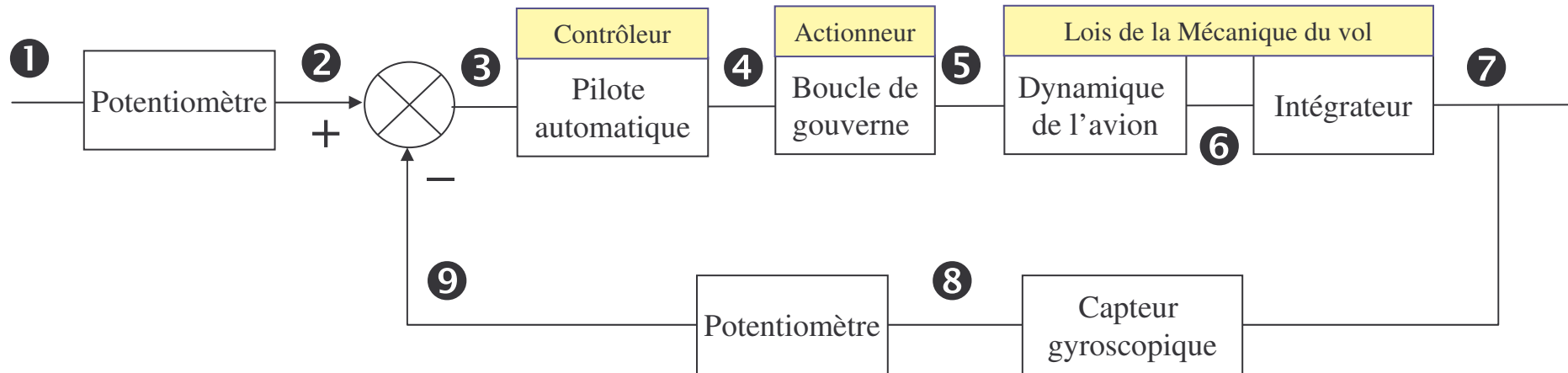


Travaux dirigés (TD1)

Commande classique des systèmes linéaires

Module Au 41
ING2 – Tronc commun
Cours de M. J.-L. Cougnon
(2005-2006)

Question n°1



- ① Consigne affichée par le pilote (e.g. rotation d'un potentiomètre) – radian
- ② Consigne pilote traduite en tension électrique – volt
- ③ Erreur de roulis – volt
- ④ Ordre de braquage de la gouverne – volt
- ⑤ Angle de braquage des ailerons – radians
- ⑥ Vitesse de roulis – radian/seconde
- ⑦ Angle de roulis – radian
- ⑧ Angle de roulis mesuré par la centrale gyroscopique – radian
- ⑨ Angle de roulis traduit en tension – volt

Question n°2-1

Les conditions initiales étant nulles il vient :

$$S(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+12p+32)}$$

Décomposons en éléments simples :

$$S(p) = \frac{5}{4} \left[\frac{1}{3(p+2)} - \frac{1}{2(p+4)} + \frac{1}{6(p+5)} \right]$$

Inversons :

$$s(t) = \frac{5}{4} \left[\frac{1}{3} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{-5t} \right] u(t)$$

Question n°2-2

$$S(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)^2}$$

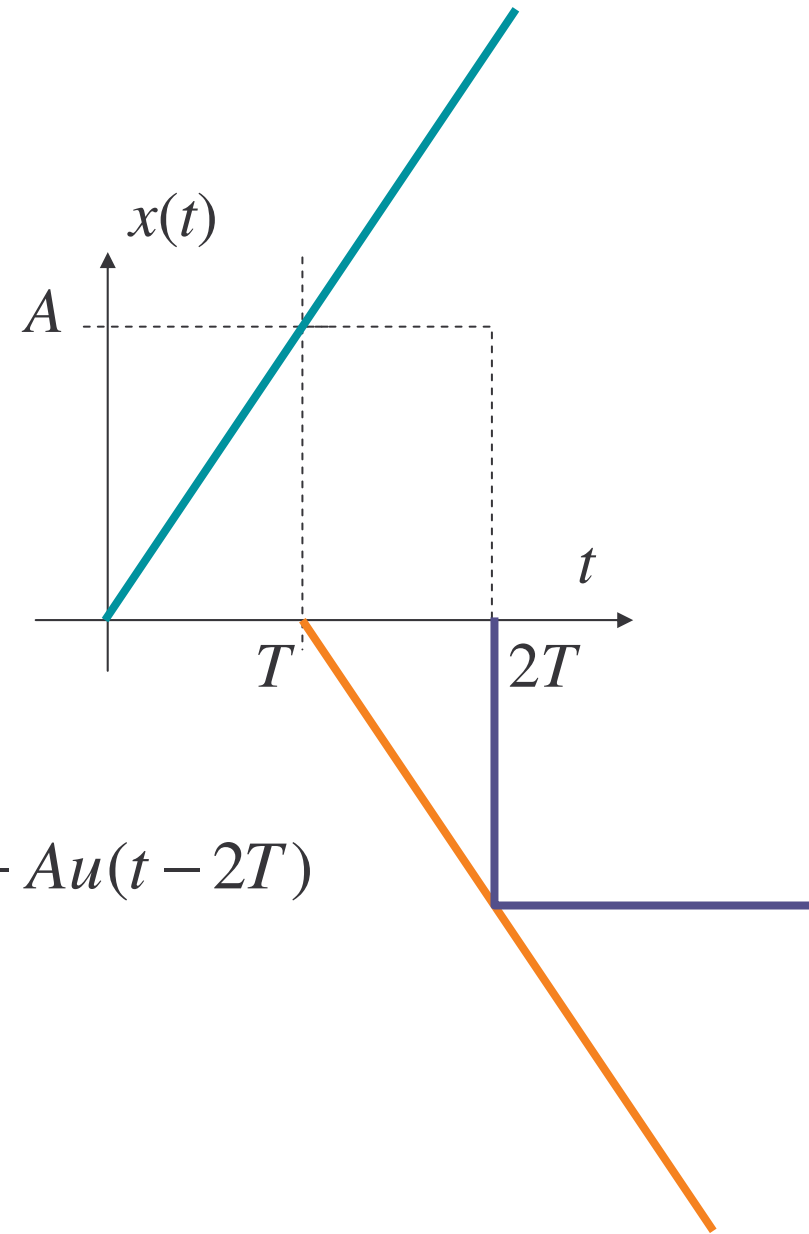
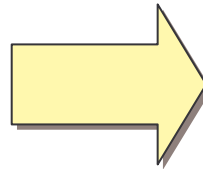
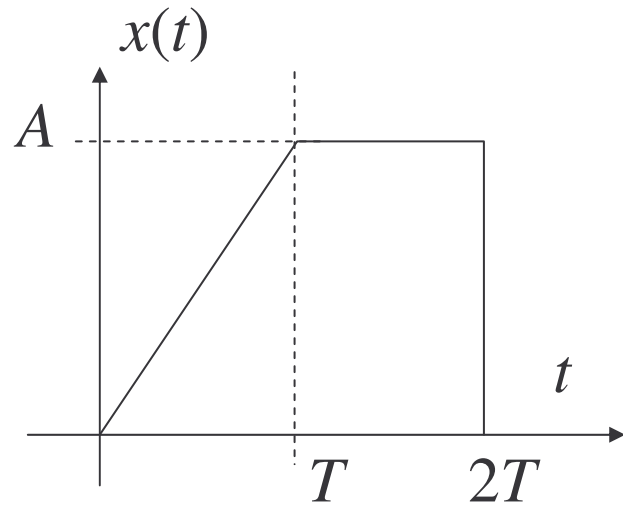
Décomposons en éléments simples :

$$S(p) = \left[\frac{a}{(p+1)} + \frac{b}{(p+2)^2} + \frac{c}{(p+2)} \right] \text{ avec } \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Inversons :

$$s(t) = 2 \left[e^{-t} - e^{-2t} (t+1) \right] u(t)$$

Question n°2-3



$$x(t) = \frac{A}{T}tu(t) - \frac{A}{T}(t-T)u(t-T) - Au(t-2T)$$

$$X(p) = \frac{A}{Tp} \left[\frac{1-e^{-Tp}}{p} - Te^{-2Tp} \right]$$

Question n°3

- On définit une fonction de transfert lorsque les conditions initiales sont nulles.

Question n°3-1:
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 3p + 7}$$

Question n°3-2 :
$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 6 \frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 2 \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

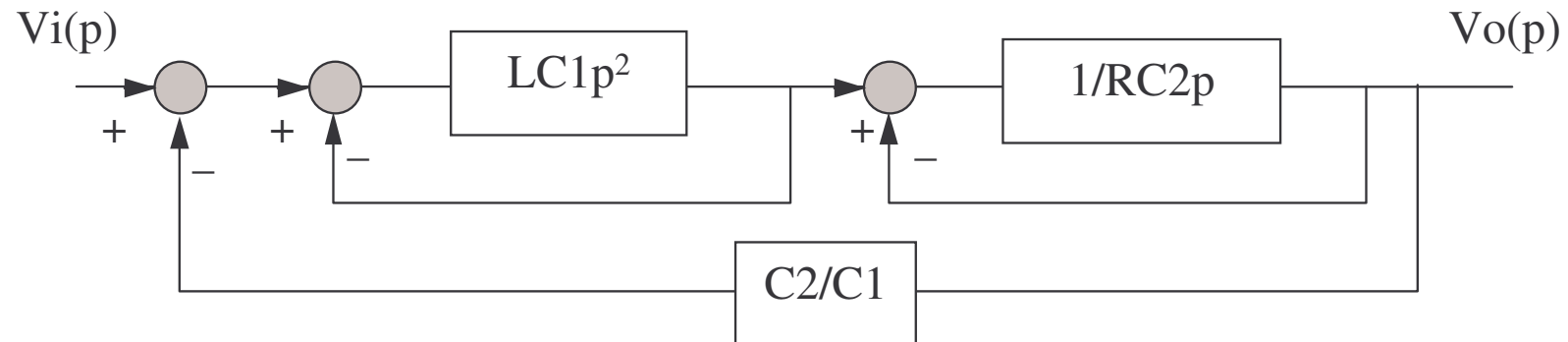
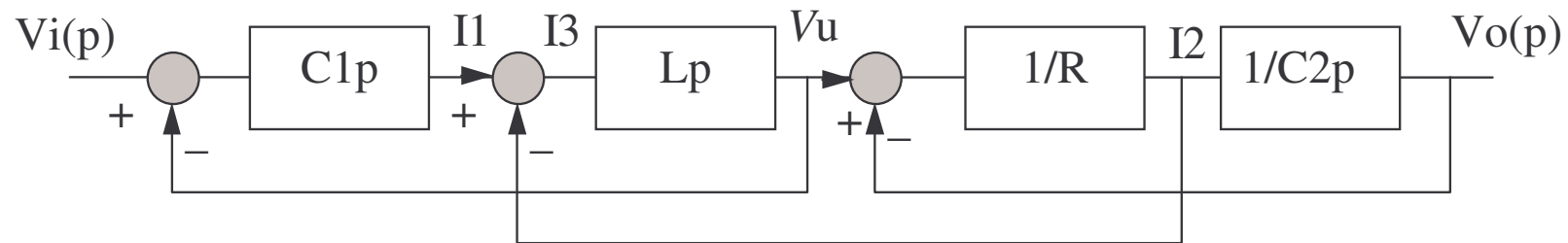
Question n°3-3

$$G(p) = \frac{3p^2 + 9p + 3}{p^5 + 5p^4 + 8p^3 + 6p^2} = \frac{3p^2 + 9p + 3}{p^2(p^3 + 5p^2 + 8p + 6)}$$

$$\text{Forme de Evans : } G(p) = \frac{3(p + 2,618)(p + 0,382)}{p^2(p + 3)(p^2 + 2p + 2)}$$

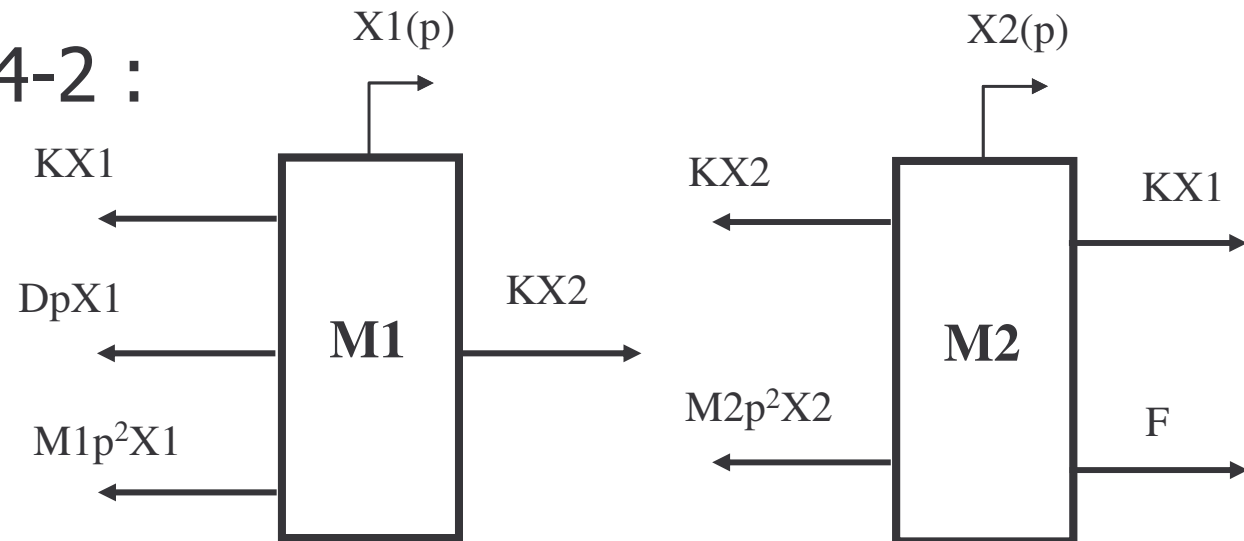
$$\text{Forme de Bode : } G(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{2,618}\right)\left(1 + \frac{p}{0,382}\right)}{2p^2\left(1 + \frac{p}{3}\right)\left(\frac{p^2}{2} + p + 1\right)}$$

Question n°4-1 : Cf. polycopié Au41 chapitre 6 page 4



$$G(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)} = \frac{LC1p^2}{LC1C2Rp^3 + L(C1 + C2)p^2 + RC2p + 1}$$

Question 4-2 :



Masse $M1$	Masse $M2$
$[M1p^2 + Dp + K]X1(p) - KX2(p) = 0$	$[M2p^2 + K]X2(p) - KX1(p) = F$

$$\begin{bmatrix} M1p^2 + Dp + K & -K \\ -K & M2p^2 + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1(p) \\ X2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix}$$

$$\frac{X1}{F} = \frac{K}{(M1p^2 + Dp + K)(M2p^2 + K) - K^2} = \frac{K}{p(M1M2p^3 + M2Dp^2 + (M1 + M2)Kp + KD)}$$

Question n°5

$$G(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_1 + \frac{1}{C_1 p}}{R_2 + \frac{1}{C_2 p}} = -\frac{C_2}{C_1} \frac{1 + R_1 C_1 p}{1 + R_2 C_2 p}$$

$$G(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)} = -\frac{1 + 0,1p}{1 + 0,5P}$$

$$Mp^2 X_1 = -KX_1 - Dp(X_1 - X_2)$$

$$\frac{X_1}{X_2}(p) = \frac{Dp}{Mp^2 + Dp + K} = \frac{\frac{D}{K} p}{\frac{M}{K} p^2 + \frac{D}{K} p + 1}$$

Question n°6 : Résultats

Question n°6-1

$$G(p) = \frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G_1(G_2 + 1)G_3}{(1 + H_2G_2 + H_1G_1G_2)(1 + H_3G_3)}$$

Question n°6-2

$$G(p) = \frac{\theta_{22}(p)}{\theta_{11}(p)} = \frac{G_1G_2G_4G_5G_6G_7}{(1 + G_1G_2G_3)(1 - G_4G_5 + G_4G_5G_6)}$$

Question n°7 – Corrigé

$$FTBF(p) = \frac{K(1-\tau p)}{2p^3 + 3p^2 + (1-K\tau)p + k}$$

$$(1-K\tau) > 0$$

Tableau de Routh



$$K < \frac{1}{\tau}$$

p^3	2	$(1-K\tau)$
p^2	3	K
p^1	$3-K(3\tau+2)$	0
p^0	K	0

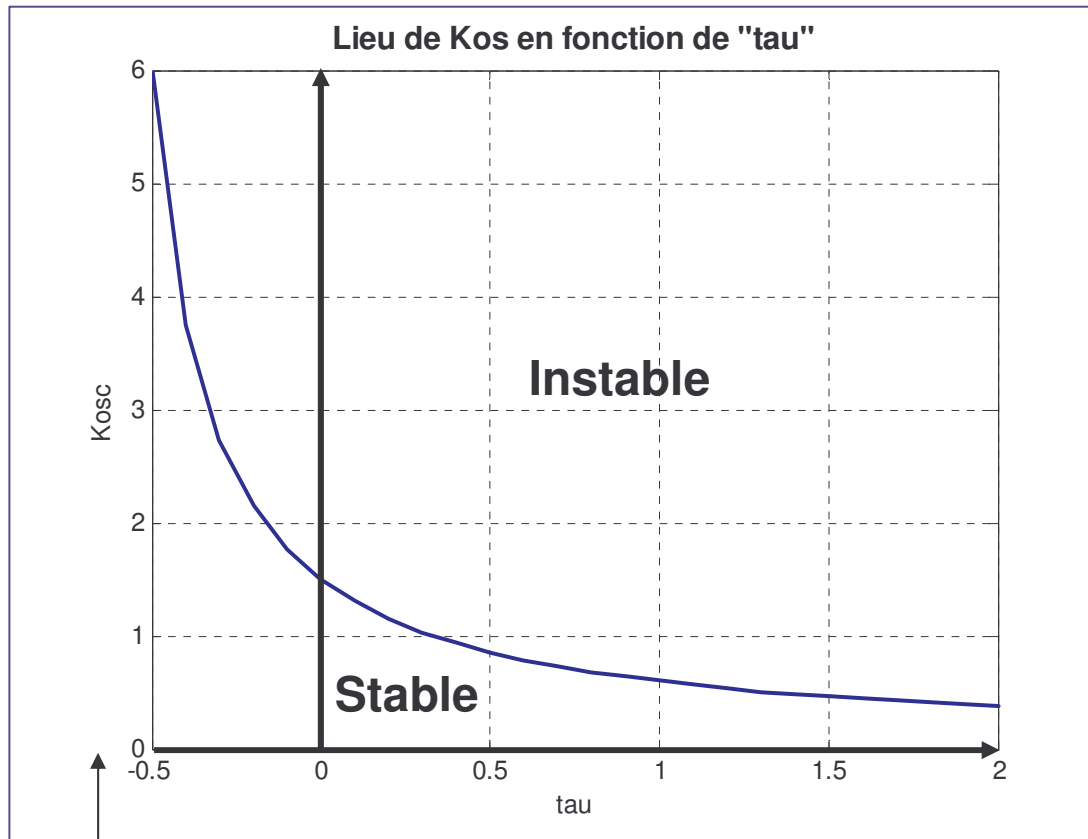
Stabilité: $K > 0$ et $K < \frac{3}{3\tau+2}$ (condition qui répond à $K < \frac{1}{\tau}$)

si $\tau = 1s$ $K_{osc} = 0,6$

Oscillations: $\omega_{osc} = \frac{1}{\sqrt{3\tau+2}}$

si $\tau = 1s$ $\omega_{osc} = 0,447 \text{ rad/s}$

Question n°7 – Corrigé



Asymptote pour $\tau = -2/3$

```
%
% Script Au41_TD1_0506.m
% Cours Au 41 de J.-L. Cougnon
% Version du 24 octobre 2005
%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc;
x=-0.5:0.1:2;
for i=1:26
K(i)=3/(3*x(i)+2);
end
figure(1);plot(x,K);grid on
title('Lieu de Kos en fonction de "tau"')
xlabel('tau');ylabel('Kosc')
%
```

Question n°7 – Corrigé

```
%
num=0.15*[-1 1];
den=[2 3 1 0];
ftbo=tf(num,den);
ftbf=feedback(ftbo,1)
[nbf,dbf]=tfdata(ftbf,'v');
[r,p,k]=residue(nbf,dbf)
%
```

Transfer function:

$$\frac{-0.15 s + 0.15}{2 s^3 + 3 s^2 + 0.85 s + 0.15}$$

$$r =$$

$$0.1453$$

$$-0.0727 - 0.1932i$$

$$-0.0727 + 0.1932i$$

p =

$$-1.1974$$

$$-0.1513 + 0.1994i$$

$$-0.1513 - 0.1994i$$

k =

$$[]$$

Question n°8 : UFSS

$$KG_0(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_e(p)} = \frac{-0,125(p + 0,435)}{(p + 1,23)(p^2 + 0,226p + 0,0169)}$$

On néglige le pôle et le zéro du premier ordre mais on maintient le gain statique

$$KG_{2ord}(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_e(p)} = \frac{\boxed{K = \text{Gain statique}} \cdot \boxed{-0,125 \cdot 0,435}}{\boxed{1,23} \cdot (p^2 + 0,226p + 0,0169)}$$

Caractéristiques

$$K = -2,8651 \quad \zeta = 0,8692 \quad \omega_n = 0,13 \text{ rad/s}$$

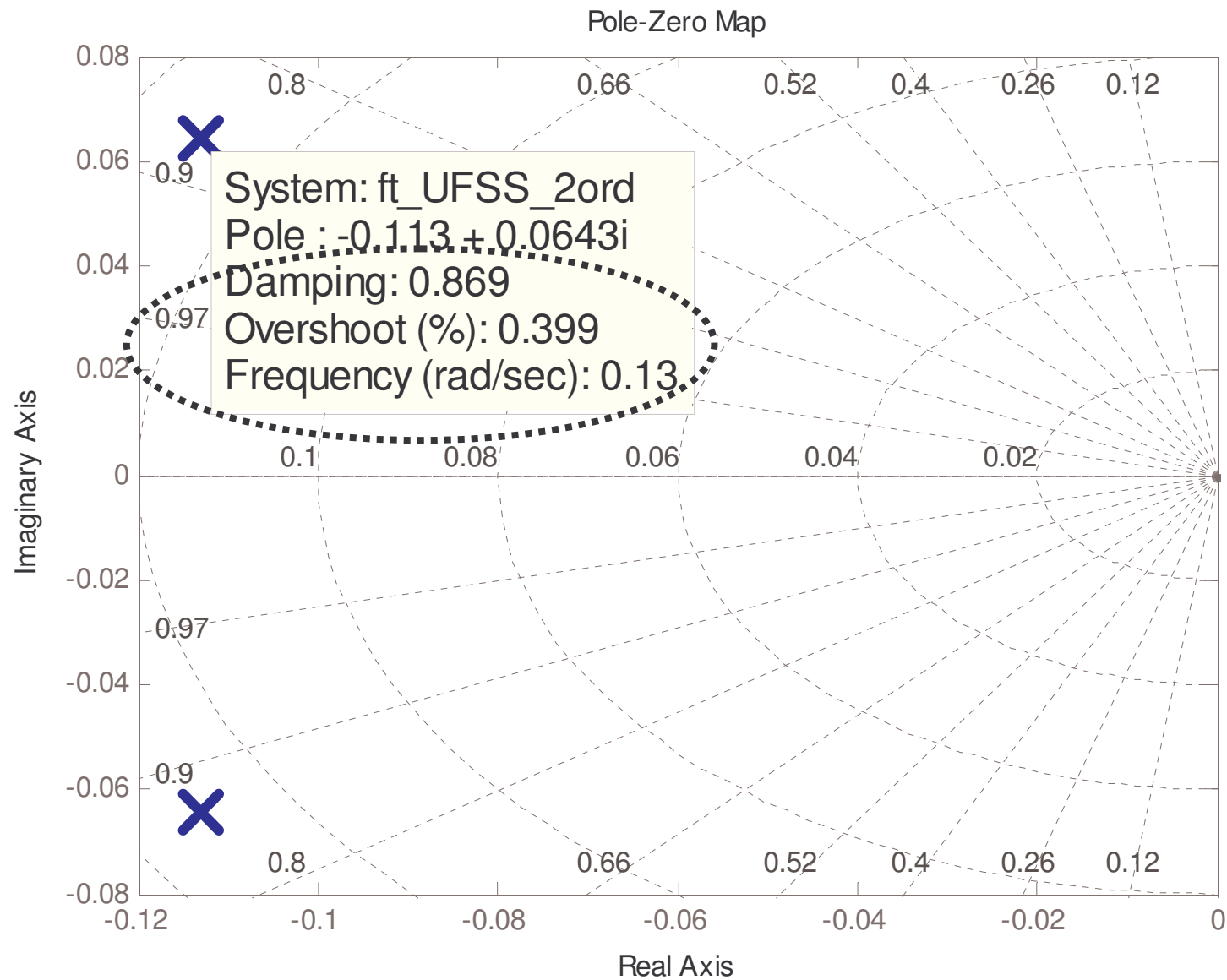
$$tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 48,88 \text{ s}$$

$$D_1 = \exp\left[-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] = 0,4\%$$

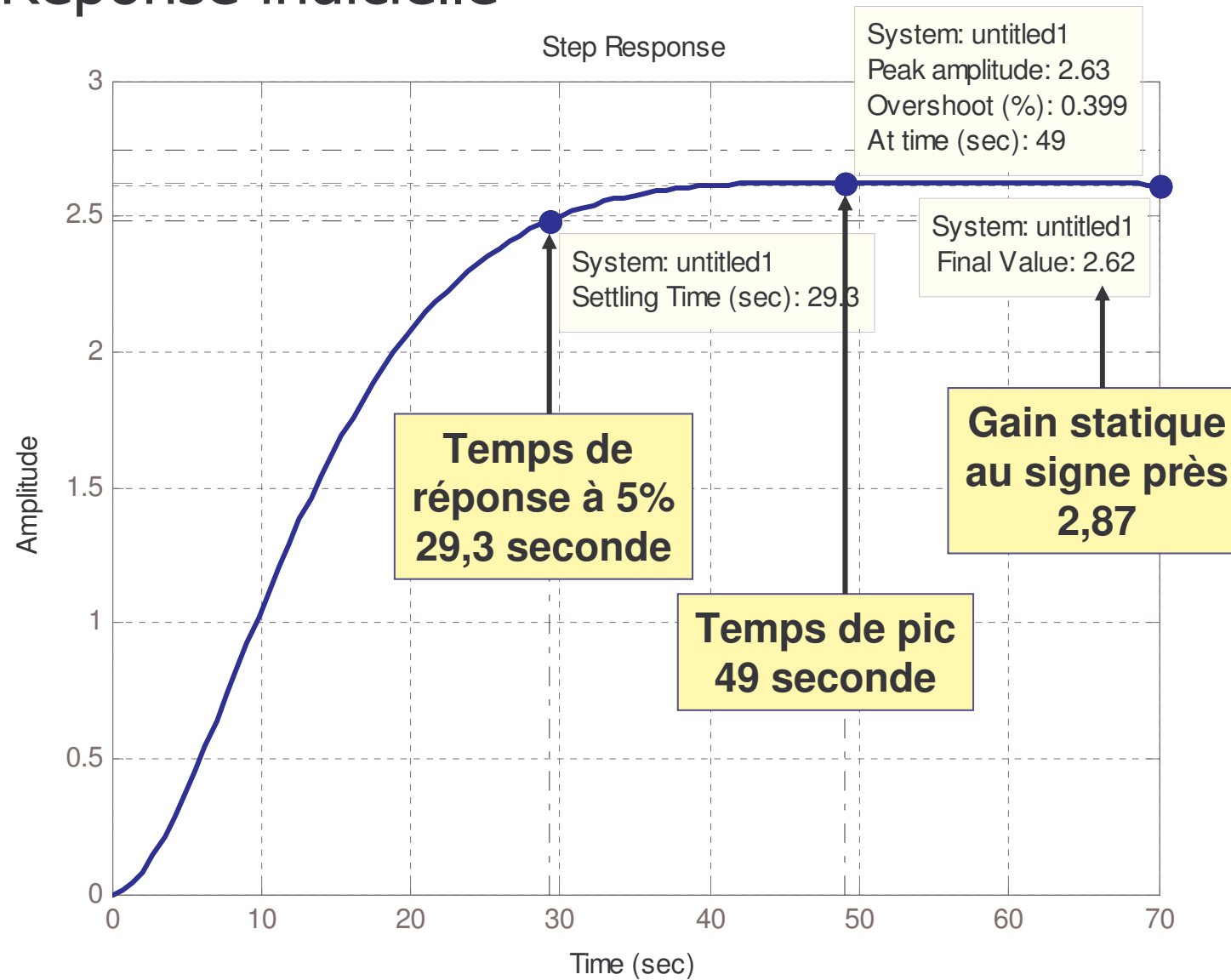
$$\theta(t) = \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi)\right) u(t) \quad \text{soit}$$

$$\theta(t) = \left(1 - \frac{e^{-0,113t}}{0,4944} \cos(0,0643t - 60,4^\circ)\right) u(t)$$

Pôles du 2d ordre dans le p -plan

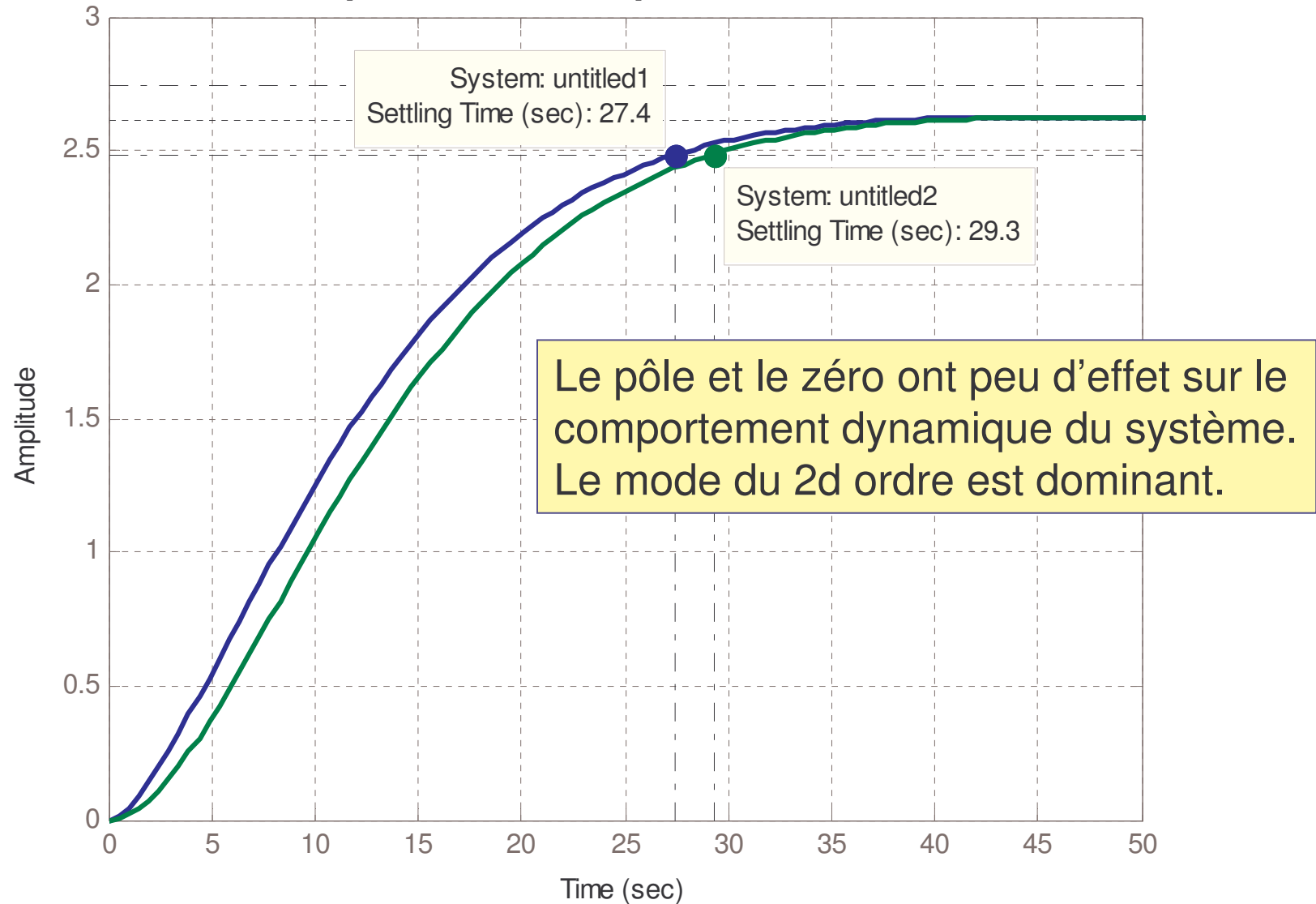


Réponse indicielle



Effets du pôle et du zéro

Comparaison des réponses indicielles



Script MATLAB de la question n°8

```
clear all;clc;
ft_UFSS_2ord=tf(-0.125*0.435,conv([1.23],[1 0.226 0.0169]))
K=dcgain(ft_UFSS_2ord)
wn=sqrt(0.0169)           % Pulsation propre non amortie
zeta=0.226/(2*wn)         % Coefficient d'amortissement
alpha=sqrt(1-zeta^2);
tp=pi/wn/alpha            % Temps de pic
D1=exp(-zeta*pi/alpha)    % 1er dépassement
zeta_wn=zeta*wn;          % Partie réelle des pôles complexes
wp=wn*alpha               % Pulsation propre amortie
psi=asin(zeta)/pi*180     % Angle des pôles complexes
figure(1);pzmap(ft_UFSS_2ord);grid
figure(2);step(-ft_UFSS_2ord,70);grid
ft_UFSS=tf(-0.125*[1 0.435],conv([1 1.23],[1 0.226 0.0169]))
figure(3);step(-ft_UFSS,-ft_UFSS_2ord);grid
title('Comparaison des réponses indicielles')
```



Command window

Transfer function:

-0.05438

$1.23 s^2 + 0.278 s + 0.02079$

K =

-2.6158

wn =

0.1300

zeta =

0.8692

tp =

48.8790

D1 =

0.0040

wp =

0.0643

psi =

60.3694

Transfer function:

-0.125 s - 0.05438

$s^3 + 1.456 s^2 + 0.2949 s + 0.02079$