

## Chapitre 9

# Théorie des équations polynomiales

- 9.1. Introduction
- 9.2. Généralités sur les équations polynomiales
- 9.3. Degré de la solution  $(X, Y)$
- 9.4. Cas particulier de l'équation régulière
- 9.5. Solution générale de l'équation polynomiale
- 9.6. Résolution de l'équation sous contraintes
  - 9.6.1. Méthode de résolution
  - 9.6.2. Exemple :

### 9.1. INTRODUCTION

La méthode de synthèse polynomiale présentée dans ce chapitre met en œuvre la théorie élaborée par VOLGUINE dans son ouvrage « Programmation des calculatrices numériques de commande » publié chez DUNOD en 1966. Cette méthode permet de réaliser la synthèse de correcteurs numériques selon une démarche fondée sur l'algèbre des polynômes dont les principes sont rappelés dans le paragraphe qui suit.

### 9.2. GENERALITES SUR LES EQUATIONS POLYNOMIALES

Dite encore équation de DIOPHANTE, identité de BEZOUT ou identité d'ARYABHATTA les équations polynomiales sont des équations fonctionnelles dans lesquelles les fonctions inconnues sont des polynômes. Ces équations sont du type :

$$AX + BY = C$$

- $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des polynômes connus de la variable  $x$ .
- $X$  et  $Y$  sont des polynômes inconnus de  $x$ .
- $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

Avec  $A(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$  on adopte la notation  $n = \|A\| = \text{degré du polynôme } A$ . Alors :

- $\|AX\| = \|A\| + \|X\|$ ,
- nombre d'inconnues  $= \|X\| + \|Y\| + 2$ ,
- nombre d'équations  $= \max[\|A\| + \|X\|, \|B\| + \|Y\|, \|C\|] + 1$ .

La résolution de l'équation polynomiale  $AX + BY = C$  n'est possible que si le nombre d'inconnues est supérieur ou égal au nombre d'équations soit :

$$\|X\| + \|Y\| \geq \max[\|A\| + \|X\|, \|B\| + \|Y\|, \|C\|] - 1$$

Les équations polynomiales possèdent plus d'une solution. Il est donc possible de sélectionner dans cet ensemble une solution présentant des propriétés spéciales. Ainsi, on peut choisir la solution minimisant le degré d'un des polynômes inconnus ( $X$  ou  $Y$ ), ou encore la solution pour laquelle les coefficients d'un de ces polynômes sont tous inférieurs à une valeur

donnée.

La solution d'une équation polynomiale dans laquelle au moins un des deux polynômes  $X$  ou  $Y$  est de degré minimal est dite **solution minimale**. Cette solution est notée  $(X_0, Y_0)$ .

L'équation qui vérifie  $\|C\| < \|A\| + \|B\|$  est dite **régulière**.

### 9.3. DEGRE DE LA SOLUTION (X,Y)

$$\text{Soit } \begin{cases} \|A\| + \|X\| \geq \|B\| + \|Y\| \\ \|A\| + \|X\| \geq \|C\| \end{cases}$$

$$\|X\| + \|Y\| \geq \max[\|A\| + \|X\|, \|B\| + \|Y\|, \|C\|] - 1 \Rightarrow \|X\| + \|Y\| \geq \|A\| + \|X\| - 1$$

$$\begin{cases} \|Y\| \geq \|A\| - 1 \\ \|X\| \geq \|B\| - 1 \end{cases}$$

Ce résultat reste valable si  $\|A\| + \|X\| \leq \|B\| + \|Y\|$

Ainsi, dans tous les cas, les degrés de  $X$  et  $Y$  ne peuvent être inférieurs à une valeur minimale correspondant à la solution minimale notée  $(X_0, Y_0)$ .

### 9.4. CAS PARTICULIER DE L'EQUATION REGULIERE

Si l'équation polynomiale est régulière, i.e. si  $\|C\| < \|A\| + \|B\|$ , à la solution minimale  $\|X_0\| = \|B\| - 1$  correspond la solution minimale  $\|Y_0\| = \|A\| - 1$ .

En effet :

$$\|X_0\| = \|B\| - 1$$

$$BY = C - AX_0$$

$$\|BY\| = \max[\|C\|, \|A\| + \|X_0\|]$$

$$\|BY\| = \max[\|C\|, \|A\| + \|B\| - 1]$$

$$\text{Comme } \|C\| < \|A\| + \|B\| \text{ il vient : } \begin{cases} \|B\| + \|Y\| = \|A\| + \|B\| - 1 \\ \|Y\| = \|Y_0\| = \|A\| - 1 \end{cases}$$

Ainsi **l'équation polynomiale**  $AX + BY = C$  **régulière** (i.e.  $\|C\| < \|A\| + \|B\|$ ) admet comme solution minimale :

$$\begin{cases} \|Y_0\| = \|A\| - 1 \\ \|X_0\| = \|B\| - 1 \end{cases}$$

De plus pour toute solution  $(X, Y)$  on vérifie que  $\|AX\| = \|BY\|$  (à démontrer par le lecteur).

## 9.5. SOLUTION GENERALE DE L'EQUATION POLYNOMIALE

Si  $(X_0, Y_0)$  est solution minimale de l'équation polynomiale, cette équation admet la solution générale suivante :

$$\begin{cases} X = X_0 + BP \\ Y = Y_0 - AP \end{cases}, \quad P \text{ est un polynôme quelconque}$$

La démonstration de ce résultat est immédiate.

### Exemple 9.1 :

Cherchons la solution minimale de l'équation polynomiale régulière suivante :

$$(1+5x-3x^2-11x^3).X + (2-x+8x^2).Y = 1$$

$$\begin{cases} \|X_0\| = \|B\| - 1 = 1 \\ \|Y_0\| = \|A\| - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = a_0 + a_1x \\ Y_0 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \end{cases}$$

$$(1+5x-3x^2-11x^3).(a_0 + a_1x) + (2-x+8x^2).(b_0 + b_1x + b_2x^2) = 1$$

$$\begin{array}{rcccccccl} a_0 & & & + & 2b_0 & & & = & 1 \\ 5a_0 & + & a_1 & - & b_0 & + & 2b_1 & = & 0 \\ - & 3a_0 & + & 5a_1 & + & 8b_0 & - & b_1 & + & 2b_2 & = & 0 \\ - & 11a_0 & - & 3a_1 & & + & 8b_1 & - & b_2 & = & 0 \\ & & - & 11a_1 & & & + & 8b_2 & = & 0 \end{array}$$

Réolvons ce système d'équations par MATLAB.

```
» M=[1 0 2 0 0;5 1 -1 2 0;-3 5 8 -1 2;-11 -3 0 8 -1;0 -11 0 0 8];
» D=[1;0;0;0;0];
» coef=inv(M)*D
coef =
    0.1556
   -0.3744
    0.4222
    0.0092
   -0.5148
```

$$\begin{cases} X_0 = 0,1556 - 0,3744x \\ Y_0 = 0,4222 + 0,092x - 0,5148x^2 \end{cases}$$

## 9.6. RESOLUTION DE L'EQUATION SOUS CONTRAINTES

### 9.6.1. METHODE DE RESOLUTION

Il s'agit de trouver la solution  $(X, Y)$  de l'équation  $AX + BY = C$  dont le module des coefficients du polynôme  $X$  n'excède pas une valeur imposée  $|a_i| \leq r$

En général les coefficients du polynôme de degré minimal  $X_0$  ne respectent pas cette

contrainte. Aussi cherche-t-on une solution telle que :

$$\begin{cases} X = X_0 + BP \\ Y = Y_0 - AP \end{cases} \quad \text{avec} \quad \|P\| = 0, 1, 2, \dots$$

Comme  $\|X_0\| = \|B\| - 1$

$$\|X\| = \|B\| + \|P\|$$

L'algorithme de résolution est le suivant :

- Choisir  $\|P\| = 0 \Rightarrow P = p_0$

$$X_0(x) = \sum_{i=0}^n a_{0i} x^i$$

$$X(x) = \sum_{i=0}^n a_{0i} x^i + p_0 \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i x^i$$

◇ Vérifier que :

$$-r \leq a_0 + p_0 \beta_0 \leq +r$$

$$-r \leq a_1 + p_0 \beta_1 \leq +r$$

.....

◇ Si le système d'inégalités est compatible, déterminer le domaine des variations possibles de  $p_0$ . A l'intérieur de ce domaine  $p_0$  sera choisi selon d'autres critères.

◇ Si le système ne l'est pas on augmente le degré du polynôme  $P$  :

- Choisir  $\|P\| = 1 \Rightarrow P = p_0 + p_1 x$

◇ et ainsi de suite .....

### 9.6.2. EXEMPLE :

Résoudre :  $(1-3x)X + (3+4x-5x^2)Y = 34$

sachant que les coefficients de la solution  $X$  doivent vérifier que  $|a_i| \leq 10$ .

$$\begin{cases} \|X_0\| = \|B\| - 1 = 1 \\ \|Y_0\| = \|A\| - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = a_0 + a_1 x \\ Y_0 = b_0 \end{cases}$$

$$(1-3x)(a_0 + a_1 x) + (3+4x-5x^2)(b_0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} X_0 = 7 - 15x \\ Y_0 = 9 \end{cases} \quad \text{Cette solution ne convient pas.}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 X &= 7 - 15x + p_0(3 + 4x - 5x^2) \\
 X &= (7 + 3p_0) + (4p_0 - 15)x - 5p_0x^2 \Rightarrow \begin{cases} -10 \leq (7 + 3p_0) \leq 10 \\ -10 \leq (4p_0 - 15) \leq 10 \\ -10 \leq -5p_0 \leq 10 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 -\frac{17}{3} &\leq p_0 \leq 1 \\
 +\frac{5}{4} &\leq p_0 \leq +\frac{25}{4} \\
 -2 &\leq p_0 \leq 2
 \end{aligned}$$

Ce système d'inéquations étant incompatible on choisit  $P = p_0 + p_1x$

$$\begin{aligned}
 X &= 7 - 15x + (p_0 + p_1x)(3 + 4x - 5x^2) \\
 X &= (7 + 3p_0) + (-15 + 4p_0 + 3p_1)x + (-5p_0 + 4p_1)x^2 - 5p_1x^3
 \end{aligned}$$

On détermine le domaine  $(p_0, p_1)$  satisfaisant les inégalités :

$$\begin{cases} -10 \leq (7 + 3p_0) \leq 10 \\ -10 \leq (-15 + 4p_0 + 3p_1) \leq 10 \\ -10 \leq -5p_0 + 4p_1 \leq 10 \\ -10 \leq -5p_1 \leq 10 \end{cases}$$

Ce système d'inéquations est compatible. En choisissant, par exemple,  $(p_0 = 1, p_1 = 2)$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 X &= 10 - 5x + 3x^2 - 10x^3 \\
 Y &= Y_0 - AP = 8 + x + 6x^2
 \end{aligned}$$