

Chapitre 8

Méthodes classiques de synthèse

- 8.1. Introduction
- 8.2. Spécifications, contraintes et méthodologie
 - 8.2.1. Spécifications
 - 8.2.2. Conditions à respecter par $C(z)$
 - 8.2.3. Méthodologie
- 8.3. Modèle continu du bloqueur d'ordre « zéro »
 - 8.3.1. Principe
 - 8.3.2. Exemple
- 8.4. Utilisation de la transformée en « w »
 - 8.4.1. Principe
 - 8.4.2. Méthode de synthèse en « w »
 - 8.4.3. Exemple
- 8.5. Méthode de synthèse en « z »
 - 8.5.1. Principe
 - 8.5.2. Exemple

8.1. INTRODUCTION

La synthèse d'un système de commande numérique consiste à **concevoir le logiciel qui sera implanté dans le calculateur numérique** chargé de piloter le processus afin d'obtenir les performances attendues. Ce logiciel correspond à la transmittance $C(z)$ du correcteur qui, à travers un bloqueur d'ordre zéro (CNA) commande le processus de transmittance connue $P(p)$ pour modifier les propriétés dynamiques du système et permettre ainsi à l'ensemble de se comporter, en boucle fermée, comme prescrit au cahier des charges.

La structure de la boucle de commande à laquelle nous nous référons pour cette étude est la suivante :

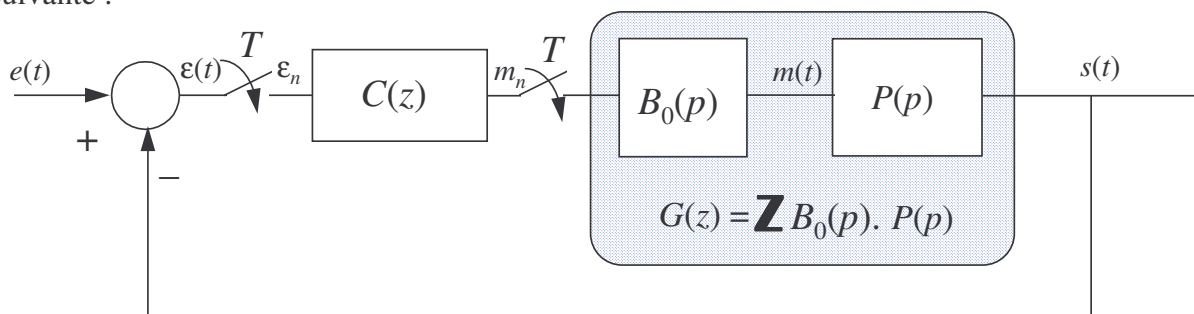


Figure 1 : Structure de la boucle de commande échantillonnée

La réponse $s(t)$ du système est, en général, une fonction continue du temps en raison de la nature analogique du processus dynamique commandé. C'est pourquoi elle est caractérisée par des spécifications portant notamment sur la réponse indicielle (dépassement D_1 , temps de réponse à 5%, erreurs en régime permanent...).

Dans ce chapitre nous déterminerons la fonction de transfert du correcteur numérique $C(z)$ qui, à partir de l'erreur échantillonnée $\varepsilon(nT)$, génère la séquence de commande $\{m_n\}$ du processus dynamique continu, la mieux adaptée à la réalisation des performances fixées par le cahier des charges de l'installation.

Le calcul de $C(z)$ met en œuvre des méthodes :

- classiques comparables à celles généralement adoptées pour la conception des correcteurs analogiques ; elles résultent pour la plupart d'une extension aux systèmes numériques, des techniques fondées sur l'utilisation du diagramme de BODE, de l'abaque de BLACK-NICHOLS ou du lieu des racines (EVANS) ;
- spécifiques, adaptées à la nature numérique de la chaîne de commande.

L'équation récurrente à programmer se déduit de la transmittance calculée du correcteur $C(z)$. On peut alors établir la programmation de l'algorithme à implanter dans le **calculateur numérique temps réel** selon les principes édictés au chapitre 4.

8.2. SPECIFICATIONS, CONTRAINTES ET METHODOLOGIE

8.2.1. SPECIFICATIONS

Comme nous l'indiquons en 8.1 les principales données retenues pour spécifier un système de commande numérique s'inspirent directement de celles utilisées pour la synthèse d'un système de commande continu :

- **régime transitoire** caractérisé par le dépassement $D1$ et le temps de réponse à 5% (voire 2%) de la réponse indicielle, amortissement, pulsation propre non amortie, ... ;
- **précision en régime permanent** caractérisée par les erreurs admissibles pour une entrée donnée, en général de type polynomial $e(t) = [e_0 + e_1 t + \dots]u(t)$;
- **insensibilité** aux bruits (largeur de la bande passante) et aux perturbations ;
- **conservation des performances** en présence de petites variations des paramètres du système (robustesse) ...

On peut encore désirer respecter des spécifications plus précises comme :

- annulation de l'erreur séquentielle (aux instants d'échantillonnage) en temps minimal ;
- minimalisation de certains critères comme par exemple l'énergie de la commande appliquée au processus (e.g. commande en position d'un satellite en orbite).

Enfin n'oublions pas que la **réponse n'est connue qu'aux seuls instants d'échantillonnage** et qu'il est toujours utile de vérifier que des oscillations cachées n'apparaissent pas entre ces instants. Pour cela on aura recours à la simulation.

8.2.2. CONDITIONS A RESPECTER PAR $C(z)$

L'utilisation d'un calculateur numérique pour la compensation d'un système permet d'introduire un nombre quelconque de pôles et de zéros. Elle offre à ce titre une infinité de solutions qui permettent de caresser l'espoir de pouvoir modifier sans limites la dynamique du processus. Il n'en est rien. **Le correcteur doit être réalisable, stable et « grossier ».**

a. Réalisabilité physique (causalité) du correcteur $C(z)$

Cette condition est vérifiée (Cf. § 5.4.1) dès lors que la transmittance du correcteur :

$$C(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^d + b_1 z^{d-1} + \dots + b_d} \quad \text{admet } d \geq n$$

Soit encore :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} C(z) = 0$$

b. Stabilité du correcteur

La stabilité du correcteur implique que **les pôles de $C(z)$ soient situés à l'intérieur du cercle unité**.

c. Structure du correcteur.

La fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par $FTBF(z)$.

$$\frac{S}{E}(z) = FTBF(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad \text{avec } G(z) = \mathbf{Z}[B_0(p)P(p)]$$

On en déduit que :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{FTBF(z)}{1 - FTBF(z)}$$

$C(z)$ doit vérifier les conditions 8.2.2.a et b.

d. Compensation de pôles et de zéros

On peut être amené à compenser les pôles et les zéros indésirables du système et éventuellement à les remplacer par d'autres qui assurent un meilleur comportement global. **Cette opération n'est envisageable que si les pôles et zéros sont à l'intérieur du cercle unité.**

Soit $G(z) = \frac{z+a}{z+b} G_1(z)$, avec $|a|$ et $|b| > 1$. Dans ces conditions il est illusoire d'éliminer le pôle $(-b)$ instable et le zéro $(-a)$, par le correcteur :

$$C(z) = \frac{z+b}{(z+a)G_1(z)} \frac{FTBF(z)}{1 - FTBF(z)} = \frac{z+b}{z+a} C_1(z)$$

La compensation parfaite de la dynamique de l'organe commandé est impossible. Un écart aléatoire des paramètres du correcteur, ou du processus commandé, conduit à une divergence inéluctable de la boucle de commande. En effet admettons que les paramètres a et b du correcteur subissent les variations Δa et Δb :

$$\frac{\Delta C}{C}(z) = \frac{\Delta b}{z+b} - \frac{\Delta a}{z+a}$$

$$FTBO(z) = C(z)G(z) \Rightarrow \frac{\Delta FTBO}{FTBO}(z) = \frac{\Delta C}{C}(z)$$

$$FTBF = \frac{FTBO}{1+FTBO} \Rightarrow \frac{\Delta FTBF}{FTBF} = \frac{\Delta FTBO}{FTBO} - \frac{\Delta FTBO}{1+FTBO} = \frac{\Delta FTBO}{FTBO(1+FTBO)}$$

$$\frac{\Delta FTBF}{FTBF} = \frac{\Delta C}{C} \frac{1}{1+FTBO} = \left[\frac{\Delta b}{z+b} - \frac{\Delta a}{z+a} \right] \frac{1}{1+FTBO}$$

$$\boxed{\Delta FTBF(z) = \left[\frac{\Delta b}{z+b} - \frac{\Delta a}{z+a} \right] \frac{FTBO}{[1+FTBO]^2}}$$

Les pôles a et b étant à l'extérieur du cercle unité, aussi petites que soient les variations Δa et Δb , la $FTBF(z)$ du système est instable. **On s'interdit en conséquence de compenser les pôles et les zéros de $G(z)$ situés à l'extérieur du cercle unité.** Il ne faut cependant pas conclure à l'impossibilité de rendre stable un système intrinsèquement instable. Cette contrainte implique seulement que les possibilités de compensation sont limitées et que l'on ne peut obtenir de la part du système bouclé une dynamique quelconque.

e. Système «grossier»

Un système caractérisé par un vecteur de paramètres λ est dit «grossier» si son comportement qualitatif n'est pas modifié pour de petites variations $\delta\lambda$ du vecteur λ . Ainsi s'il est stable pour λ_0 il le reste pour $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$.

Pour qu'un système soit grossier nous avons montré **qu'il ne faut pas compenser les pôles et les zéros extérieurs au cercle unité.**

8.2.3. METHODOLOGIE

a. Approche boucle ouverte

Dans le cas où la suite de commande $\{m_n\}$ est élaborée à partir de la suite $\{\varepsilon_n\} = \{e_n - s_n\}$ on insère le correcteur $C(z)$ en série avec le processus $G(z)$ de telle sorte que la $FTBF(z)$ ait les propriétés requises au cahier des charges.

Ainsi la $FTBO(z) = C(z)G(z)$ doit présenter le nombre d'intégrations nécessaire pour obtenir la précision désirée. Le gain statique sera ajusté afin que la réponse indicielle soit adaptée en terme de dépassement et d'amortissement. Enfin $C(z)$ doit avoir les zéros permettant d'obtenir l'avance de phase utile à l'obtention d'un temps de réponse réduit.

b. Approche boucle fermée

On désire obtenir une $FTBF(z) = \frac{Nbf}{Dbf}$ donnée de gain statique 1 afin d'éliminer l'erreur de position en régime permanent ($\varepsilon_p(\infty) = 0$). Deux modèles sont souvent utilisés :

- $FTBF(z) = \frac{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}}{1 + a_{n-1} + \dots + a_0}$ possède un nombre fini de termes et l'erreur est annulée en un nombre fini de commandes (commande «pile»).

- $FTBF(z) = \frac{1 + a_1 + a_0}{1 - b} \frac{z - b}{z^2 + a_1z + a_0}$ est un système du second ordre dont on peut régler

l'amortissement et qui présente une erreur de position nulle en régime permanent.

8.3. MODELE CONTINU DU BLOQUEUR D'ORDRE « ZERO »

8.3.1. PRINCIPE

Soit un correcteur numérique $C(z) = K$.

Si T est faible, on peut admettre, en première approximation, que le bloqueur est équivalent à **un retard pur** d'une demi-période d'échantillonnage.

L'ensemble correcteur-bloqueur est représenté par la transmittance $K e^{-pT/2}$

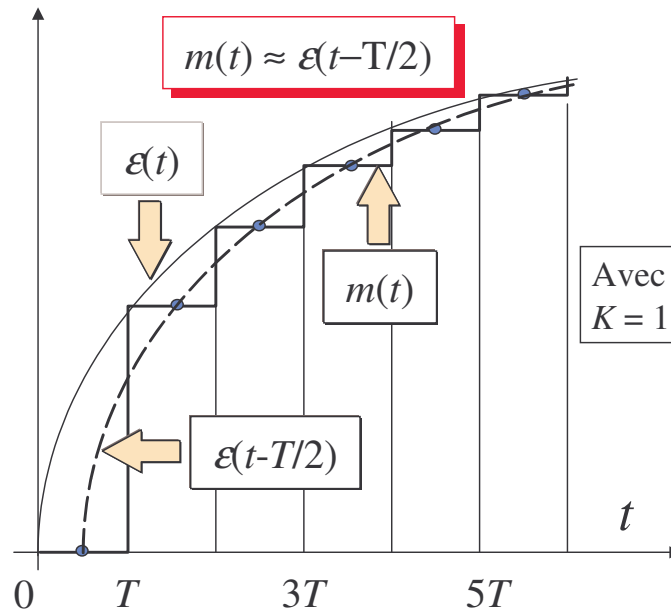


Figure 2 : Modélisation du BOZ par un retard pur

On désire étudier le système échantillonné pour lequel $C(z) = K$:

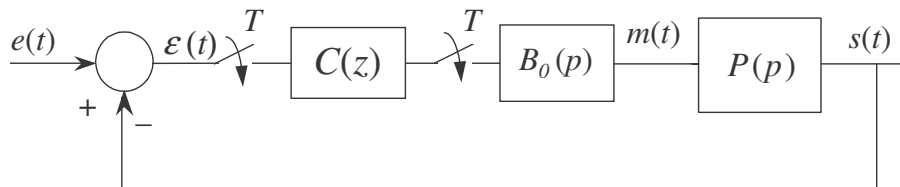


Figure 3 : Boucle de commande échantillonnée

On peut substituer à cette boucle un système continu avec retard pur qui lui est approximativement équivalent.

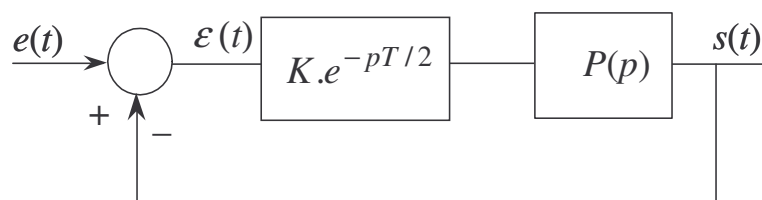


Figure 4 : Equivalent analogique de la boucle de commande

8.3.2. EXEMPLE

a. Réglage d'un gain sans correcteur analogique

Soit l'asservissement élémentaire de position dont on désire régler le gain K fourni par un calculateur numérique.

Le gain K doit être réglé de telle sorte que la réponse indicielle du système en boucle fermée soit équivalente à celle d'un système du second ordre doté d'un coefficient d'amortissement $\zeta = 0,7$. On sait que pour cette valeur de ζ la marge de phase de la FTBO est égale à $M\phi = 60^\circ$.

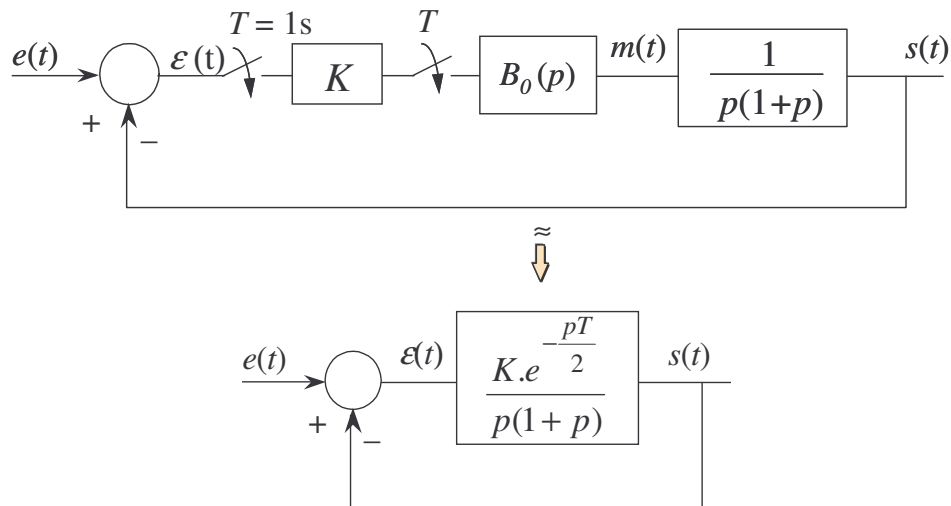


Figure 5 : Transformation de la boucle de commande

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est égale à :

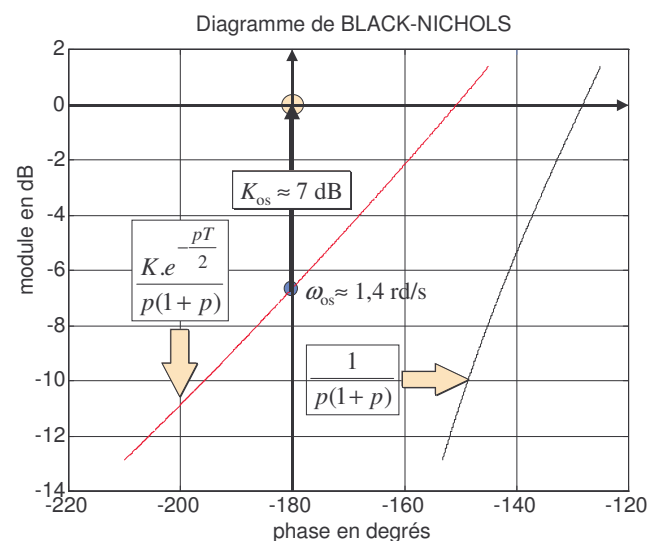
$$FTBO(p) = \frac{K e^{-0,5p}}{p(1+p)}$$

On trace $FTBO(j\omega)$ dans le plan de BLACK-NICHOLS pour $K = 1$.

```
» num=[1];den=[1 1 0];
» diagblac(num,den,0.5,0.7,2)
```

avec la fonction diagblac suivante¹ :

```
function
diagblac(num,den,ret,wmin,wmax)
w=linspace(wmin,wmax,500);
[mag2,phase]=bode(num,den,w);
mag=20*log10(mag2);
phi=phase-w'*ret*180./pi;
hold off
clc
plot(phi,mag,phase,mag),grid
title('Diagramme de BLACK-NICHOLS')
xlabel('phase en degrés')
ylabel('module en dB')
```



¹ Cette fonction permet la prise en compte des retards purs

On trouve que le système est juste oscillant pour $\begin{cases} K_{os} \approx 2,24 \text{ (7dB)} \\ \omega_{os} \approx 1,4 \text{ rd/s} \end{cases}$

L'étude faite avec le lieu de EVANS (Cf. §6.3.3) a donné $\begin{cases} K_{os} \approx 2,42 \\ \omega_{os} \approx 1,33 \text{ rad/s} \end{cases}$

Calculons la valeur de K permettant d'obtenir $M\phi = 60^\circ$.

» diagblac(num,den,0.5,0.2,1)

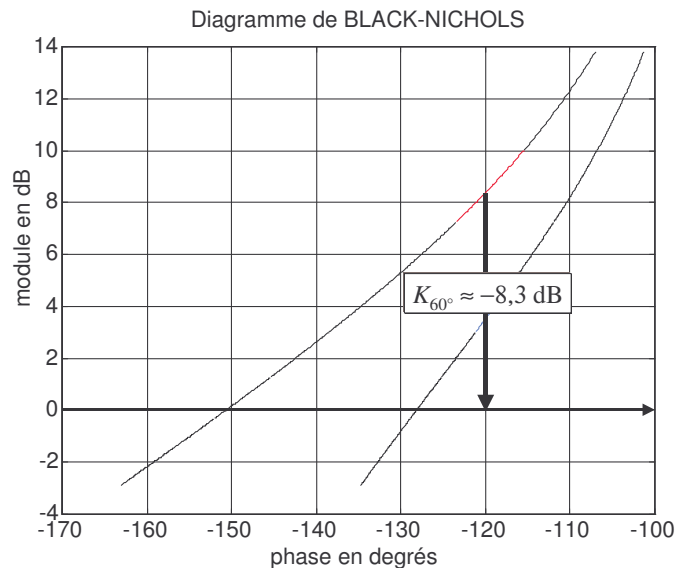
On trouve :

$$K_{60^\circ} = -8,3 \text{ dB soit } 0,38$$

Par la méthode des modes dominants examinée au §7.3.3 nous avons obtenu :

$$K_{60^\circ} = 0,32$$

On notera que malgré son caractère approximatif cette méthode donne d'excellents résultats.



Pour améliorer ces résultats on peut affiner la transmittance du BOZ et tenir compte du gain.

En effet :
$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \Rightarrow B_0(j\omega) = \left[2 \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega} \right] e^{-j\omega T}$$

b. Réglage d'un gain avec correcteur analogique

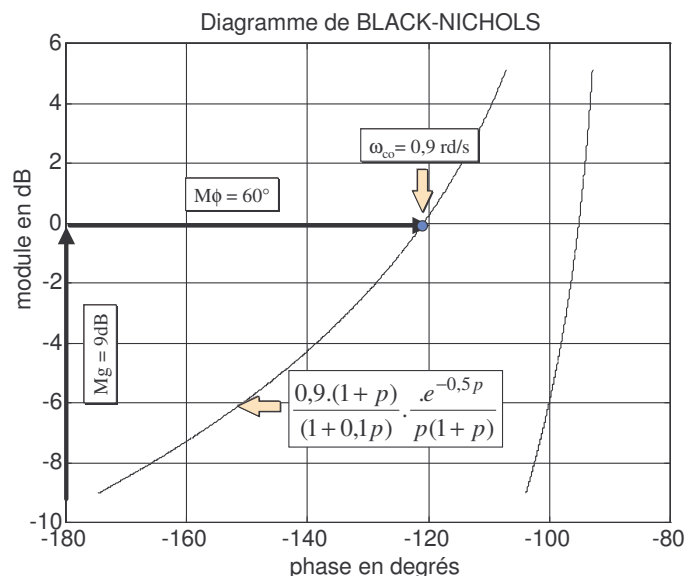
On peut améliorer les performances en stabilité et précision par l'insertion d'un correcteur de type analogique. Adoptons le correcteur à avance de phase $C(p) = \frac{0,9(1+p)}{(1+0,1p)}$.

» num=[1];den=[1 1 0];
 » numa=0.9*[1 1];dena=[0.1 1];
 » [n,d]=series(num,den,numa,dena);
 » diagblac(n,d,0.5,0.5,2.5)

$$M\phi = 60^\circ$$

$$Mg = 9 \text{ dB}$$

$$K_{60^\circ} = 0,9$$



Simulons le système de commande en utilisant les capacités de SIMULINK.

- Le gain est ajusté par le calculateur.
- La partie dynamique du correcteur est réalisée de manière analogique.

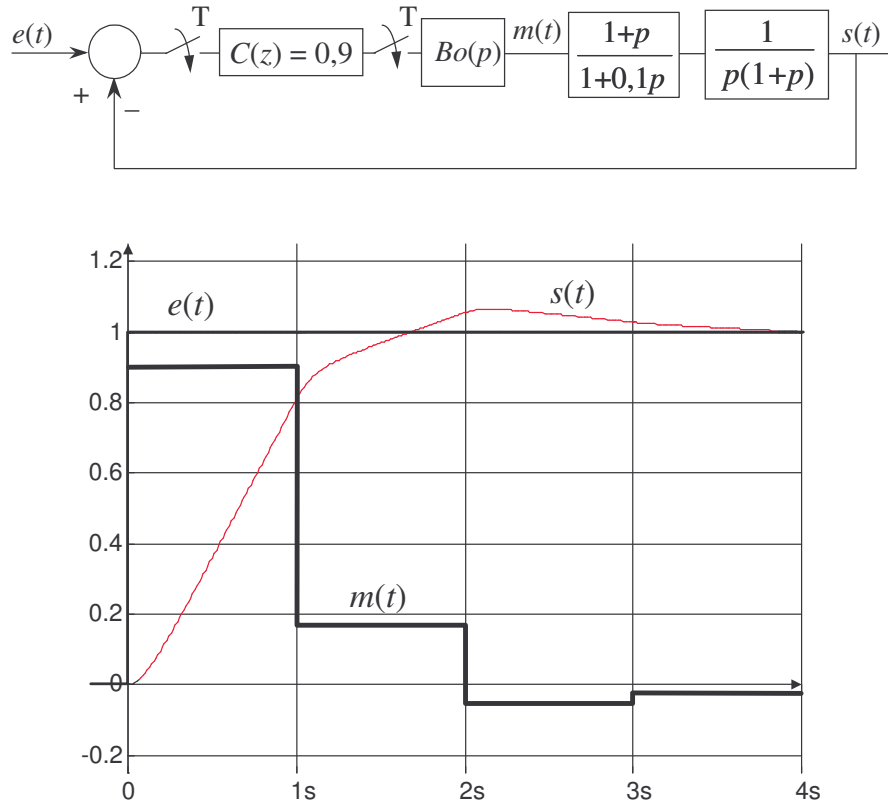


Figure 6 : Simulation du système corrigé par $C(z) = K$

c. Discrétisation d'une loi de commande continue

Nous avons établi au paragraphe 5.5 un équivalent de l'opérateur « p » :

$$p \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

On peut substituer au correcteur à avance de phase analogique le correcteur numérique «équivalent» dans l'approximation :

$$C(z) = [C(p)]_{p \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \left[\frac{0,9(1+p)}{(1+0,1p)} \right]_{p \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2,7 - 0,9z^{-1}}{1,2 + 0,8z^{-1}}$$

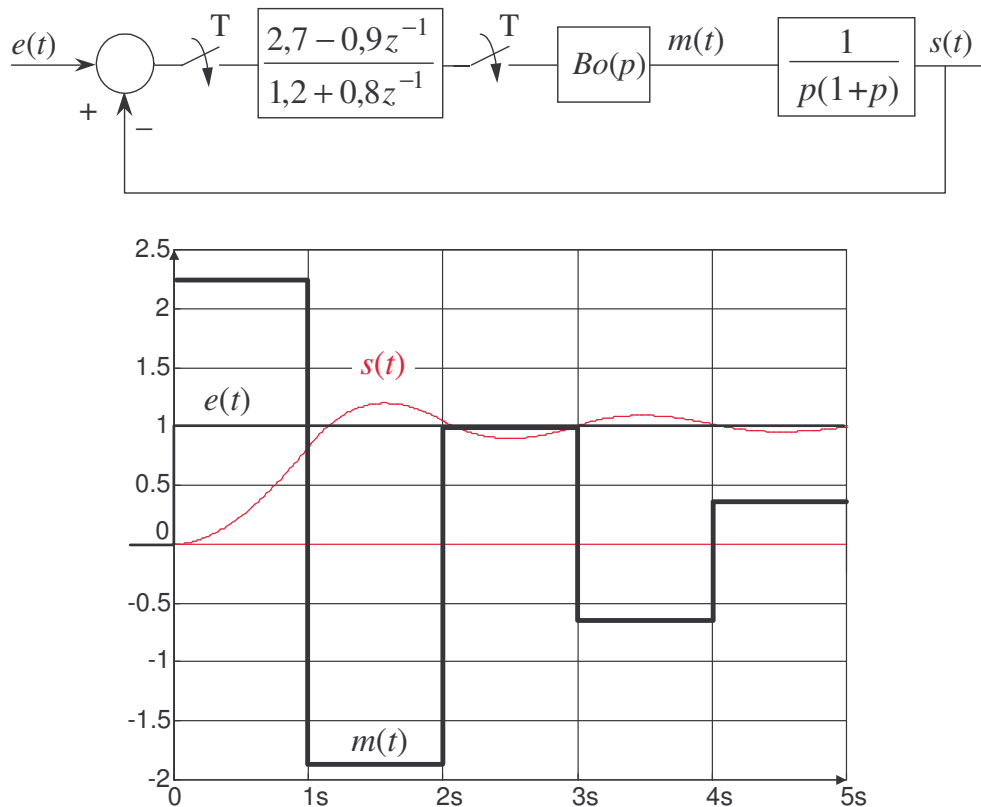


Figure 7 : Simulation du processus corrigé par un correcteur à avance de phase « numérisé »

8.4. UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE EN « w »

8.4.1. PRINCIPE

L'emploi de la transformée en w permet la mise en œuvre d'une méthode de synthèse directe qui n'exige aucune approximation et bénéficie de tous les acquis de la synthèse fréquentielle des systèmes continus. La transformée en w a été présentée au § 3.6. et utilisée pour l'étude de la stabilité des systèmes numériques au § 6.2.2.

$$\text{Soit } w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{Tp} - 1}{e^{Tp} + 1} \Leftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$\text{Si } p = j\omega \Rightarrow w = \frac{e^{jT\omega} - 1}{e^{jT\omega} + 1} = \tanh \frac{jT\omega}{2} = j \tan \frac{T\omega}{2} = jv$$

Ainsi $v = \tan \frac{T\omega}{2}$ joue le rôle d'une pulsation fictive variant de 0 à l'infini lorsque la pulsation réelle ω varie de 0 à ω_e .

8.4.2. METHODE DE SYNTHESE EN « w »

La méthode est en tout point comparable aux méthodes fréquentielles mises en œuvre pour la synthèse des systèmes continus.

Soit le système de commande numérique représenté ci-dessous.

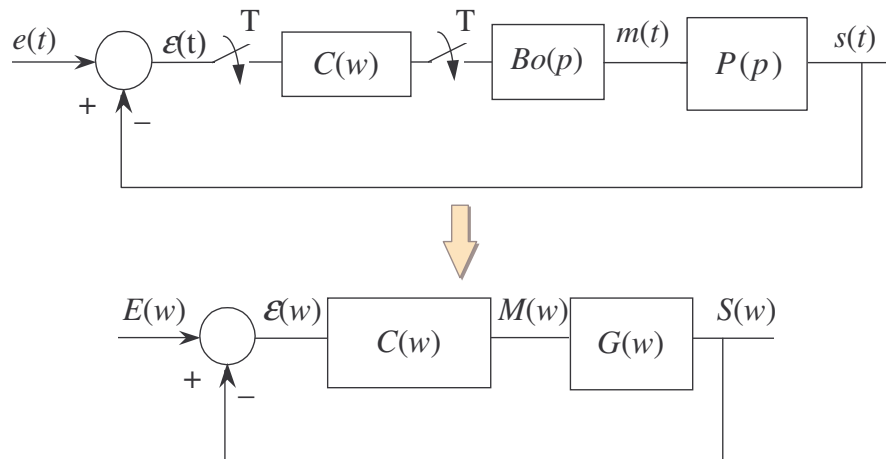


Figure 8 : Définition dans le domaine « w » de la boucle de commande numérisée

Les principales étapes de la méthode sont les suivantes :

- Détermination de $G(w) = \mathbf{W}[B_0(p)P(p)] = \frac{2w}{1+w} \mathbf{W}\left[\frac{P(p)}{p}\right]$ (utiliser le dictionnaire).
- Construction du diagramme de BODE de $G(w)$ pour $w = jv$. Le système n'étant pas, en général, à déphasage minimal, il est nécessaire de construire les courbes de gain et de phase.
- Evaluer le comportement dynamique du système non compensé qui se séduit de :
 - la marge de gain et la marge de phase,
 - la pulsation de résonance et le coefficient de surtension Q ,
 - la bande passante...
- Améliorer les performances par l'insertion d'un correcteur en général de la forme :

$$C(w) = K \cdot \frac{1+aTw}{1+Tw} \cdot \frac{1+T'w}{1+bT'w}$$
- En déduire $C(z)$ et l'équation récurrente à programmer.

8.4.3. EXEMPLE

Soit l'asservissement de position élémentaire :

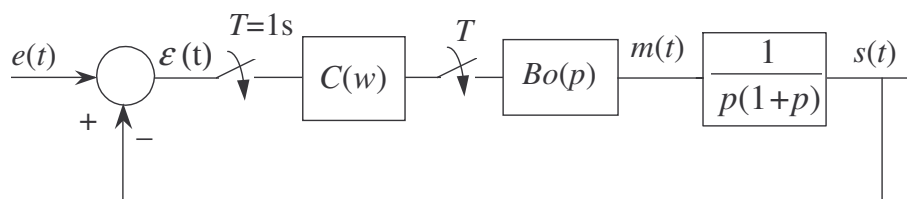


Figure 9 : Asservissement élémentaire de position

On désire que $\begin{cases} \mathcal{E}_v(\infty) < 2 & \text{pour } e(t) = t.u(t) \\ M\phi \approx 60^\circ \end{cases}$

a. Calcul de $G(w)$

$$G(w) = W[B_0(p).P(p)] = \frac{2w}{1+w} \mathbf{W} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right]$$

$$G(w) = \frac{2w}{1+w} \frac{1-w^2}{4w^2} \left[1 - \frac{2w}{1+w \coth(0,5)} \right] = \frac{1-w}{2w} \frac{1+0,164w}{1+2,164w}$$

b. Traçons le diagramme de BODE de $FTBO(w)$ pour $K=1$

```

» n1=[-1 1];d1=[2 0];
» n2=[0.164 1];d2=[2.164 1];
» [n,d]=series(n1,d1,n2,d2);
» margin(n,d)

```

$$K_{os} \text{dB} = 7,58 \text{dB}$$

$$K_{os} = 2,4$$

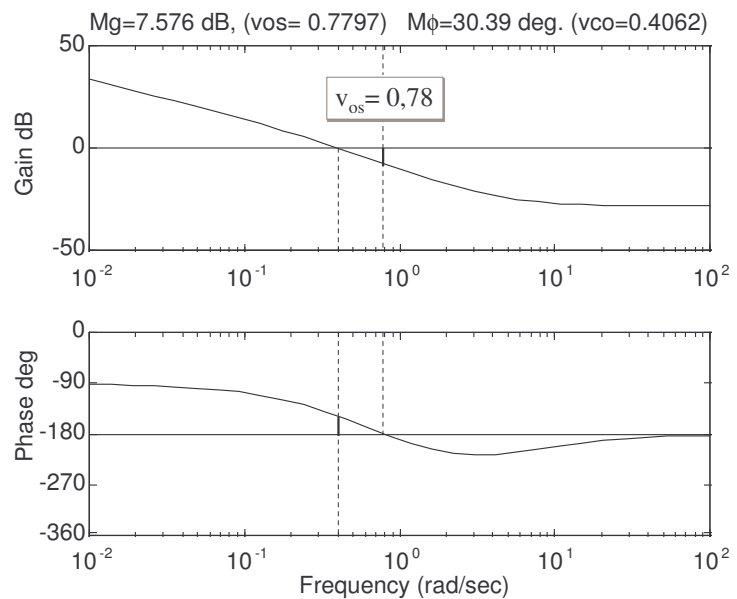
$$v_{os} = 0,78$$

$$\omega_{os} = \frac{2}{T} \text{atan}(v_{os}) = 1,32 \text{rad/s}$$

$$Mg = 7,6 \text{ dB}$$

$$M\phi = 30^\circ$$

$\mathcal{E}_v(\infty) \leq 2 \Rightarrow K \geq 0,5$ Pour cette valeur de K la marge de phase est insuffisante puisque égale à 52° .



c. Choix d'un correcteur numérique

Il s'agit de déterminer le correcteur $C(w)$ permettant de régler le gain statique à la valeur $K \geq 0,5$ tout en garantissant une marge de phase suffisante $M\phi \approx 60^\circ$. On adoptera un correcteur de type «proportionnel-dérivée» tel que :

$$C(w) = 0,75 \frac{1+2w}{1+0,4w}$$

```

» n1=[-1 1];d1=[2 0];
» n2=[0.164 1];d2=[2.164 1];
» [n,d]=series(n1,d1,n2,d2);
» nc=0.75*[2 1];dc=[0.4 1];
» [nbo,dbo]=series(n,d,nc,dc);
» margin(nbo,dbo)

```

$$K_{os} \text{dB} = (10,6 - 2,5) \text{ dB} = 8,1 \text{ dB}$$

$$K_{os} = 2,54$$

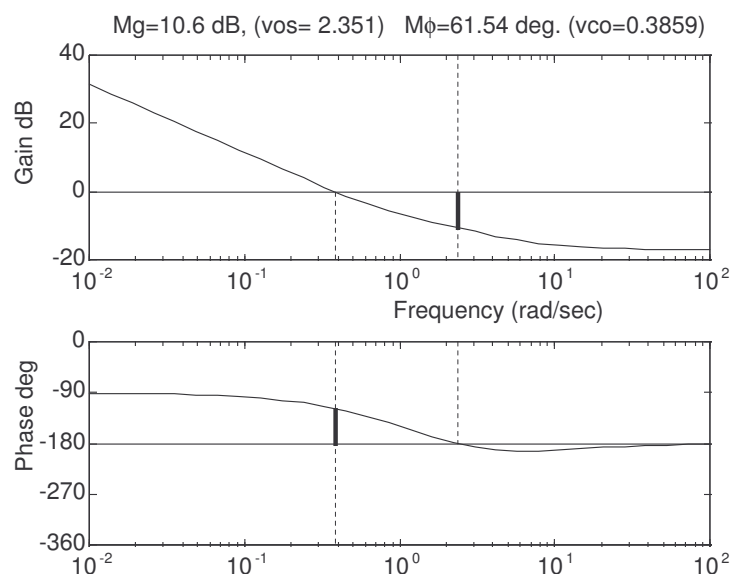
$$v_{os} = 2,351$$

$$\omega_{os} = \frac{2}{T} \text{atan}(v_{os}) = 2,34 \text{rad/s}$$

$$M\phi = 61,5^\circ$$

$$\mathcal{E}_v(\infty) = 1,33$$

$$Mg = 10,6 \text{ dB}$$



d. Equation récurrente du correcteur

Nous avons le correcteur : $C(w) = \frac{0,75 + 1,5w}{1 + 0,4w}$

Avec $w = \frac{z-1}{z+1}$ il vient : $C(z) = \frac{2,25 - 0,75z^{-1}}{1,4 + 0,6z^{-1}}$ soit :

$$C(z) = \frac{M(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{1,607 - 0,536z^{-1}}{1 + 0,43z^{-1}}$$

On trouve ainsi :

$$m_n = 1,607\mathcal{E}_n - 0,536\mathcal{E}_{n-1} - 0,43m_{n-1}$$

Simulons le système compensé afin d'observer sa réponse indicielle.

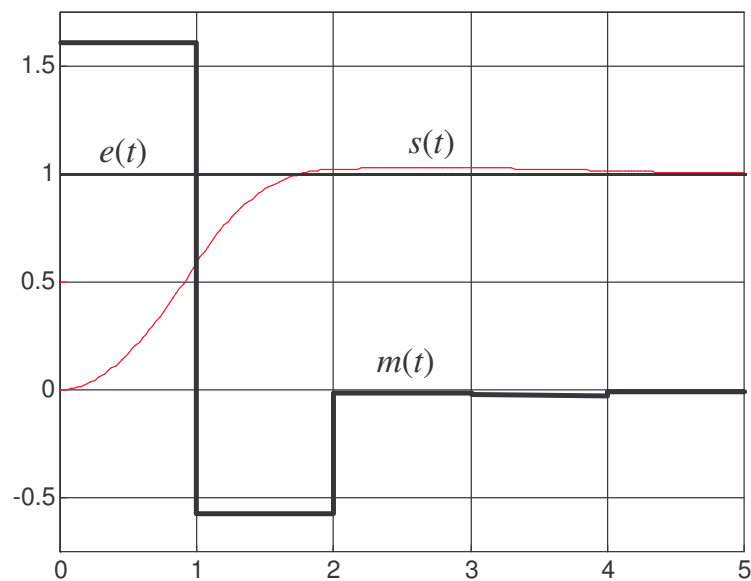
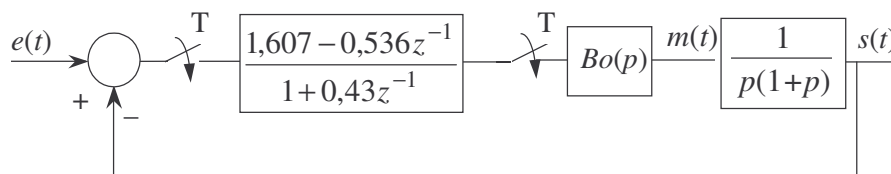


Figure 10 : Simulation du processus corrigé par $C(w)$

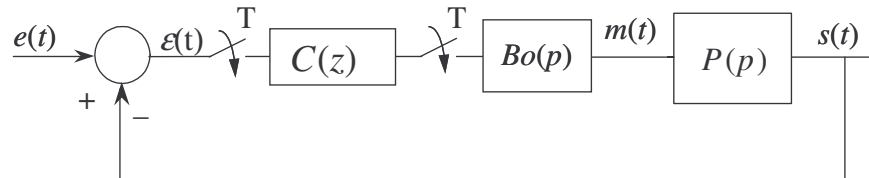
Si les performances en précision ne sont pas atteintes on insère en série avec le correcteur à avance de phase un correcteur de type intégral qui permet d'augmenter le gain statique au « fréquences » basses.

8.5. METHODE DE SYNTHESE EN « Z »

8.5.1. PRINCIPE

Cette méthode s'appuie sur des spécifications temporelles liées à la réponse indicielle et joue sur la localisation des pôles et des zéros de la transmittance globale du système échantillonné. Elle met en application les résultats établis au § 7.2.

Soit le système de commande numérique représenté ci-dessous.



Il s'agit de déterminer le correcteur $C(z)$ physiquement réalisable tel que la $FTBF(z)$ satisfasse les spécifications imposées à la réponse indicielle :

- coefficient d'amortissement du mode dominant,
- dépassement $D1$,
- temps de pic,
- erreur en régime permanent.

$$\text{Soit } \frac{S}{E}(z) = FTBF(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad \text{avec} \quad G(z) = \mathbf{Z}[B_0(p).P(p)]$$

$$\text{On en déduit que } C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{FTBF(z)}{1 - FTBF(z)}$$

$$\text{Posons } G(z) = \frac{Ng}{Dg} \quad \text{et} \quad FTBF(z) = \frac{Nbf}{Dbf}$$

$$C(z) = \frac{Dg[Nbf]}{Ng[Dbf - Nbf]}$$

Le caractère réalisable de $C(z)$ impose **le respect par la $FTBF(z)$ de certaines contraintes.**

- L'excès du nombre de pôles sur le nombre de zéro de $FTBF(z)$ doit être au moins égal à l'excès du nombre de pôles sur le nombre de zéro de $G(z)$:

$$\|Dbf\| - \|Nbf\| \geq \|Dg\| - \|Ng\|$$

- Toutes les racines de $[Dbf - Nbf]$ doivent être à l'intérieur du cercle unité.
- Si $G(z)$ admet des zéros à l'extérieur du cercle unité, ces zéros doivent être aussi des zéros de $FTBF(z)$.

La méthode de synthèse est fondée sur le fait que les principales caractéristiques de la réponse indicielle sont fixées par **un mode dominant** constitué d'un zéro et d'une paire de pôles complexes conjugués. Tous les autres pôles sont situés au voisinage immédiat de l'origine (Cf. § 8.2.3.b.)

$$FTBF(z) = \frac{(1 - z_P)(1 - \overline{z_P})}{(1 - z_Z)} \cdot \frac{(z - z_Z)}{(z - z_P)(z - \overline{z_P})}$$

Cette structure ne peut être retenue que pour la correction d'un système tel que $\|Dg\| - \|Ng\| \leq 1$. Dans le cas contraire il convient d'introduire dans la $FTBF(z)$ un nombre suffisant de pôles additionnels assez proches de l'origine pour rendre $C(z)$ physiquement réalisable. Les différentes étapes de cette méthode de synthèse sont les suivantes.

- Calcul de $G(z)$.
- Choix de la structure de $FTBF(z)$:
 - si nécessaire ajouter les pôles non dominants à la $FTBF$,
 - vérifier que toutes les racines de $[Dbf - Nbf]$ sont à l'intérieur du cercle unité,
 - si $G(z)$ à un zéro extérieur au cercle unité prendre z_Z (zéro de la $FTBF(z)$) égal à ce zéro; dans le cas contraire le choix du zéro de la $FTBF$ est libre.
- Détermination des angles γ et θ_0 .
 - A l'aide de l'abaque A.7.2.a déterminer l'intervalle $[\gamma_m, \gamma_M]$ correspondant au coefficient d'amortissement ζ et à la limite supérieure du dépassement $D1$.
 - A l'aide de l'abaque A.7.2.b déterminer l'intervalle $[\theta_{0m}, \theta_{0M}]$ correspondant à $[\gamma_m, \gamma_M]$, à la période d'échantillonnage T et à la limite supérieure du temps de pic t_p . Choisir une valeur de γ donnant une valeur de θ_0 pas trop élevée.
- Détermination de z_Z et de z_P .

$ z_P = \exp[-\theta_0 \zeta]$ ou encore $ z_P = \exp\left[\frac{-\theta_0 \zeta}{57,3 \sqrt{1-\zeta^2}}\right] \quad \theta_0 \text{ en degré}$	Si le choix du zéro est libre on adopte : $z_Z = \frac{ z_P \cdot [- z_P + \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \text{tg} \gamma]}{1 + z_P \cdot [\sin \theta_0 \cdot \text{tg} \gamma - \cos \theta_0]}$
---	---

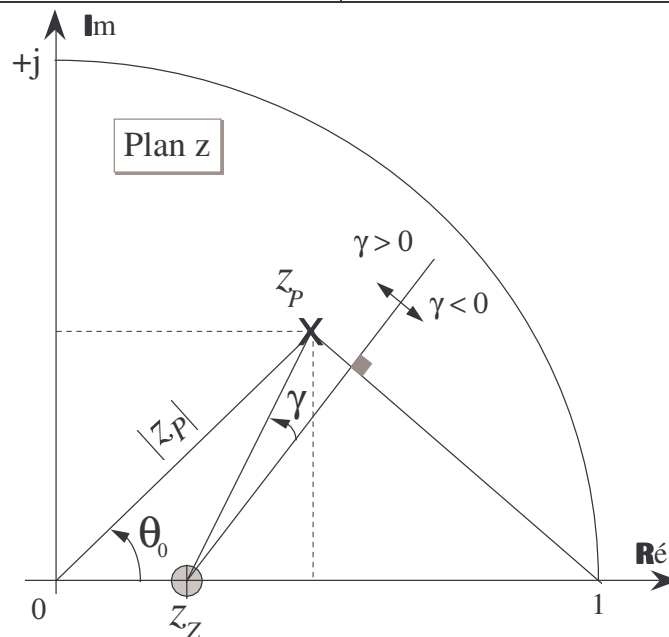


Figure 11 : Placement des pôles et du zéro dans le plan complexe « z »

- Calcul des coefficients de $FTBF(z)$.
- Calcul de la réponse indicielle et vérification que les spécifications sont satisfaites.

$$s_n = 1 - \frac{1}{\cos \gamma} |z_P|^n \cos(n\theta_0 + \gamma)$$

- Détermination du correcteur $C(z)$

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} \quad \text{et} \quad FTBF(z) = \frac{Nbf}{Dbf} = \frac{(1-z_P)(1-\overline{z_P})}{(1-z_Z)} \cdot \frac{(z-z_Z)}{(z-z_P)(z-\overline{z_P})}$$

$$C(z) = \frac{Dg[Nbf]}{Ng[Dbf - Nbf]}$$

8.5.2. EXEMPLE

Soit l'asservissement de position élémentaire :

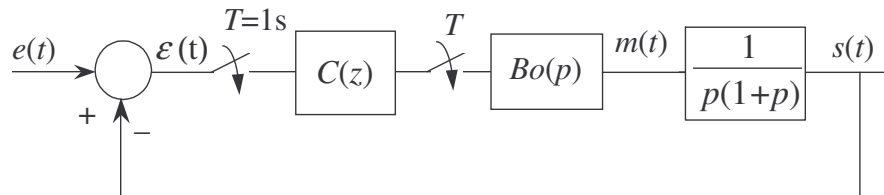


Figure 12 : Asservissement élémentaire de position

Le cahier des charges impose que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(\infty) &\leq 2 \quad \text{pour } e(t) = t.u(t), & \zeta &= 0,7 \Rightarrow \psi = 45^\circ \\ D1 &\leq 15\% \quad \text{pour } e(t) = u(t), & t_p &\leq 3s \end{aligned}$$

a. calcul de $G(z)$

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} = \frac{0,37(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} \quad \text{avec} \quad \|Dg\| - \|Ng\| = 1$$

b. Choix de la structure de $FTBF(z)$:

$$\text{La structure } FTBF(z) = \frac{(1-z_P)(1-\overline{z_P})}{(1-z_Z)} \cdot \frac{(z-z_Z)}{(z-z_P)(z-\overline{z_P})} \text{ convient.}$$

c. Détermination des angles γ et θ_0 .

$$\zeta = 0,7 \quad \text{et} \quad D1 \leq 0,15$$

D'après l'annexe A.7.2.a : $-84^\circ < \gamma < 35^\circ$

$$\text{D'après l'annexe A.7.2.b : } 100^\circ < \frac{t_p \theta_0}{T} < 220^\circ \Rightarrow 33^\circ < \theta_0 < 733^\circ$$

Adoptons $\theta_0 = 40^\circ$

$$t_p = \frac{\pi - \gamma - \psi}{\omega_n \cos \psi} = \frac{T}{\theta_0} (\pi - \gamma - \psi) \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$$

d. Détermination de z_Z et de z_P .

$$|z_P| = \exp \left[\frac{-\theta_0 \zeta}{57,3 \sqrt{1 - \zeta^2}} \right] = \exp \left[\frac{-28^\circ}{40,5^\circ} \right] = 0,5$$

$$z_Z = \frac{|z_P| \cdot [-|z_P| + \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \text{tg} \gamma]}{1 + |z_P| \cdot [\sin \theta_0 \cdot \text{tg} \gamma - \cos \theta_0]} = \frac{0,5 \cdot [-0,5 + 0,766 + 0,1722]}{1 + 0,5 \cdot [0,1722 - 0,766]} = 0,31$$

On peut utiliser l'abaque A.7.1 pour déterminer graphiquement ces résultats.

e. Calcul de $FTBF(z)$

$$FTBF(z) = \frac{(1 - z_P)(1 - \overline{z_P})}{(1 - z_Z)} \cdot \frac{(z - z_Z)}{(z - z_P)(z - \overline{z_P})}$$

$$FTBF(z) = \frac{1 - 0,766 + 0,25}{0,69} \cdot \frac{(z - 0,31)}{(z - 0,5e^{j40^\circ})(z - 0,5e^{-j40^\circ})}$$

$$FTBF(z) = \frac{0,701 \cdot (z - 0,31)}{z^2 - 0,766z + 0,25}$$

f. Calcul de la réponse indicielle et examen des performances

$$s_n = 1 - \frac{1}{\cos \gamma} |z_P|^n \cos(n\theta_0 + \gamma) = 1 - 1,035 \cdot (0,5)^n \cdot \cos(n \cdot 40^\circ + 15^\circ)$$

$$D_1 = \frac{\cos \psi}{\cos \gamma} \cdot \text{Exp}[-(\pi - \gamma - \psi) \cdot \text{tg} \psi] = 0,09$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z) [1 - FTBF(z)]$$

$$E(z) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z) [1 - FTBF(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{Tz}{(z - 1)^2} \frac{z^2 - 1,467z + 0,467}{z^2 - 0,766z + 0,25}$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{Tz}{(z - 1)^2} \frac{(z - 1)(z - 0,467)}{(z^2 - 0,766z + 0,25)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 0,467)}{(z^2 - 0,766z + 0,25)} = 1,1 < 2$$

Les performances désirées sont atteintes.

g. Calcul du correcteur $C(z)$

$$C(z) = \frac{Dg[Nbf]}{Ng[Dbf - Nbf]}$$

$$FTBF(z) = \frac{Nbf}{Dbf} = \frac{0,701 \cdot (z - 0,31)}{z^2 - 0,766z + 0,25}$$

$$G(z) = \frac{Ng}{Dg} = \frac{0,37(z + 0,7)}{(z - 1)(z - 0,37)}$$

$$C(z) = \frac{0,701(z-1)(z-0,37)(z-0,31)}{0,37(z+0,7)(z^2-1,467z+0,467)} = \frac{1,89(z-0,37)(z-0,31)}{(z+0,7)(z-0,467)}$$

$$C(z) = \frac{1,89(z^2 - 0,68z + 0,115)}{(z^2 + 0,233z - 0,327)} = \frac{1,89 - 1,2852z^{-1} + 0,2173z^{-2}}{1 + 0,233z^{-1} - 0,327z^{-2}}$$

Simulons le processus à partir de SIMULINK :

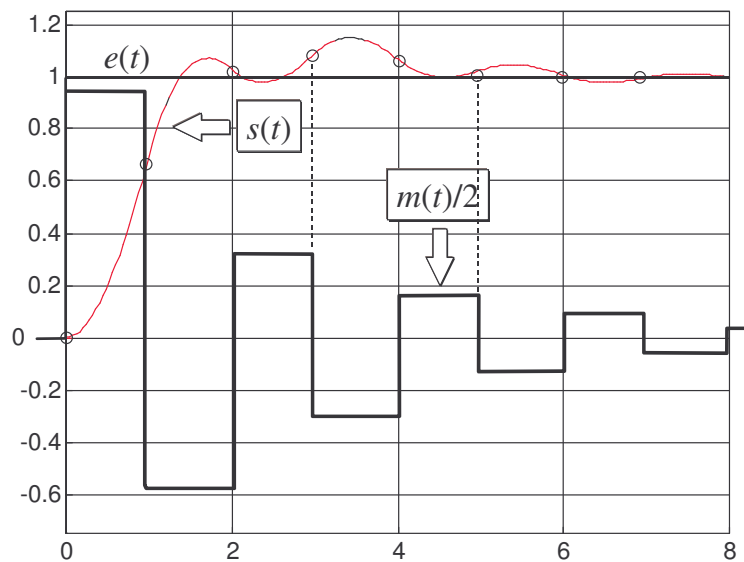
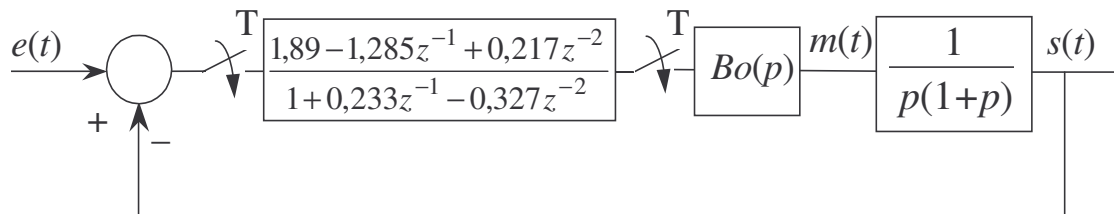


Figure 13 : Simulation du processus compensé

Cette simulation permet de visualiser les oscillations cachées qui échappent aux calculs établis par la transformée en z . On observe que le système compensé se comporte effectivement comme un système du second ordre **aux instants d'échantillonnage**. D'après la méthode exposée au § 7.3.2 la sortie aux instants d'échantillonnage est donnée par :

$$s_n = 1 - \frac{1}{\cos \gamma} |\rho|^n \cos(n\theta_0 + \gamma) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma = 15^\circ \\ \theta_0 = 40^\circ \\ \rho = 0,5 \end{cases}$$

$$s_n = 1 - 1,035 |0,5|^n \cos(n.40^\circ + 15^\circ)$$

$t = nT$	0	1	2	3	4	5
s_n	0	0,7	1,02	1,09	1,06	1,02

Les calculs sont cohérents avec les résultats de la simulation.