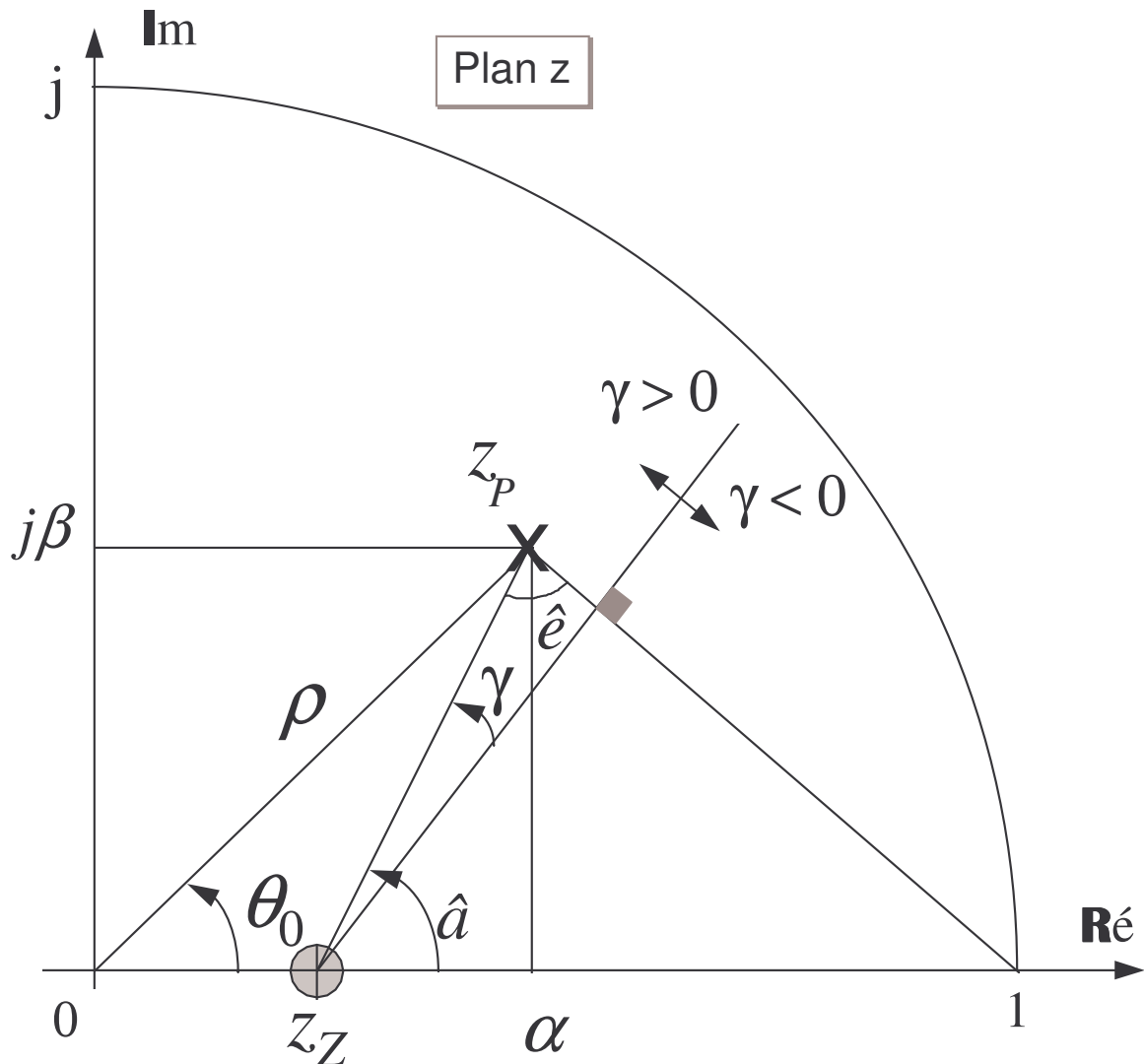


Figure 5 : Différents angles et distances dans le plan complexe « z »

$$\begin{cases} \theta_0 = \text{atan} \frac{\beta}{\alpha} \\ \phi_0 = \hat{a} - (\hat{a} + \hat{e}) - \frac{\pi}{2} = -\left(\hat{e} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma = \phi_0 + \pi \\ \gamma + \hat{e} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$s_n = 1 - 2k \left| \frac{\alpha + j\beta - z_Z}{(\alpha + j\beta - 1)2j\beta} \right| |z_P|^n \cos(n\theta_0 + \gamma)$$

$$k = \frac{(1 - z_P)(1 - \overline{z_P})}{(1 - z_Z)} = \frac{PI^2}{ZI}$$

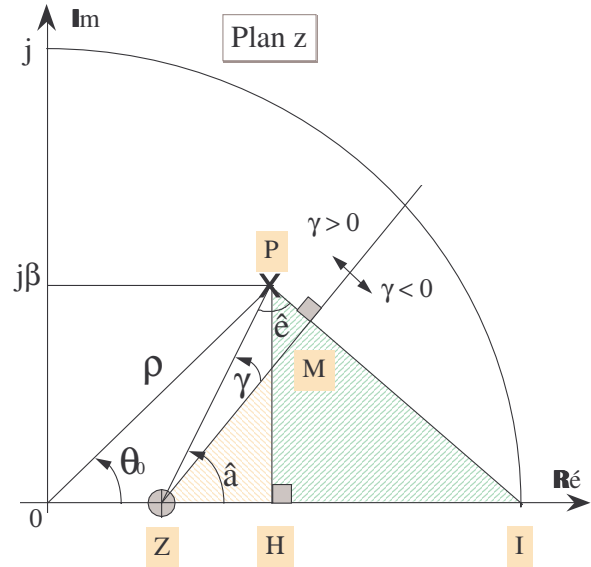
$$\left| \frac{\alpha + j\beta - z_Z}{(\alpha + j\beta - 1)2j\beta} \right| = \frac{PZ}{2PI \cdot PH}$$

$$s_n = 1 - \frac{PI \cdot PZ}{ZI \cdot PH} \cdot |\rho|^n \cos(n\theta_0 + \gamma)$$

Les triangles PIH et ZIM sont semblables.

$$\frac{PH}{ZM} = \frac{PI}{ZI} \Rightarrow ZM = \frac{PH \cdot ZI}{PI} = PZ \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{PI \cdot PZ}{ZI \cdot PH} = \frac{1}{\cos \gamma}$$



Ainsi la réponse indicielle aux instants d'échantillonnage est donnée par :

$$s_n = 1 - \frac{1}{\cos \gamma} |\rho|^n \cos(n\theta_0 + \gamma)$$

b. Caractéristiques de la réponse indicielle

La réponse d'un second ordre étant en général oscillante, il convient de déterminer le temps de pic t_p et le premier dépassement D_1 . Comme la réponse n'est connue qu'aux seuls instants d'échantillonnage LINDORFF propose de déterminer le signal continu $s_c(t)$, d'amortissement $\zeta = \sin \psi$ et de pulsation propre non amortie ω_n , passant par tous les échantillons s_n .

La correspondance entre les domaines p et z a été établie en 7.2.

$$z_P = e^{-\zeta \omega_n T} e^{jT \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \rho e^{j\theta_0}$$

Aussi :

$$s_c(t) = 1 - \frac{1}{\cos \gamma} |z_P|^{\frac{t}{T}} \cos\left(\frac{t}{T} \theta_0 + \gamma\right) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\cos \gamma} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \gamma)$$

$$s_c(t) = 1 - \frac{e^{-(\omega_n \sin \psi) t}}{\cos \gamma} \cos[(\omega_n \cos \psi) t + \gamma]$$

Le temps de pic t_p se détermine par $ds_c/dt = 0$ et le dépassement par $D_1 = s_c(t_p) - 1$

Dans ces conditions on trouve :

$$t_p = \frac{\pi - \gamma - \psi}{\omega_n \cos \psi} = \frac{T}{\theta_0} (\pi - \gamma - \psi)$$

$$D_1 = \frac{\cos \psi}{\cos \gamma} \cdot \text{Exp}[-(\pi - \gamma - \psi) \cdot \text{tg} \psi]$$

et

$$\text{tg} \psi = -\frac{\ln \rho}{\theta_0}$$

Ces différentes valeurs font l'objet des abaques donnés en annexes A.7.2.a et b.

Cette méthode est applicable aux systèmes ayant deux pôles dominants et un zéro réel, les autres pôles et zéros étant situés près de l'origine du plan z (module $< 0,1$).

7.3.3. APPLICATION

Considérons l'asservissement ci-dessous. La période d'échantillonnage T est égale à une seconde. Le correcteur numérique est un simple gain K .

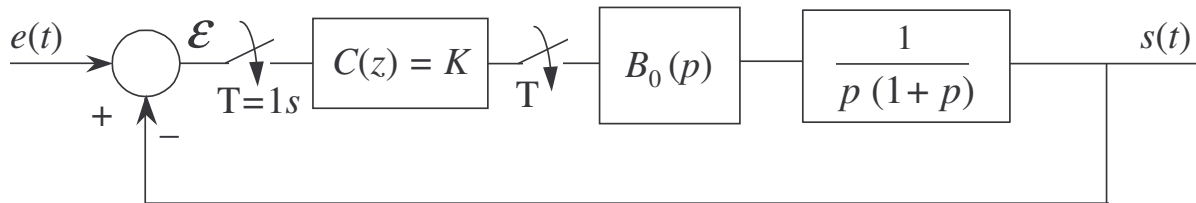


Figure 6 ; Asservissement élémentaire de position à commande numérique

La fonction de transfert en boucle ouverte est égale à :

$$FTBO(z) = \frac{0,37K(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} = \frac{k(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)}$$

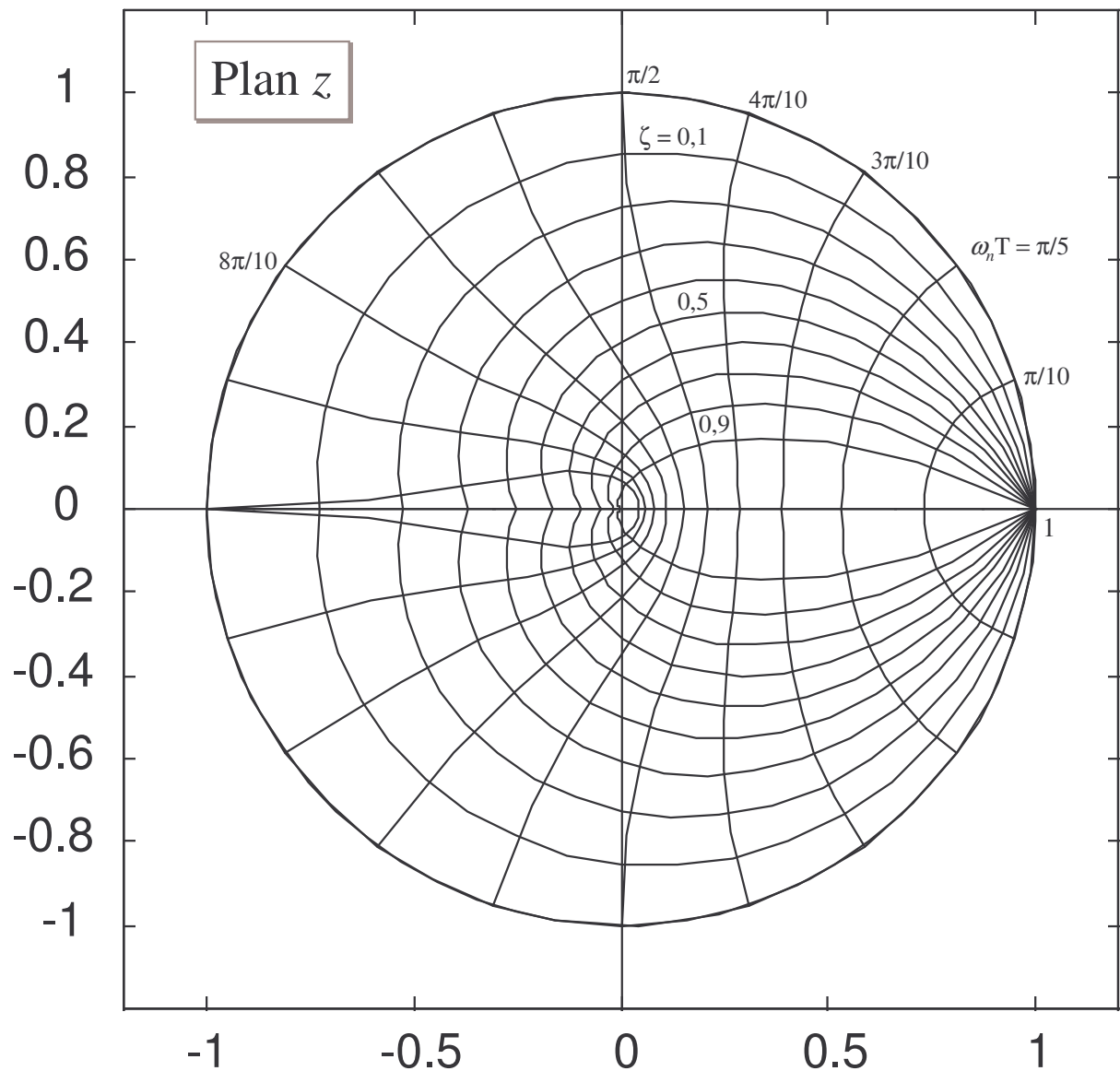
avec le facteur de gain $k = 0,37K$

Il s'agit de régler le gain K afin qu'en boucle fermée ce système se comporte comme un second ordre de coefficient d'amortissement $\zeta = 0,7 = \sin \psi = \sin 45^\circ$. On calculera le dépassement D_1 et le temps de pic t_p .

Pour obtenir ce réglage on trace le lieu de EVANS **E** sur l'abaque donné en annexe A.7.1.

ANNEXE A.7.1.

LIEU DES POLES A AMORTISSEMENT CONSTANT



ANNEXE A.7.2.A.

**CARACTERISTIQUES DE LA REPONSE INDICIELLE
(Dépassement D1)**

ANNEXE A.7.2.B.

**CARACTERISTIQUES DE LA REPONSE INDICIELLE
(Temps de pic t_p)**