

## Chapitre 6

# Modèles mathématiques des systèmes linéaires continus

### 6.1. Introduction

### 6.2. Mise en équation des circuits électriques

- 6.2.1. Lois générales de l'électricité
- 6.2.2. Impédance isomorphe
- 6.2.3. Circuits actifs
- 6.2.4. Quelques d'applications

### 6.3. Mise en équation des systèmes mécaniques

- 6.3.1. Lois générales de la mécanique
- 6.3.2. Etude d'un accéléromètre pour CNI
- 6.3.3. Etude d'un premier dispositif mécanique
- 6.3.4. Etude d'un second dispositif mécanique
- 6.3.5. Etude d'un troisième dispositif mécanique
- 6.3.6. Etude d'une suspension d'automobile
- 6.3.7. Entraînement d'une charge en rotation
- 6.3.8. Transmission mécanique

### 6.4. Notions d'analogies électromécaniques

- 6.4.1. Généralités
- 6.4.2. Exemples d'application

### 6.5. Mise en équation des actionneurs électriques

- 6.5.1. Lois fondamentales
- 6.5.2. Equations générales des moteurs continus
- 6.5.3. Transmittance du moteur continu commandé par l'induit
- 6.5.4. Transmittance du moteur continu commandé par l'inducteur

### 6.6. Mise en équation des systèmes hydrauliques

- 6.6.1. Régulation de niveau d'une cuve
- 6.6.2. Servocommande hydraulique
- 6.6.3. Exemple : régulation de vitesse d'une turbine.

## 6.1. INTRODUCTION

La réalisation d'un système de commande met en oeuvre des technologies et des processus de nature physique très diverse : électronique, électrique, hydraulique, mécanique, optique, pneumatique, thermique, etc. Pour résoudre les problèmes de commande auxquels il est confronté l'automaticien doit s'appuyer sur une *culture polytechnique* lui permettant d'établir et d'interpréter les relations qui traduisent le *comportement statique et dynamique* des processus et des organes (actionneurs et capteurs) participant au fonctionnement du dispositif. Ces relations constituent *le modèle mathématique du système*.

La recherche d'un modèle mathématique est toujours un problème délicat que l'on peut traiter selon deux approches différentes :

- *appliquer les lois générales de la physique* afin de déterminer la fonction de transfert recherchée,
- *mettre en oeuvre une démarche expérimentale* permettant, à travers des essais types, de déterminer un modèle satisfaisant.

La modélisation doit fournir une représentation du système sur laquelle on puisse appliquer des méthodes mathématiques permettant la réalisation d'un dispositif de commande assurant au système global le respect des performances imposées cahier des charges.

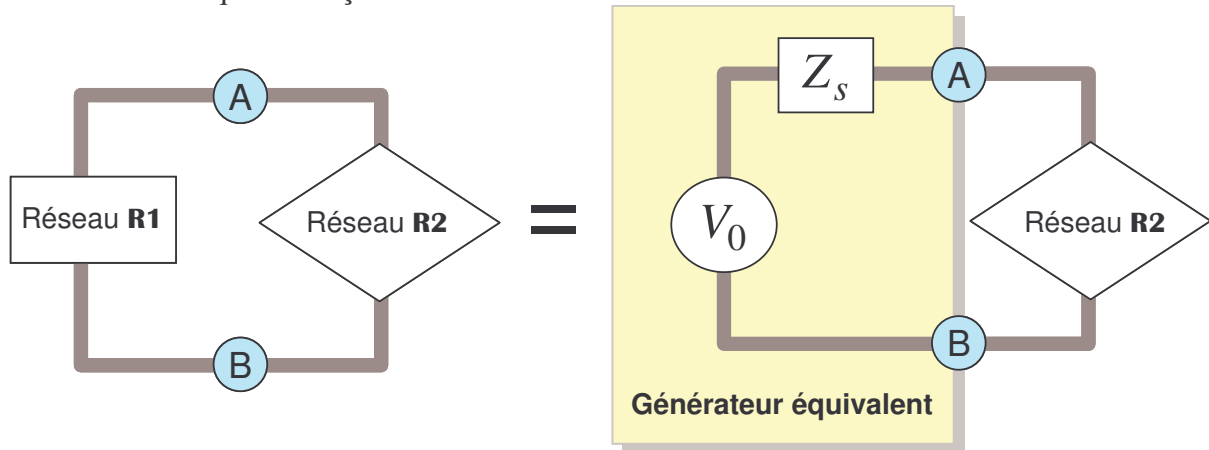
Tout l'art de l'ingénieur consiste à établir, sur la base des informations dont il dispose, le modèle le plus simple qui rende compte avec suffisamment de précision des comportements observés.

## 6.2. MISE EN EQUATION DES CIRCUITS ELECTRIQUES

### 6.2.1. LOIS GENERALES DE L'ELECTRICITE

Les réseaux électriques obéissent aux lois d'OHMS et de KIRCHOFF (loi des nœuds  $\sum I(p) = 0$  et loi des mailles  $\sum V(p) = 0$ ).

Le théorème de THEVENIN permet, dans de nombreux cas, de résoudre élégamment un problème de réseaux électrique. Enonçons ce théorème :



Le réseau **R1** est équivalent à un générateur caractérisé par :

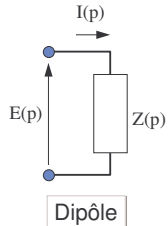
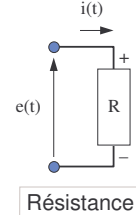
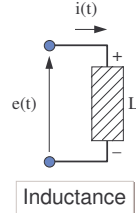
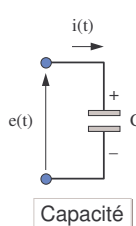
- une « fém »  $V_0$  égale à la tension vue des bornes A et B lorsque le réseau **R2** est déconnecté ; c'est la tension à vide du réseau **R1**.
- une impédance interne équivalente  $Z_s$  (Impédance de sortie de **R1**) égale à l'impédance « vue » des bornes A et B lorsque le réseau **R2** est déconnecté et toutes les sources de tension et de courant de **R1** éteintes (sources de tension en court circuit, sources de courant ouvertes).

### 6.2.2. IMPEDANCE ISOMORPHE

Soit un dipôle passif soumis à une différence de potentiel  $e(t)$  et parcouru par un courant  $i(t)$ . Par définition on appelle *impédance isomorphe* le quotient :

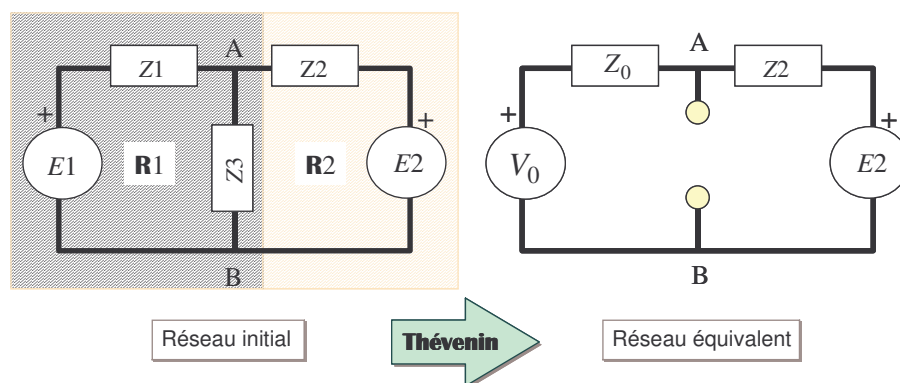
$$Z(p) = \frac{E(p)}{I(p)} \quad \text{avec} \quad E(p) = \mathbf{L}e(t) \quad \text{et} \quad S(p) = \mathbf{L}s(t)$$

Le tableau ci-après donne l'impédance isomorphe des dipôles élémentaires (résistance, capacité, inductance).

Elément passif	Impédance
 <p>Dipôle</p>	$Z(p) = \frac{E(p)}{I(p)}$ $E(p) = \mathcal{L}e(t) \quad \text{et} \quad I(p) = \mathcal{L}i(t)$
 <p>Résistance</p>	$e(t) = R.i(t)$ $E(p) = R.I(p)$ $Z_R = R$
 <p>Inductance</p>	$e(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $E(p) = Lp.I(p)$ $Z_L = \frac{E}{I}(p) = Lp$
 <p>Capacité</p>	$\int_0^t i(t)dt = C e(t)$ $\frac{I(p)}{p} = C.E(p)$ $Z_C = \frac{E}{I}(p) = \frac{1}{Cp}$

Lorsque  $p$  est un nombre imaginaire pur ( $p = j\omega$ ) on retrouve l'expression de l'impédance complexe, encore appelée **impédance isochrone**. Elle correspond au régime harmonique (ou cissoïdal !).

**Exercice 6.1.** : Calculer la tension  $V_{A/B}$  du réseau :



$$V_0(p) = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} E_1(p) \quad \text{et} \quad Z_s(p) = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

$$V_{A/B}(p) = (V_0 - E_2) \frac{Z_2}{Z_2 + Z_s} + E_2 \quad \text{soit :}$$

$$V_{A/B}(p) = \frac{Z_2 \cdot Z_3 E_1 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot E_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}$$

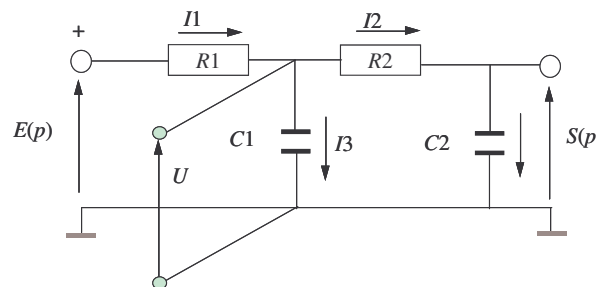
On peut aussi appliquer **le théorème de superposition**. La démarche est alors la suivante :

$$E_1 \neq 0 \text{ et } E_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{Z_2 // Z_3}{Z_1 + (Z_2 // Z_3)} E_1 = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1} E_1$$

$$E_1 = 0 \text{ et } E_2 \neq 0 \Rightarrow V_2 = \frac{Z_1 // Z_3}{Z_2 + (Z_1 // Z_3)} E_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1} E_2$$

$$V_{A/B} = \frac{Z_2 \cdot Z_3 \cdot E_1 + Z_1 \cdot Z_3 \cdot E_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}$$

**Exercice 6.2.** : Calculer la fonction de transfert du circuit électrique suivant :



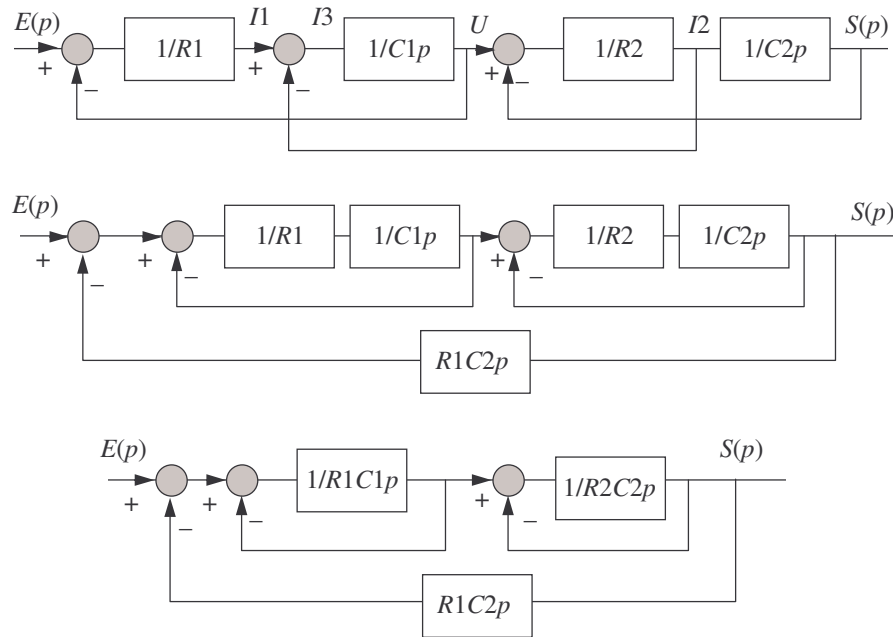
a. Par application du théorème de THEVENIN

On trouve :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2) p^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) p + 1}$$

b. Par la technique des schémas fonctionnels

On peut aussi calculer  $H(p)$  en traçant le schéma fonctionnel correspondant aux équations du circuit et en simplifiant ce schéma par application de la méthode de transformation des schémas fonctionnels présentée au chapitre 4.



On obtient 3 boucles imbriquées. Pour calculer la transmittance recherchée on réduit les boucles par application des règles de simplification des schémas fonctionnels étudiées au chapitre 4.

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + R_1 C_1 p} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{1}{1 + R_2 C_2 p}$$

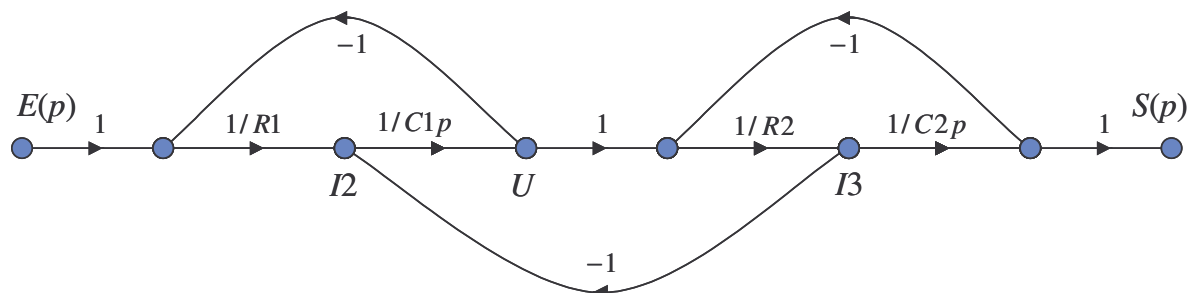
Soit

$$H(p) = \frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2) p^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) p + 1}$$

On vérifiera que les pôles de cette transmittance sont réels négatifs quelle que soit la valeur des éléments  $R$  et  $C$ , et qu'en conséquence cette fonction de transfert est stable.

*c. Par application de la règle de MASON*

On peut encore résoudre ce problème par la technique des graphes de fluence étudiée au chapitre 4.



Posons  $T_1 = 1/R_1 C_1 p$ ,  $T_2 = 1/R_2 C_2 p$  et  $T_3 = 1/R_2 C_1 p$

Appliquons la règle de MASON :

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} \sum_i T_i \Delta_i \quad \text{avec} \quad \Delta = 1 - \sum_j B_j + \sum_j \sum_k B_j B_k - \sum_j \sum_k \sum_l B_j B_k B_l + \dots$$

$$\sum_j B_j = -(T_1 + T_2 + T_3)$$

$$\sum_j \sum_k B_j B_k = T_1 T_2$$

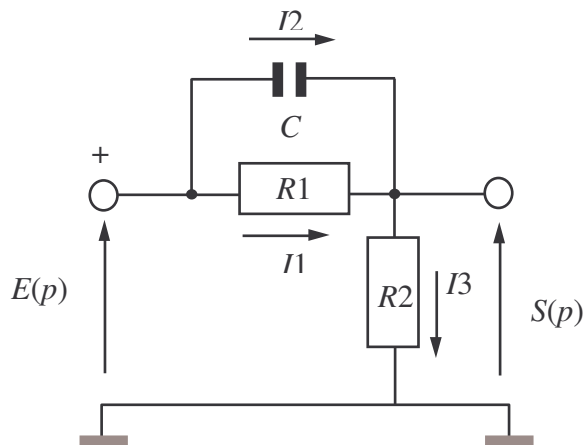
$$T_i = T_1 T_2$$

$$\Delta_i = 1$$

Ainsi :

$$T(p) = \frac{T_1 T_2}{1 + T_1 + T_2 + T_3 + T_1 T_2} = \frac{1}{(R_1 R_2 C_1 C_2) p^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) p + 1}$$

**Exercice 6.3.** : Calculer la fonction de transfert du circuit électrique (réseau à avance de phase) suivant :

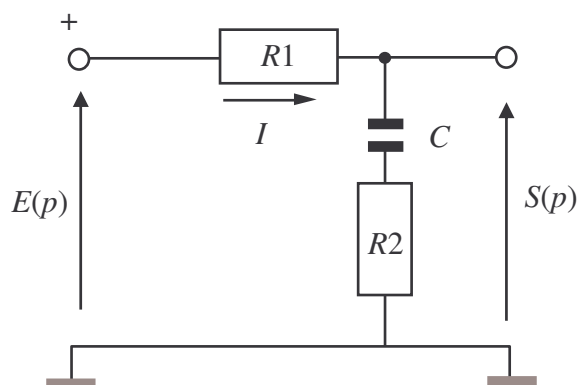


On vérifiera que :

$$H(p) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + a \tau p}{1 + \tau p}$$

avec  $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$  et  $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$

**Exercice 6.4.** : Calculer la fonction de transfert du circuit électrique (réseau à retard de phase) suivant :



On vérifiera que :

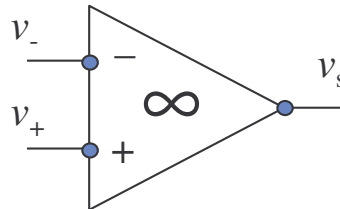
$$H(p) = \frac{1 + b \tau p}{1 + \tau p}$$

avec  $\begin{cases} \tau = (R_1 + R_2) C \\ b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \end{cases}$

Ces réseaux à avance et à retard de phase sont utilisés pour améliorer les performances des systèmes asservis.

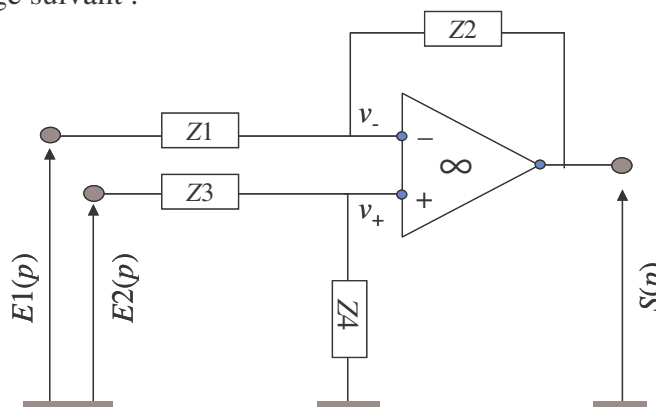
### 6.2.3. CIRCUITS ACTIFS

Les circuits actifs sont conçus à partir d'éléments actifs (amplificateurs). En automatique on utilise des amplificateurs opérationnels pour réaliser la synthèse de fonctions de transfert de type analogiques. Ces amplificateurs sont des circuits intégrés que nous caractériserons de manière idéale par un gain infini ( $\infty$ ), une impédance d'entrée quasi infinie ( $Z_e = \infty$ ) et une impédance de sortie quasi nulle ( $Z_s = 0$ ).



Le gain  $G$  de l'amplificateur étant infini et la tension de sortie finie  $v_s = G(v_+ - v_-)$  (pas de saturation) la tension entre les bornes  $+$  et  $-$  est infiniment petite ( $\varepsilon = v_+ - v_-$  tend vers zéro et à la limite  $v_+ = v_-$ ). Cette remarque est à la base de la méthode de calcul proposée pour déterminer la transmittance de montages utilisant cette technique de synthèse. On se reportera au cours d'électronique pour un examen plus approfondi de la question.

Considérons le montage suivant :



Calculons  $V_+$  et  $V_-$ , dans le domaine symbolique, par application du théorème de superposition en supposant que l'amplificateur opérationnel est ôté.

$$E1 \neq 0 \text{ et } S = 0 \Rightarrow V_{-1} = \frac{Z2}{Z1 + Z2} E1$$

$$E1 = 0 \text{ et } S \neq 0 \Rightarrow V_{-2} = \frac{Z1}{Z2 + Z1} S$$

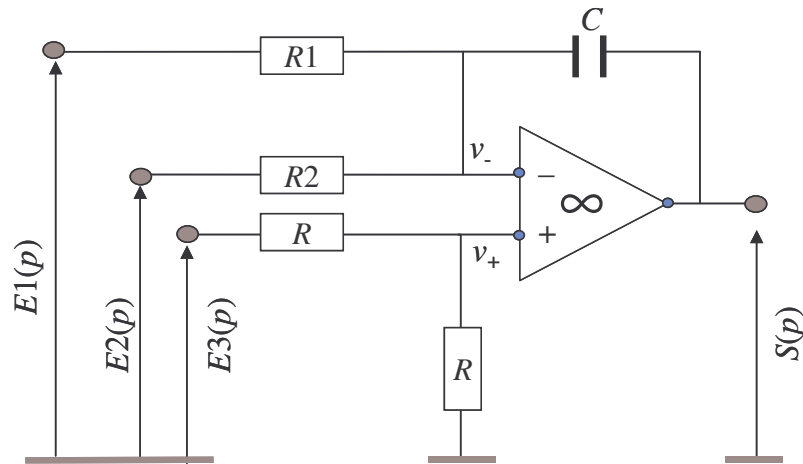
$$V_- = V_{-1} + V_{-2} = \frac{Z2}{Z2 + Z1} E1 + \frac{Z1}{Z2 + Z1} S \text{ et } V_+ = \frac{Z4}{Z4 + Z3} E2 \text{ et}$$

On insère l'amplificateur opérationnel à sa place. Il agit alors sur la sortie  $S$  afin que les tensions  $V_+$  et  $V_-$  soient égales.

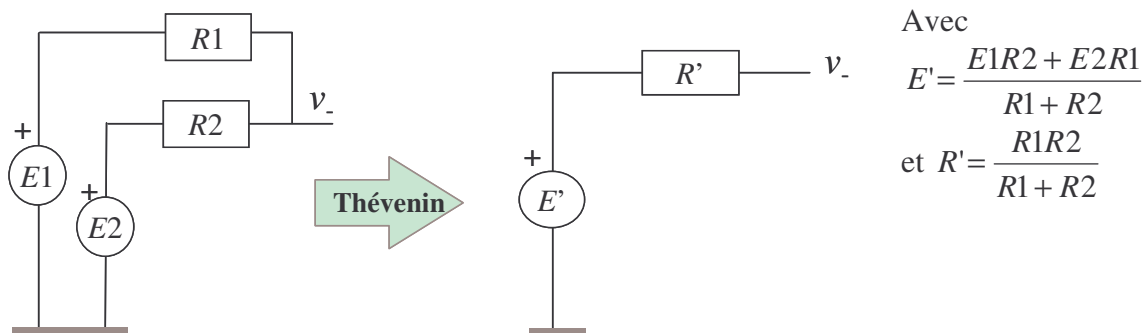
$$V_- = \frac{Z2}{Z2 + Z1} E1 + \frac{Z1}{Z2 + Z1} S = V_+ = \frac{Z4}{Z4 + Z3} E2$$

$$S = \frac{Z4 \cdot (Z2 + Z1)}{(Z4 + Z3) \cdot Z1} E2 - \frac{Z2}{Z1} E1$$

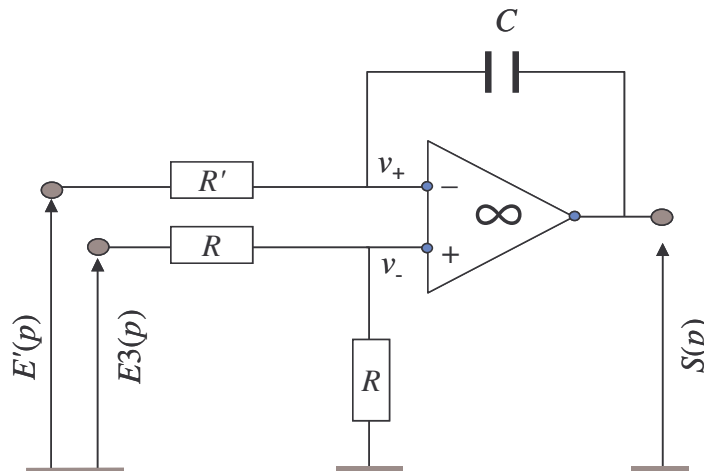
**Exercice 6.5.** : Calculer la fonction de transfert du circuit électrique suivant :



Pour résoudre ce problème, simplifions les deux branches comportant les générateurs  $E1$  et  $E2$  en appliquant le théorème de THEVENIN.



Le schéma équivalent du circuit est le suivant :



Appliquons la relation calculée plus haut  $S = \frac{Z4(Z2 + Z1)}{(Z4 + Z3)Z1} E3 - \frac{Z2}{Z1} E'$  soit :

$$S = \frac{R(\frac{1}{Cp} + R')}{2R.R'} E3 - \frac{1}{R'Cp} E' = \frac{1 + R'Cp}{2R'Cp} E3 - \frac{1}{R'Cp} E'$$



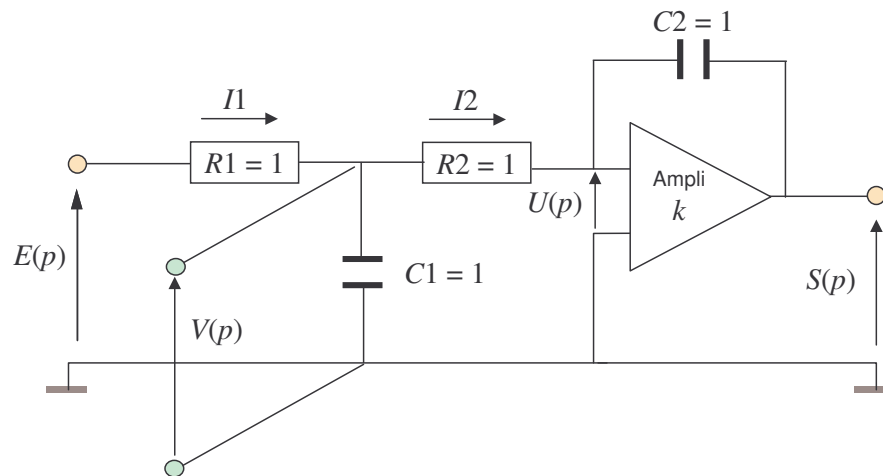
Remplaçons  $E'$  et  $R'$  par leurs valeurs. Il vient :

$$S(p) = \frac{R1 + R2 + R1R2Cp}{2R1R2Cp} E3(p) - \frac{E1(p)}{R1Cp} - \frac{E2(p)}{R2Cp}$$

#### 6.2.4. QUELQUES D'APPLICATIONS

##### a. Etude d'un réseau actif

On considère le montage électronique dont le schéma est donné ci-après. Ce montage comporte des éléments passifs ainsi qu'un amplificateur de gain en tension  $k$ . Cet amplificateur est supposé parfait, c'est à dire que son impédance d'entrée est infinie et son impédance de sortie est nulle. Il s'agit de calculer la fonction de transfert de ce circuit électrique et de déterminer les valeurs de  $k$  garantissant la stabilité du montage.



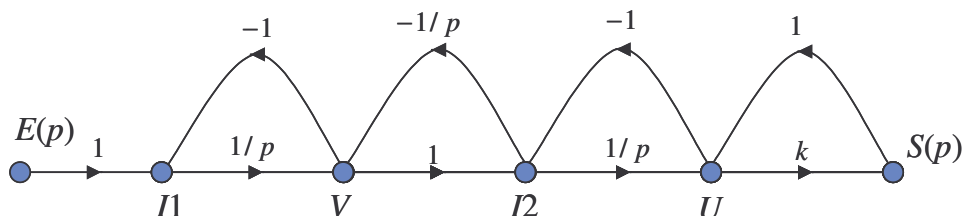
Les équations du montage sont les suivantes :

$$I1 = \frac{E - V}{R1} = E - V \quad V = \frac{I1 - I2}{C1p} = \frac{I1 - I2}{p}$$

$$I2 = \frac{V - U}{R2} = V - U \quad U = \frac{I2}{C2p} + S = \frac{I2}{p} + S$$

$$S = kU$$

Traçons le graphe de fluence correspondant.



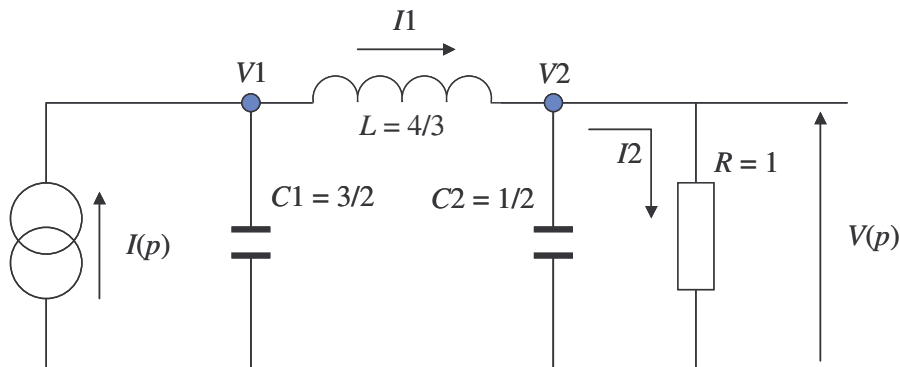
Appliquons la règle de MASON :

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} \sum_i T_i \Delta_i \quad \text{avec} \quad \Delta = 1 - \sum_j B_j + \sum_j \sum_k B_j B_k - \sum_j \sum_k \sum_l B_j B_k B_l + \dots$$

$$\left. \begin{array}{lcl}
 \sum_j B_j & = & \frac{-3}{p} + k \\
 \sum_j \sum_k B_j B_k & = & \frac{1}{p^2} - \frac{2k}{p} \\
 T_i & = & \frac{k}{p^2} \\
 \Delta_i & = & 1
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \Delta = \frac{(1-k)p^2 + (3-2k)p + 1}{p^2} \\
 H(p) = \frac{k}{(1-k)p^2 + (3-2k)p + 1}
 \end{array}$$

Le montage est stable pour  $k < 1$

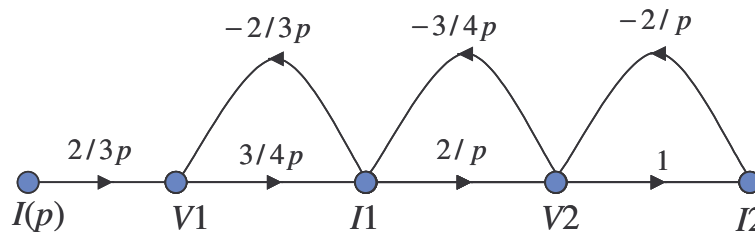
b. Fonction de transfert du filtre suivant :



Mise en équations.

$$V1 = (I - I1) \frac{2}{3p} \quad I1 = (V1 - V2) \frac{3}{4p} \quad V2 = (I1 - I2) \frac{2}{p} = I2$$

Graphe de fluence



Appliquons la règle de MASON :

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} \sum_i T_i \Delta_i \quad \text{avec} \quad \Delta = 1 - \sum_j B_j + \sum_j \sum_k B_j B_k - \sum_j \sum_k \sum_l B_j B_k B_l + \dots$$

$$\left. \begin{array}{lcl}
 \sum_j B_j & = & \frac{-2(1+p)}{p^2} \\
 \sum_j \sum_k B_j B_k & = & \frac{1}{p^2} \\
 T_i & = & \frac{1}{p^3} \\
 \Delta_i & = & 1
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \Delta = \frac{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}{p^3} \\
 H(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}
 \end{array}$$

Ce filtre est un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3. Ses pôles sont sur le cercle unité (à vérifier).

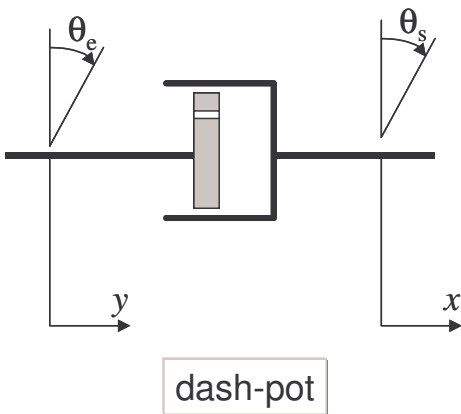
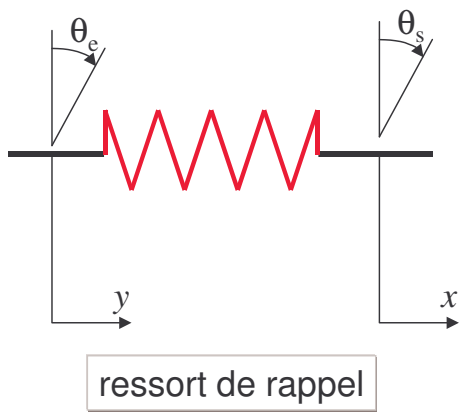
### 6.3. MISE EN EQUATION DES SYSTEMES MECANIQUES

#### 6.3.1. LOIS GENERALES DE LA MECANIQUE

La relation fondamentale de la dynamique caractérise le mouvement d'un corps solide.

Corps de masse $M$ en translation	Corps de moment d'inertie $J$ en rotation
$\sum \vec{F} = M\vec{\gamma}$	$\sum \vec{M} = J\ddot{\theta} = J\dot{\omega}$

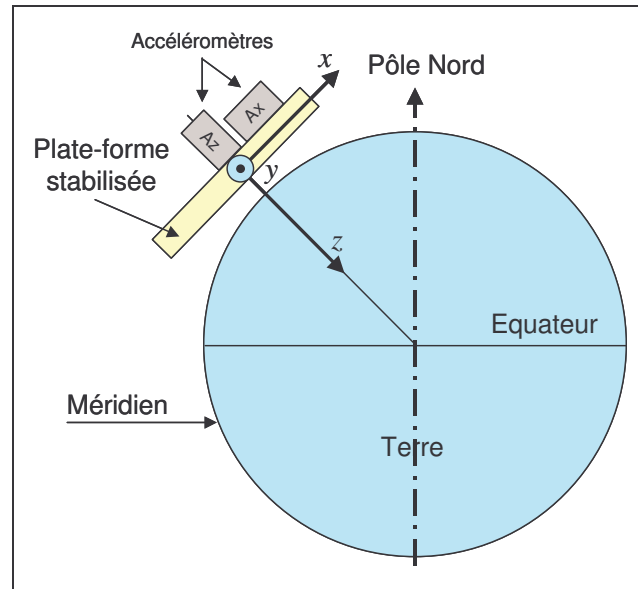
Les systèmes mécaniques réels ne sont jamais linéaires. Cependant en formulant des hypothèses restrictives mais acceptables dans le cas considéré (frottements solides négligeables, petits mouvements, etc.) on peut établir des équations linéaires susceptibles de décrire correctement le comportement du système dans le domaine d'observation.

Elément	Equation
 <p>dash-pot</p>	<p><i>Frottement visqueux :</i></p> <p>Couple résistant dû à la viscosité « <math>d</math> » du dispositif pour les mouvements de rotation :</p> $-d(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_e)$ <p>Force due à la viscosité « <math>d</math> » de l'amortisseur pour les mouvements linéaires :</p> $-d(\dot{x} - \dot{y})$
 <p>ressort de rappel</p>	<p><i>Force et couple de rappel :</i></p> <p>Couple de rappel dû au ressort de raideur <math>k</math> pour les mouvements de rotation :</p> $-k(\theta_s - \theta_e)$ <p>Force de rappel due au ressort de raideur <math>k</math> pour les mouvements linéaires :</p> $-k(x - y)$

### 6.3.2. ETUDE D'UN ACCELEROMETRE POUR CNI

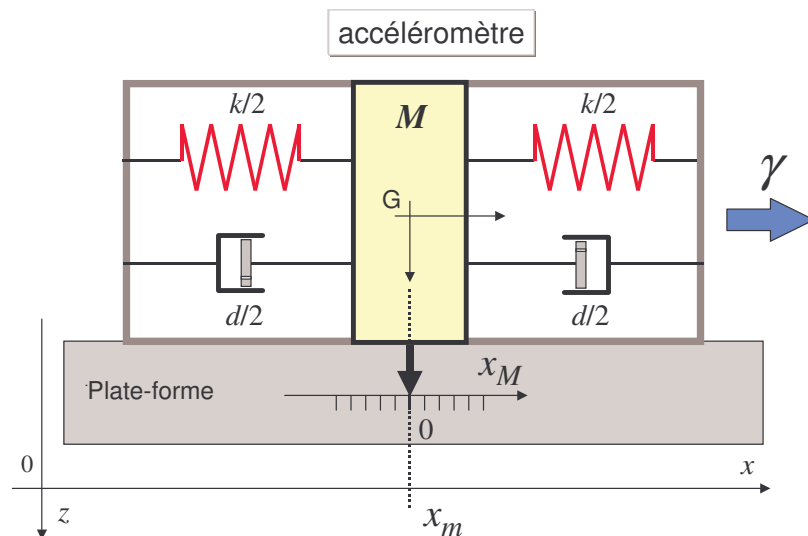
Un accéléromètre est un capteur qui mesure l'accélération  $\vec{\gamma}$  à laquelle est soumis un mobile se déplaçant dans l'espace. Ce capteur est à la base du fonctionnement des centrales de navigation à inertie (CNI). En effet de telles centrales permettent, à partir de la mesure de  $\vec{\gamma}$ , d'obtenir la vitesse et la position du mobile (avion, missile, véhicule spatial, ...).

Une centrale de navigation inertielle classique est composée d'une plate-forme stabilisée dont les axes sont asservis à la verticale locale ( $z$ ), au Nord géographique ( $x$ ) et à l'Est ( $y$ ).



Ces asservissements sont obtenus à partir de boucles de commande utilisant des capteurs de type gyrométrique. Par ailleurs 3 accéléromètres «1 axe» sont positionnés sur la plate-forme stabilisée selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  (trièdre lié à la terre). En conséquence chaque capteur mesure une composante de  $\vec{\gamma}$  selon son axe sensible.

Décrivons le principe de fonctionnement d'un accéléromètre. Il s'agit d'un boîtier, corps de l'accéléromètre, à l'intérieur duquel on trouve une masse  $M$ , rattachée au boîtier par deux ressorts de raideur  $k/2$  et deux amortisseurs de viscosité  $d/2$ . Ce capteur est monté sur un mobile se déplaçant selon  $x$ . L'abscisse du mobile est  $x_m$  dans un repère terrestre. L'abscisse de la masse  $M$ , dans un repère lié au mobile, est  $x_M$ . Son abscisse dans le repère terrestre est donc  $(x_m + x_M)$ .



La masse  $M$  peut se déplacer selon  $x$ . Lorsque le mobile n'accélère pas la masse est au centre du boîtier et sa coordonnée  $x_M$  est nulle. Si le mobile accélère on écrit :

$$M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = M \frac{d^2 (x_M + x_m)}{dt^2} = -k x_M - d \dot{x}_M \Rightarrow M \frac{d^2 x_m}{dt^2} = M \gamma_x = -k x_M - d \dot{x}_M - M \ddot{x}_M$$

Prenons la transformée de LAPLACE de cette expression.

$$M\Gamma_x(p) = -kX_M(p) - dpX_M(p) - Mp^2X_M(p)$$

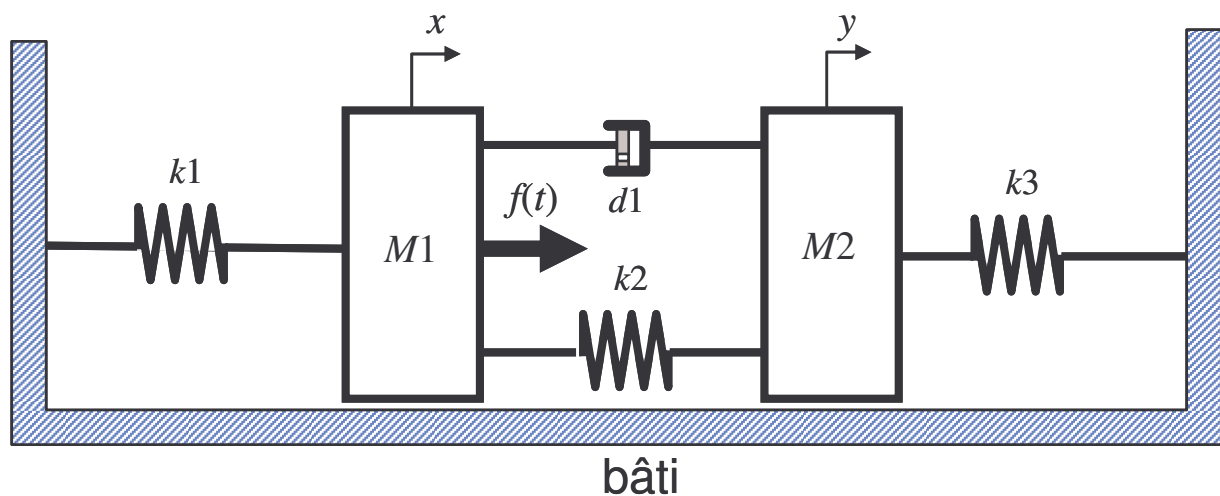
Nous obtenons la fonction de transfert de l'accéléromètre :

$$X_M(p) = -M \frac{\Gamma_x(p)}{Mp^2 + dp + k}$$

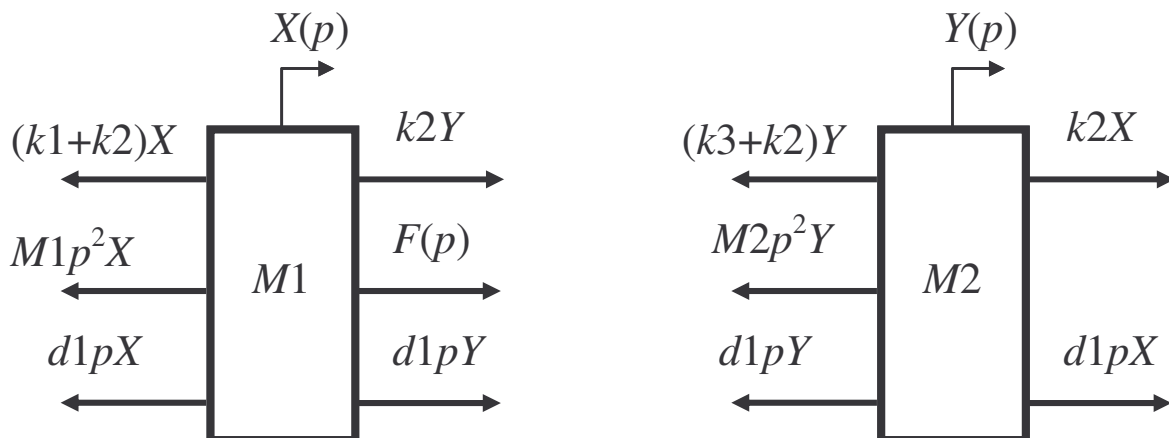
Ainsi la position de la masse  $M$  par rapport au boîtier mesure l'accélération du boîtier donc du mobile.

### 6.3.3. ETUDE D'UN PREMIER DISPOSITIF MECANIQUE

On considère le dispositif mécanique suivant :



Isolons les masses et identifions les forces appliquées.



Ecrivons les équations d'équilibre des masses.

Masse M1	Masse M2
$\left[ M1p^2 + d1p + k1 + k2 \right] X(p) -$ $\left[ d1p + k2 \right] Y(p) = F(p)$	$\left[ M2p^2 + d1p + k3 + k2 \right] Y(p) -$ $\left[ d1p + k2 \right] X(p) = 0$

Soit encore :

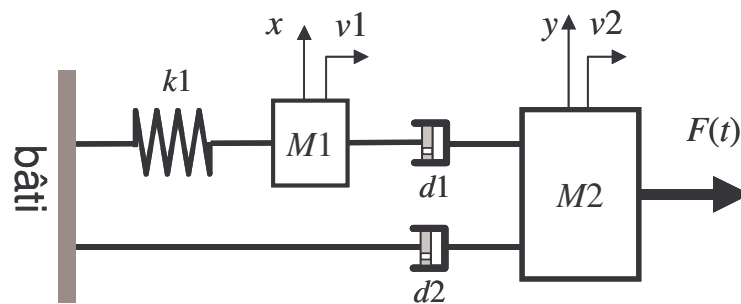
$$\begin{bmatrix} (M1p^2 + d1p + k1 + k2) & -(d1p + k2) \\ -(d1p + k2) & (M2p^2 + d1p + k3 + k2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(p) \\ Y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et l'on obtient :

$$\frac{Y}{F}(p) = \frac{d1p + k2}{(M1p^2 + d1p + k1 + k2)(M2p^2 + d1p + k3 + k2) - (d1p + k2)^2}$$

### 6.3.4. ETUDE D'UN SECOND DISPOSITIF MECANIQUE

On considère le dispositif mécanique suivant :



Soit le système mécanique ci-dessus. Ecrivons les différentes équations qui régissent son état.

$$\begin{aligned} M1\ddot{x} &= -k1x - d1(\dot{x} - \dot{y}) \\ M2\ddot{y} &= -d1(\dot{y} - \dot{x}) - d2\dot{y} + F \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} M1p^2X + k1X + d1pX - d1pY &= 0 \\ M2p^2Y + (d1 + d2)pY - d1pX &= F \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} M1p^2 + d1p + k1 & -d1p \\ -d1p & M2p^2 + (d1 + d2)p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(p) \\ Y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix}$$

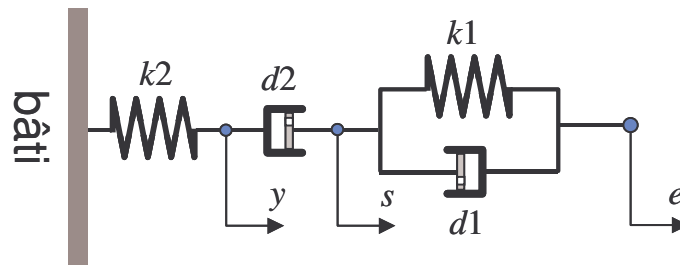
Cette dernière équation permet de calculer les fonctions de transfert, e.g.  $Y(p)/F(p)$ .

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} M1p^2 + d1p + k1 & 0 \\ -d1p & F(p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M1p^2 + d1p + k1 & -d1p \\ -d1p & M2p^2 + (d1 + d2)p \end{vmatrix}} = \frac{(M1p^2 + d1p + k1)F(p)}{(M1p^2 + d1p + k1)(M2p^2 + d1p + d2p) - d1^2p^2}$$

$$\frac{Y}{F}(p) = \frac{(M1p^2 + d1p + k1)}{p((M1p^2 + d1p + k1)(M2p + d1 + d2) - d1^2p)}$$

### 6.3.5. ETUDE D'UN TROISIEME DISPOSITIF MECANIQUE

Considérons le système mécanique suivant combinant des éléments sans masse (ressorts et amortisseurs).



Mettons ce dispositif en équations.

Equations différentielles	Transformées de LAPLACE
$-k1(s - e) - d1(\dot{s} - \dot{e}) - d2(\dot{s} - \dot{y}) = 0$	$S(k1 + d1p + d2p) = E(k1 + d1p) + Yd2p$
$-k2y - d2(\dot{y} - \dot{s}) = 0$	$Sd2p = Y(k2 + d2p)$

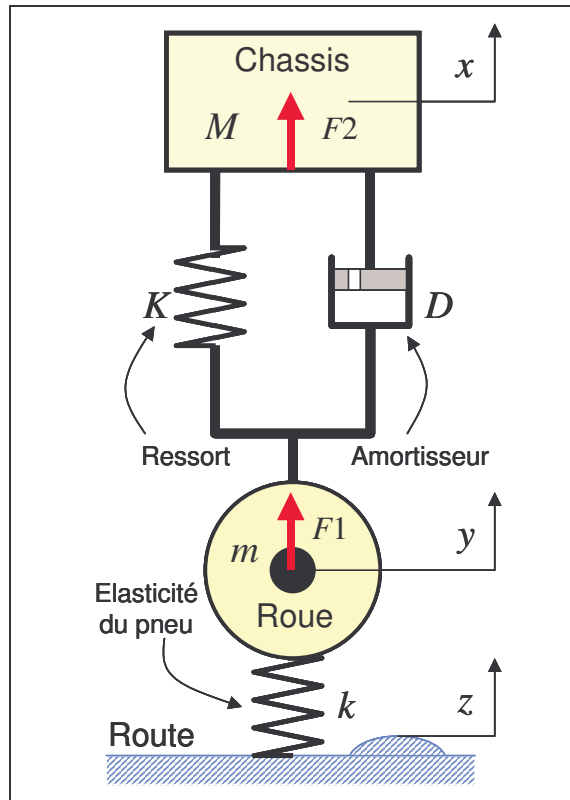
$$\begin{bmatrix} d1p + d2p + k1 & -d2p \\ -d2p & -(d2p + k2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(p) \\ Y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d1p + k1)E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculons la fonction de transfert  $\frac{S}{E}(p)$

$$S(p) = \frac{\begin{vmatrix} (d1p + k1)E & -d2p \\ 0 & -(d2p + k2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d1p + d2p + k1 & -d2p \\ -d2p & -(d2p + k2) \end{vmatrix}}$$

$$\frac{S}{E}(p) = \frac{k1k2 + (d1k2 + k1d2)p + d1d2p^2}{k1k2 + [d1k2 + d2k2 + k1d2]p + d1d2p^2} = \frac{1 + (\frac{d1}{k1} + \frac{d2}{k2})p + \frac{d1d2}{k1k2}p^2}{1 + [\frac{d1 + d2}{k1} + \frac{d2}{k2}]p + \frac{d1d2}{k1k2}p^2}$$

## 6.3.6. ETUDE D'UNE SUSPENSION D'AUTOMOBILE



Le fonctionnement du dispositif apparaît clairement sur le schéma ci-contre.

Les grandeurs \$x\$, \$y\$ et \$z\$ sont des variations autour de la position d'équilibre \$x\_0\$ et \$y\_0\$ (route plane \$z=0\$).

Il s'agit de calculer la transmittance :

$$H(p) = \frac{X}{Z}(p)$$

Mise en équation.

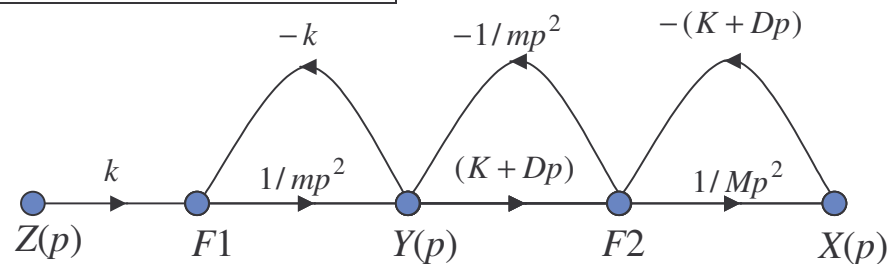
$$F1(p) = -k[Y(p) - Z(p)]$$

$$F2(p) = -[K + Dp][X(p) - Y(p)]$$

$$mp^2 Y(p) = F1(p) - F2(p)$$

$$Mp^2 X(p) = F2(p)$$

Traçons le graphe de fluence (Voir ci-après).



Appliquons la règle de MASON

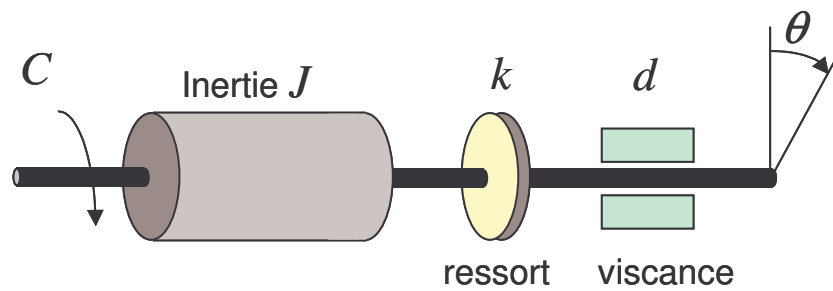
$$H(p) = \frac{1}{\Delta} \sum_i T_i \Delta_i \quad \text{avec} \quad \Delta = 1 - \sum_j B_j + \sum_j \sum_k B_j B_k - \sum_j \sum_k \sum_l B_j B_k B_l + \dots$$

$\sum_j B_j$	$= -\frac{k}{mp^2} - \frac{(K + Dp)}{mp^2} - \frac{(K + Dp)}{Mp^2}$	$\Delta = 1$ $+ \frac{kM + (K + Dp)(M + m)}{Mmp^2}$ $+ \frac{k(K + Dp)}{Mmp^4}$
$\sum_j \sum_k B_j B_k$	$= \frac{k(K + Dp)}{mMp^4}$	
$T_i$	$= \frac{k(K + Dp)}{mMp^4}$	
$\Delta_i$	$= 1$	

$$H(p) = \frac{X}{Z}(p) = \frac{k(K + Dp)}{Mmp^4 + D(M + m)p^3 + (kM + MK + Km)p^2 + kDp + kK}$$



### 6.3.7. ENTRAINEMENT D'UNE CHARGE EN ROTATION



$$\sum \text{Couples} = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow J \ddot{\theta} = C - k\theta - d\dot{\theta}$$

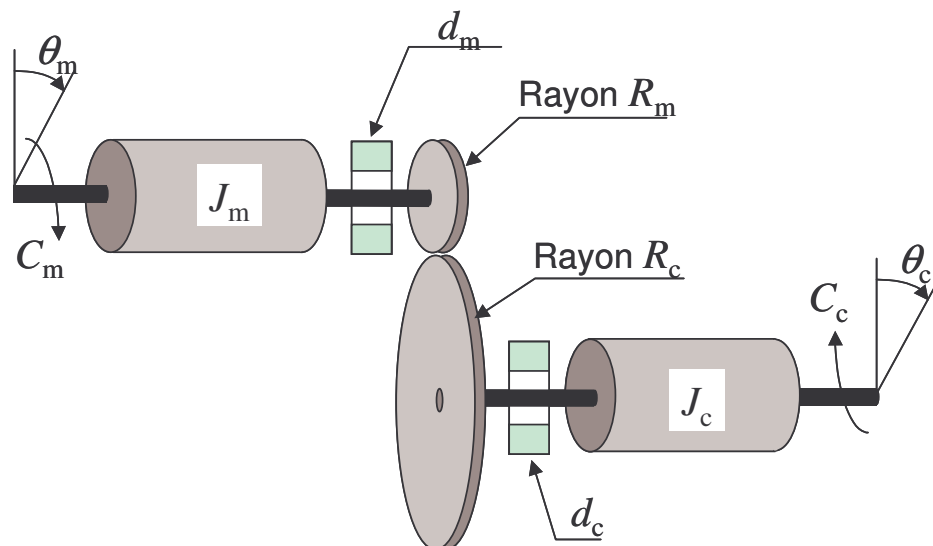
Calculons la transformée de LAPLACE.

$$C(p) - k\Theta(p) - dp \cdot \Theta(p) = Jp^2 \cdot \Theta(p)$$

$$\frac{\Theta}{C}(p) = \frac{1}{Jp^2 + dp + k}$$

### 6.3.8. TRANSMISSION MECANIQUE

Il s'agit d'étudier les conditions de transfert de l'énergie à travers un réducteur de rapport  $1/n$ .



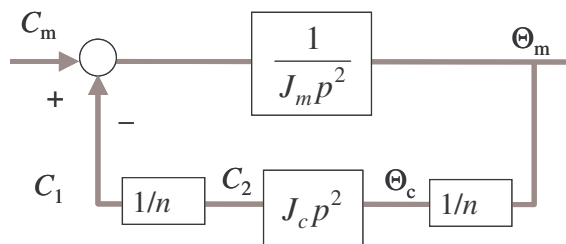
La charge de moment  $J_c$  est entraînée à travers le réducteur de rapport  $\frac{1}{n} = \frac{R_m}{R_c} = \frac{\theta_c}{\theta_m}$

a. *Système d'équations :*

Admettons que les frottements visqueux soient nuls.

Charge $J_m$	Réducteur	Charge $J_c$
$C_m - C_1 = J_m p^2 \Theta_m$	$C_1 = FR_m$ et $C_2 = FR_c \Rightarrow C_2 = nC_1$ $\Theta_m R_m = \Theta_c R_c \Rightarrow \Theta_c = \Theta_m \frac{R_m}{R_c} = \frac{\Theta_m}{n}$	$C_2 = J_c p^2 \cdot \Theta_c$

b. Etablissons le schéma fonctionnel



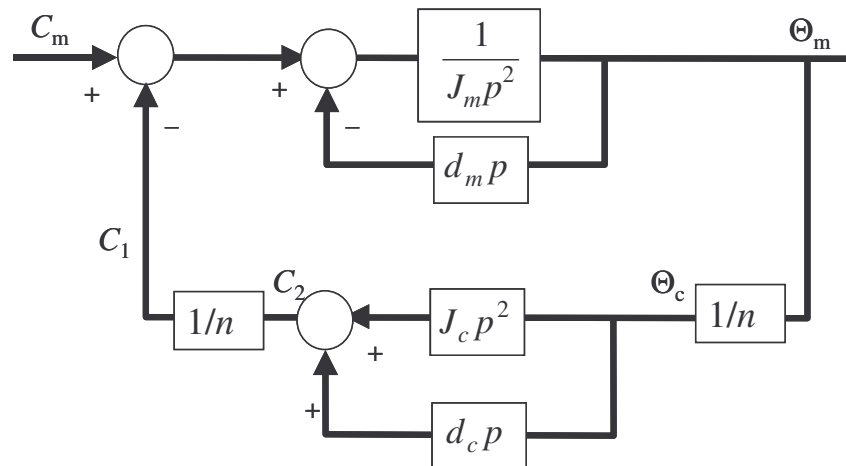
$$\frac{\Theta_m}{C_m} = \frac{1}{\left[ J_m + \frac{J_c}{n^2} \right] p^2}$$

Vu du côté arbre moteur le système est équivalent à une charge d'inertie  $J_T = J_m + \frac{J_c}{n^2}$

c. Cas où les frottements visqueux ne sont pas négligeables

Charge $J_m$	Charge $J_c$
$C_m - C_1 - d_m p \Theta_c = J_m p^2 \Theta_m$	$C_2 - d_c p \Theta_c = J_c p^2 \Theta_c$

Le schéma fonctionnel correspondant est le suivant :



En utilisant les règles de simplification des schémas fonctionnels on trouve sans difficulté la fonction de transfert du dispositif :

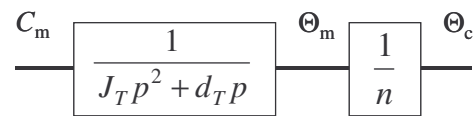
$$H(p) = \frac{\Theta_m}{C_m} = \frac{1}{\left[ J_m + \frac{J_c}{n^2} \right] p^2 + \left[ d_m + \frac{d_c}{n^2} \right] p}$$

Ce résultat met clairement en évidence le rôle d'adaptateur mécanique que joue le réducteur. Vu du côté arbre moteur le système est équivalent à :

- une charge d'inertie  $J_T = J_m + J_c/n^2$ ,
- des frottements visqueux de viscosité  $d_T = d_m + d_c/n^2$

## d. Détermination du rapport de réduction optimal

Déterminons la valeur  $n_{opt}$  de  $n$  tel que l'accélération de la charge soit maximale au départ lorsqu'on applique un échelon de couple moteur  $C_m = C_0.u(t)$ .



$$\mathbf{L}\ddot{\theta}_c = \frac{p^2 C_m}{n(J_T p^2 + d_T p)} = \frac{p C_0}{n(J_T p^2 + d_T p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \ddot{\theta}_c(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 C_0}{n(J_T p^2 + d_T p)} = \frac{C_0}{n J_T}$$

Cherchons la valeur de  $n$  correspondant à :

$$\text{Min}[n J_T] = \text{Min}\left[n J_m + \frac{J_c}{n}\right] \Rightarrow \frac{d}{dn} \left[n J_m + \frac{J_c}{n}\right] = 0 \Rightarrow n_{opt} = \sqrt{\frac{J_c}{J_m}}$$

La technique des schémas fonctionnels peut paraître bien compliquée dès lors que la résolution directe des équations permet de calculer les transmittances directement et sans difficulté majeure. Cependant cette représentation doit être privilégiée car elle donne un contenu physique aux équations et « visualise » le rôle de chacun des termes. Ainsi dans l'exemple traité on perçoit sans difficulté le caractère « amortisseur » des frottements visqueux. La représentation des schémas fonctionnels permet aussi d'identifier le point d'insertion des perturbations.

## 6.4. NOTIONS D'ANALOGIES ELECTROMECHANQUES

## 6.4.1. GENERALITES

Bien qu'ancienne la technique des analogies électromécaniques mérite que l'on s'y arrête car elle facilite la mise en équation des systèmes mécaniques notamment lorsqu'ils sont complexes. En rapprochant les diverses lois physiques qui régissent les domaines électrique et mécanique, il est possible d'établir le tableau suivant. On distingue l'analogie force-tension ( $F \approx U$ ) et l'analogie force-courant ( $F \approx I$ ).

Grandeur mécanique	Grandeur électrique $F \approx I$	Grandeur électrique $F \approx U$
force ( $F$ )	courant ( $I$ )	tension
vitesse linéaire ( $v$ )	tension ( $U$ )	courant
viscance ( $k$ )	conductance ( $G = 1/R$ )	résistance
masse ( $M$ )	capacité ( $C$ )	inductance
souplesse d'un ressort ( $1/d$ )	inductance ( $L$ )	capacité
déplacement ( $x$ )	flux magnétique ( $\Phi$ )	charge électrique
quantité de mouvement ( $Q$ )	charge électrique ( $q$ )	flux magnétique
énergie cinétique ( $E_c$ )	énergie électrostatique ( $E_s$ )	énergie magnétique
énergie potentielle ( $E_p$ )	énergie magnétique ( $E_m$ )	énergie électrostatique

L'analogie ( $F \approx U$ ) difficile à mettre en oeuvre, nous retiendrons dans ce qui suit l'analogie force-courant. Vérifions que l'ensemble est cohérent.

Mécanique		Electricité
$v = F / d$	frottements visqueux	$U = I \cdot R$
$Q = M.v$	quantité de mouvement	$q = C.U$
$P = F.v$	puissance mécanique	$P = U.I$
$F = M.dv/dt$	relation fondamentale	$I = C.dU/dt$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit  $\Sigma \text{forces} = 0$ , y compris les forces d'inertie.

La relation de KIRCHOFF appliquée à un nœud s'écrit  $\Sigma \text{courants} = 0$ . Ainsi à une force agissant sur un nœud mécanique on fait correspondre un courant aboutissant sur un nœud électrique.

Par définition :

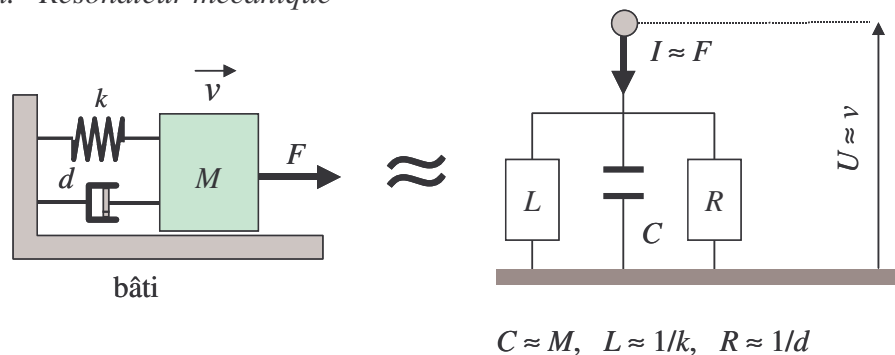
- les bornes d'un ressort correspondent aux bornes de  $L \approx 1/k$ ,
- les bornes d'un amortisseur correspondent aux bornes de  $R \approx 1/d$ ,
- une des bornes d'une masse est son centre de gravité, l'autre est le bâti. Ainsi la capacité analogue de  $M$  a nécessairement une borne à la masse.

Illustrons la démarche par le schéma ci-contre :



#### 6.4.2. EXEMPLES D'APPLICATION

##### a. Résonateur mécanique

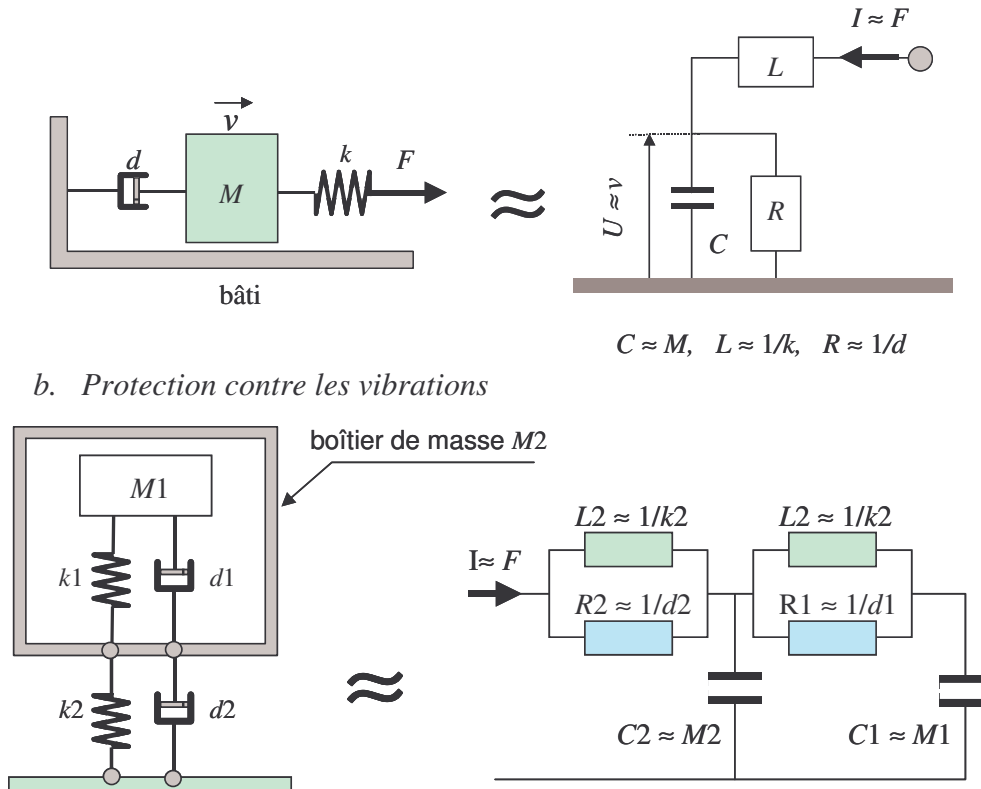


La vitesse  $v$  de  $M$  est l'analogue de la tension  $V$  aux bornes de  $C$ . Par dualité on obtient le système équivalent dans l'analogie force-tension :

- au circuit parallèle correspond un circuit série,
- à la capacité une inductance
- à la viscosité une résistance de valeur  $d$  (inverse).

La vitesse  $v$  de  $M$  est l'analogue du courant  $I$  qui circule dans l'inductance.

Examinons un autre dispositif :



Le bâti joue le rôle de source mécanique de force  $F$ .

La tension aux bornes de  $C1$  représente la vitesse de la masse  $M1$ .

## 6.5. MISE EN EQUATION DES ACTIONNEURS ELECTRIQUES

Le **moteur électrique est un actionneur** d'un emploi fréquent dans les systèmes asservis. C'est un convertisseur d'énergie électrique en énergie mécanique. Il en existe de toute taille, de toute puissance. Ils fonctionnent en courant continu ou alternatif. Les machines à courant alternatif, de type asynchrone, sont utilisées dans les asservissements à courants porteurs (non étudiés dans le cadre de ce cours). Nous limiterons notre exposé au fonctionnement des moteurs à courant continu.

### 6.5.1. LOIS FONDAMENTALES

La loi de LAPLACE indique que chaque élément de longueur  $dl$  d'un circuit électrique filiforme, parcouru par un courant  $i$  et plongé dans un champ d'induction  $B$  est soumis à une force :

$$d\vec{F} = i \, d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

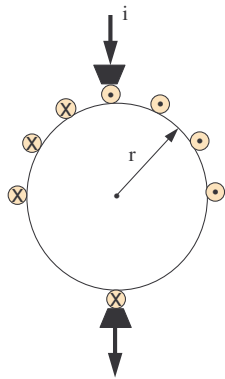
Lorsque le circuit se déplace le travail correspondant est égal  $dT = i \cdot d\Phi$  ( $d\Phi$  = flux coupé dans le déplacement).

La loi de LENTZ indique qu'une variation de flux dans un circuit fermé induit un courant dont le sens est tel qu'il crée une induction dont le flux à travers le circuit s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance. La force électromotrice induite (fém) est égale à :

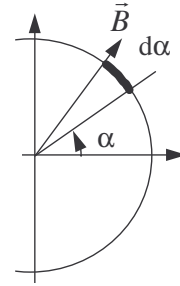
$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

### 6.5.2. EQUATIONS GENERALES DES MOTEURS CONTINUS

Ces relations fondamentales étant rappelées, considérons le stator d'une machine sur lequel sont bobinés des conducteurs. Le champ d'induction est radial.



$n$  brins de longueur  $l$  sont parcourus par le courant  $i$ . Le champ d'induction est radial.



Calculons la variation de flux « vue » par un brin lorsqu'il exécute un demi tour.

$$\varphi = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} r l B d\alpha = \pi r l B$$

Le couple résultant pour  $n$  brins est égal à :

$$\gamma = n r l B = \frac{n \varphi}{\pi} i = k_{\Gamma} i$$

Mais les brins se déplaçant dans un champ sont le siège d'une force contre électromotrice.

$$e = \frac{d\varphi}{dt} = n r l B \frac{d\alpha}{dt} = \frac{n \varphi}{\pi} \omega_m = k_E \omega_m$$

Si les pertes sont nulles, c'est à dire si l'énergie électrique est totalement convertie en énergie mécanique, on peut écrire :

$$P_m = \gamma \omega_m = P_e = e i$$

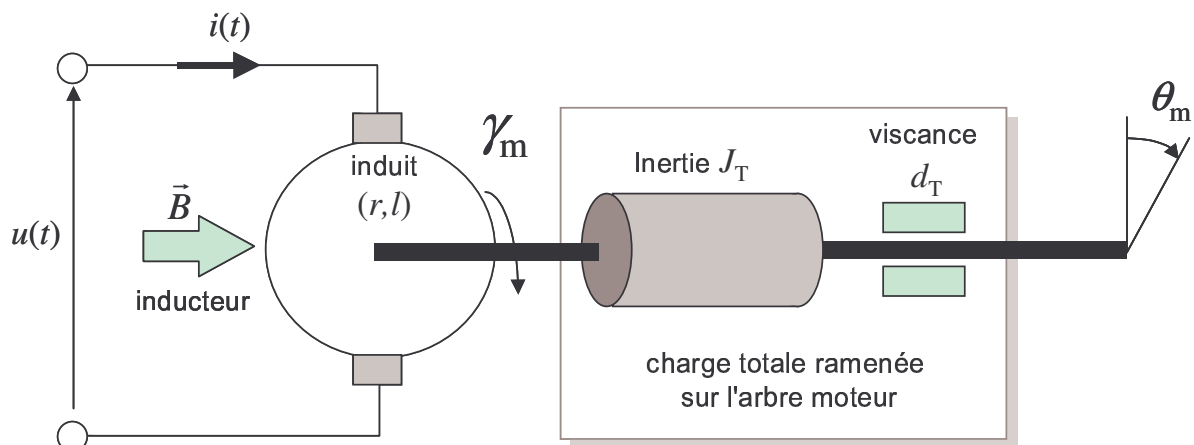
soit :

$$P_m = k_{\Gamma} i \omega_m = P_e = k_E i \omega_m \Rightarrow k_E = k_{\Gamma} = k$$

### 6.5.3. TRANSMITTANCE DU MOTEUR CONTINU COMMANDE PAR L'INDUIT

#### a. Schéma technologique

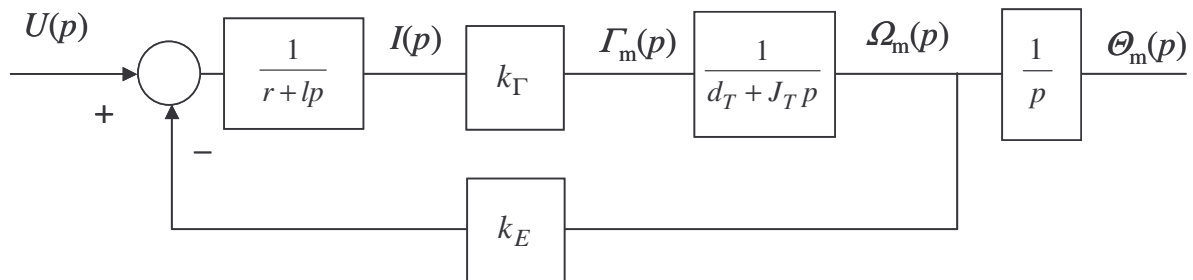
Considérons un moteur commandé par l'induit.



## b. Equations déduites des lois de la physique

Equation électrique	Equation de conversion	Equation mécanique
$u(t) = r.i + l\dot{i} + f_{cé} m$ $u(t) = r.i + l\dot{i} + k_E \omega_m$	$\gamma_m = k_\Gamma . i$	$\gamma_m = J_T \dot{\omega}_m + d_T \omega_m$
(1) $U(p) = rI(p) + l p I(p) + k_E \Omega_m(p)$	(2) $\Gamma_m(p) = k_\Gamma . I(p)$	(3) $\Gamma_m(p) = J_T p \Omega_m(p) + d_T \Omega_m(p)$

## c. Schéma fonctionnel



Ce schéma permet d'apprécier le rôle de chacun des termes (gains, constantes de temps), de calculer la fonction de transfert du moteur mais aussi d'introduire les perturbations de couple que l'on ramènera sur l'arbre moteur.

## d. Calcul de la fonction de transfert.

$$\frac{\Theta}{U}(p) = \frac{\frac{k_\Gamma}{rd_T + k_E k_\Gamma}}{p \left[ \frac{J_T l}{rd_T + k_E k_\Gamma} p^2 + \frac{rJ_T + d_T l}{rd_T + k_E k_\Gamma} p + 1 \right]}$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où  $k_E = k_\Gamma = k$  et posons :

- $\tau_E = \frac{l}{r} =$  constante de temps électrique du moteur ;
- $\tau_m = \frac{J_T \cdot r}{k^2} =$  constante de temps mécanique en charge du moteur.

Admettons enfin que  $rd_T \ll k^2$

$$\frac{\Theta}{U}(p) = \frac{\frac{1}{k}}{p \left[ \tau_E \tau_m p^2 + \left( \tau_m + \frac{r \cdot d_T}{k^2} \tau_E \right) p + 1 \right]} \quad \text{et comme généralement } \tau_E \ll \tau_m$$

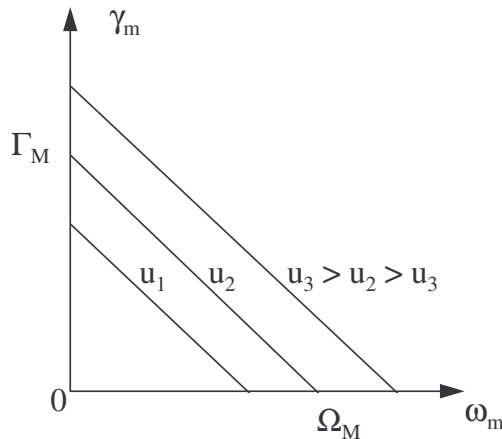
$$\frac{\Theta}{U}(p) = \frac{\frac{1}{k}}{p \left[ \tau_E \tau_m p^2 + (\tau_m + \tau_E) p + 1 \right]} = \frac{\frac{1}{k}}{p(1 + \tau_m p)(1 + \tau_E p)}$$

Soit plus simplement, pour certaines applications, négliger l'effet de la constante de temps électrique et poser  $K_V = 1/k$ , auquel cas il vient :

$$\frac{\Theta}{U}(p) = \frac{K_V}{p(1 + \tau_m p)}$$

e. *Courbes caractéristiques*

Plaçons-nous en régime permanent.



Les équations sont :

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= ri + k_E \omega_m \\ \gamma_m &= k_\Gamma i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_m = \frac{k_\Gamma k_E}{r} \omega_m + \frac{k_\Gamma}{r} u$$

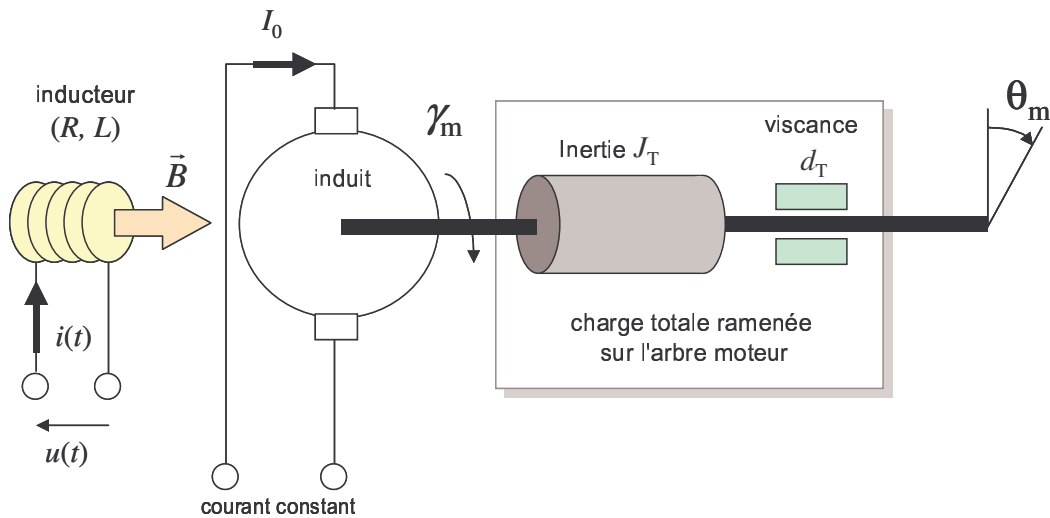
C'est l'équation des courbes caractéristiques du moteur. Elles permettent de déterminer  $\tau_m$  connaissant  $J_T$

$$\tau_m = J_T \frac{\Omega_M}{\Gamma_M}$$

#### 6.5.4. TRANSMITTANCE DU MOTEUR CONTINU COMMANDE PAR L'INDUCTEUR

f. *Schéma technologique*

Considérons un moteur commandé par l'induit.

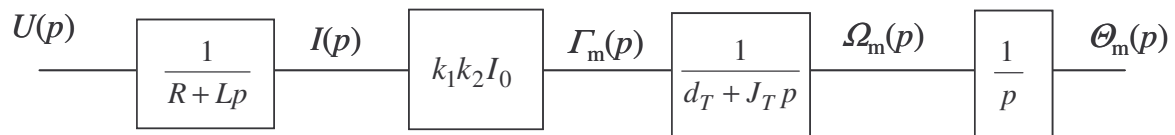


g. *Equations déduites des lois de la physique*

Equation électrique	Equation de conversion	Equation mécanique
$u(t) = Ri + L\dot{i}$ $\varphi = k_1 i(t)$	$\gamma_m = k_2 I_0 \varphi$	$\gamma_m = J_T \dot{\omega}_m + d_T \omega_m$
$U(p) = RI(p) + LpI(p)$ $\Phi(p) = k_1 I(p)$	$\Gamma_m(p) = k_2 I_0 \Phi(p)$	$\Gamma_m(p) = J_T p \Omega_m(p) + d_T \Omega_m(p)$



## h. Schéma fonctionnel



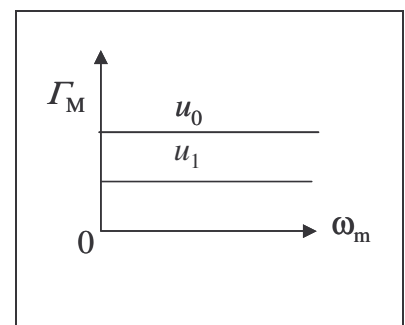
## i. Calcul de la fonction de transfert.

$$\frac{\Theta}{U}(p) = \frac{\frac{k_1 k_2 I_0}{rd_T}}{p(1 + \tau_E p)(1 + \tau_m p)} \quad \text{avec } \tau_E = \frac{L}{R} \text{ et } \tau_m = \frac{J_T}{d_T}$$

## j. Courbes caractéristiques

En régime permanent  $\Rightarrow \gamma_m = \frac{k_1 k_2 I_0}{R} u_0 \Rightarrow$

- Ce moteur est un moteur couple.
- La puissance mise en jeu dans l'inducteur est faible.
- Sa constante de temps électrique est élevée.
- Ce moteur est un moteur et un amplificateur.
- Des difficultés existent pour réaliser la source  $I_0$ .

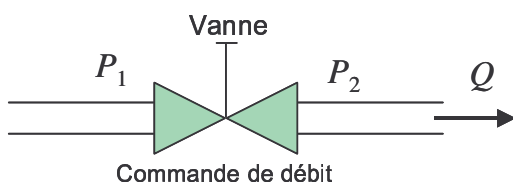


## 6.6. MISE EN EQUATION DES SYSTEMES HYDRAULIQUES

## 6.6.1. REGULATION DE NIVEAU D'UNE CUVE

## a. Modélisation de la cuve

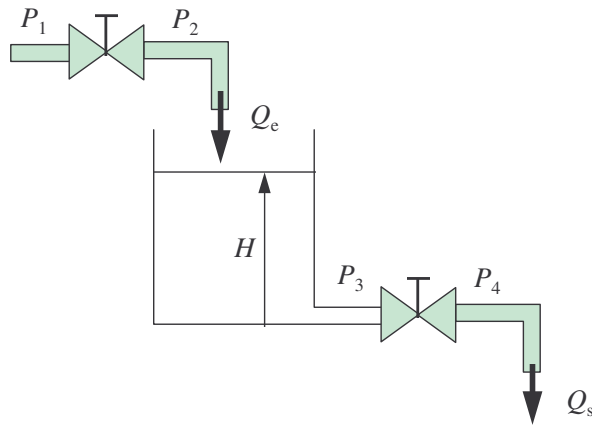
Considérons une canalisation où les pressions  $P_1$  et  $P_2$  existent de part et d'autre d'une vanne de réglage. La relation de BERNOULLI permet d'exprimer le débit  $Q$  circulant dans la canalisation en régime turbulent :



$$Q = K\sqrt{P_1 - P_2}$$

$K$  = coefficient de passage réglable par action sur la vanne.

Soit une cuve de section  $S$ , alimentée par un débit  $Q_e$  et fournissant un débit  $Q_s$  en sortie. Etablissons le modèle linéaire de ce dispositif.



$$Q_e = K_1 \sqrt{P_1 - P_2}$$

$$Q_s = K_2 \sqrt{P_3 - P_4}$$

si  $P_2 = P_4 = 0, P_3 = KH$  et  $P_1 = P_{10} + p_1$

$$H = H_0 + h$$

$$Q_e = Q_{e0} + q_e = K_1 \sqrt{P_1}$$

$$Q_s = Q_{s0} + q_s = K_2 \sqrt{P_3} = K'_2 \sqrt{H}$$

$$K_1 = K_{10} + k_1$$

$$K'_2 = K'_{20} + k'_2$$

On peut linéariser autour du point de fonctionnement (indice 0) lorsque les variations sont petites. Le système d'équations linéaires correspondant est le suivant :

$$q_e = k_1 \sqrt{P_{10}} + \frac{K_{10}}{2\sqrt{P_{10}}} p_1 = \alpha_1 k_1 + \beta_1 p_1$$

$$q_s = k'_2 \sqrt{H_0} + \frac{K'_{20}}{2\sqrt{H_0}} h = \alpha_2 k'_2 + \beta_2 h$$

$$q_e - q_s = S \frac{dh}{dt}$$

Equations établies à partir de :

$$f(x, y) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

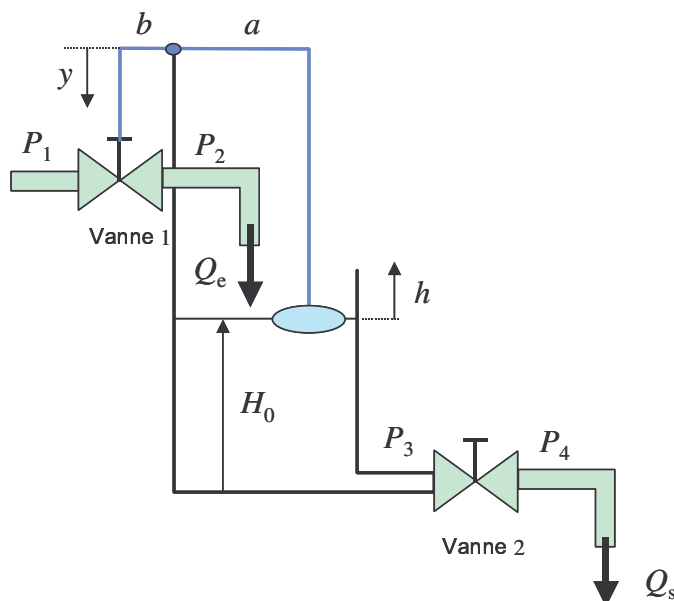
Par exemple :

$$q_e = \frac{\partial Q_e}{\partial K_1} k_1 + \frac{\partial Q_e}{\partial P_1} p_1$$

Ce système constitue le modèle mathématique de la cuve pour des petites variations autour du point de fonctionnement. Etudions le fonctionnement en régulation de niveau.

### b. Système en boucle fermée

- Schéma technologique :

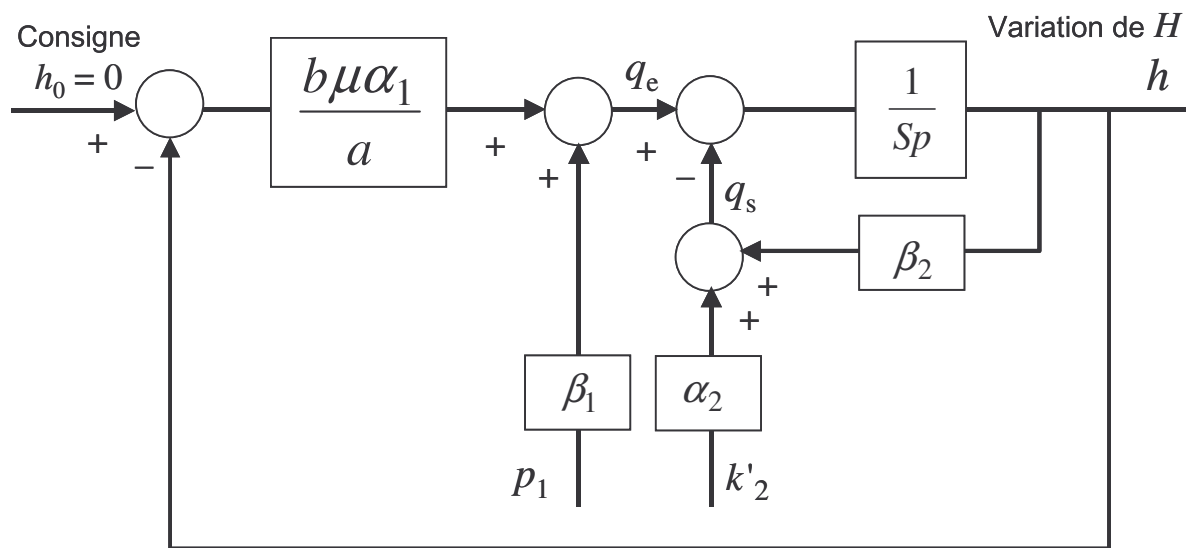


Les équations du modèle de la cuve couplées à celles du dispositif de retour

$$y = \frac{b}{a} h \quad \text{et} \quad k_1 = -\mu y$$

permettent de tracer le schéma fonctionnel de la régulation de niveau.

- Schéma fonctionnel



Cet exemple montre tout l'intérêt du schéma fonctionnel qui explicite, sans ambiguïté, les points d'insertion des perturbations (ici une variation de la pression d'alimentation de la vanne 1 et une variation de la fuite apportée par la vanne 2).

Ce schéma permet de calculer les différentes transmittances et d'ajuster les paramètres de réglage.

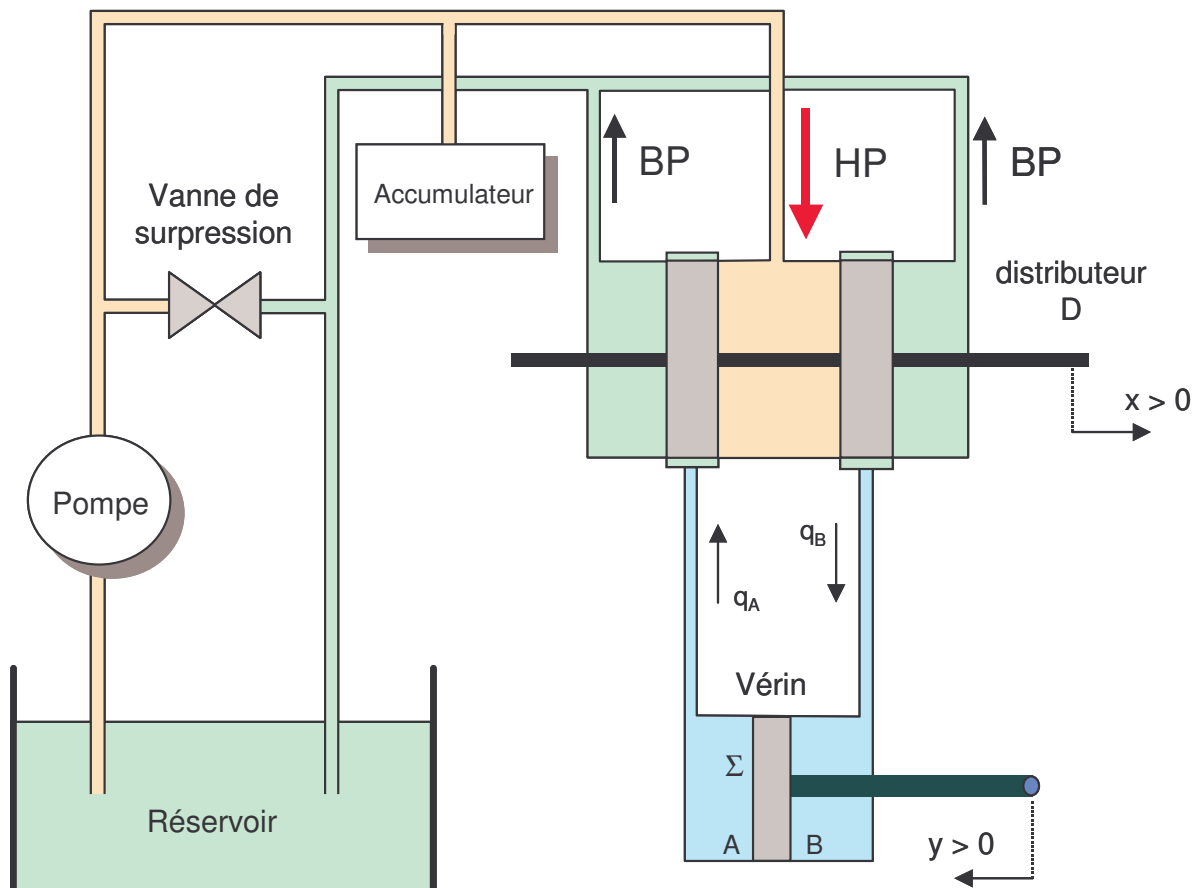
Calculons à titre d'exemple  $T(p) = \frac{H}{P_1}(p) = \frac{\beta_1 / S}{p + \frac{a\beta_2 + b\mu\alpha_1}{aS}}$

### 6.6.2. SERVOCOMMANDE HYDRAULIQUE

Le moteur hydraulique est capable de fournir une amplification en puissance importante. Il est utilisé pour déplacer des masses importantes.

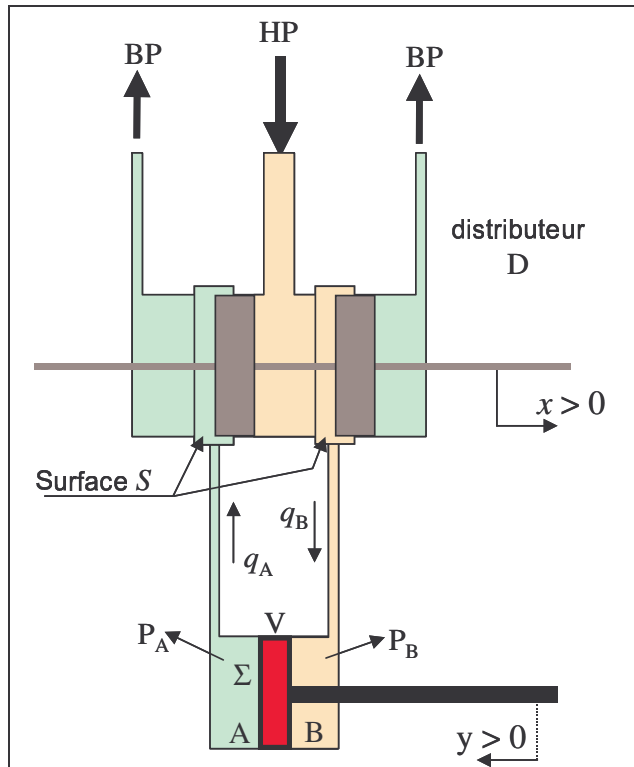
#### a. Actionneur hydraulique

Le schéma technologique est le suivant :



- Lorsque  $x > 0$  le tiroir du distributeur est déplacé vers la droite.
- Le liquide hydraulique haute pression (HP) est transmis sur la face B du piston de surface  $\Sigma$ .
- La face A du piston est reliée au circuit basse pression (BP).
- Sous la différence de pression (HP-BP) le piston est en mouvement et se déplace dans le sens des  $y > 0$ .
- Si  $x < 0$  le piston se déplace dans l'autre sens.

Calculons la fonction de transfert du piston libre. Nous négligeons la compressibilité du liquide hydraulique.



La surface  $S$  des étranglements est proportionnelle à  $x$  aussi  $S = K_x x$ .

Le débit du fluide hydraulique est  $Q = f(x, p)$  avec  $p = P_B - P_A$ .

Ainsi :

$$q = \frac{\partial Q}{\partial x} x + \frac{\partial Q}{\partial p} p = K_x x - K_p p$$

Soit  $M$  la masse du piston de surface  $\Sigma$  et  $D$  la viscosité des frottements visqueux existant sur l'arbre moteur.

$$M\ddot{y}(t) = \Sigma p - D\dot{y}(t)$$

$$M\ddot{y}(t) = \Sigma \frac{(K_x x - q)}{K_p} - D\dot{y}(t)$$

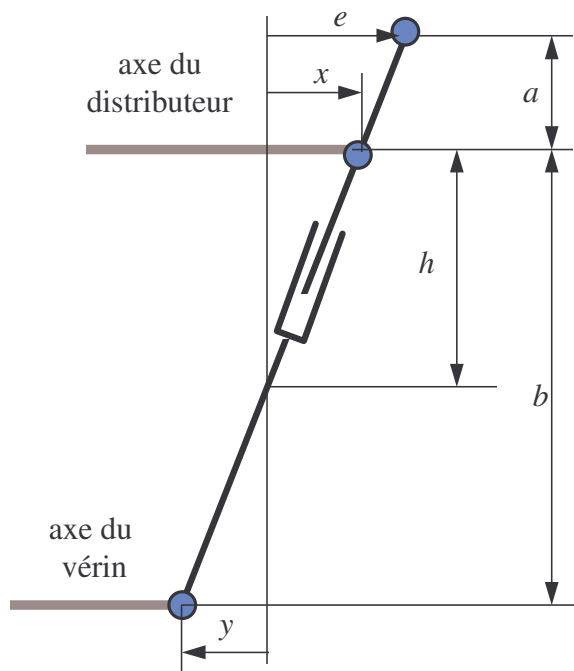
$$q = \Sigma \dot{y}(t)$$

$$M\ddot{y}(t) + \left( D + \frac{\Sigma^2}{K_p} \right) \dot{y}(t) = \frac{\Sigma K_x}{K_p} x$$

Soit

$$\frac{Y}{X}(p) = \frac{\frac{\Sigma K_x}{K_p}}{p \left( Mp + \left( D + \frac{\Sigma^2}{K_p} \right) \right)} = \frac{K_v}{p(1 + \tau p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_v = \frac{\Sigma K_x}{DK_p + \Sigma^2} \\ \tau = \frac{MK_p}{DK_p + \Sigma^2} \end{cases}$$

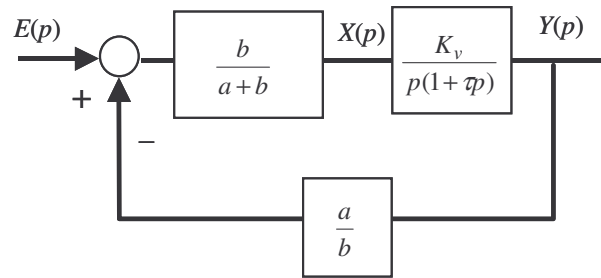
## b. Actionneur hydraulique asservi



$$\frac{x}{h} = \frac{e}{a+b} = \frac{y}{b-h}$$

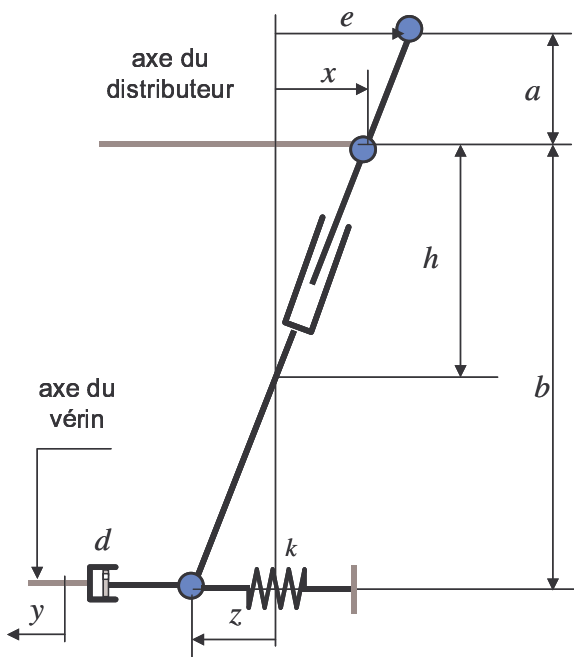
$$\frac{x+y}{b} = \frac{e+y}{a+b} = \frac{y}{a+b}$$

$$x = \frac{b}{a+b} \left[ e - \frac{a}{b} y \right]$$



$$\frac{Y}{X}(p) = \left( \frac{b}{a} \right) \frac{1}{\frac{(a+b)\tau}{aK_v} p^2 + \frac{(a+b)}{aK_v} p + 1}$$

## c. Actionneur hydraulique asservi et filtré

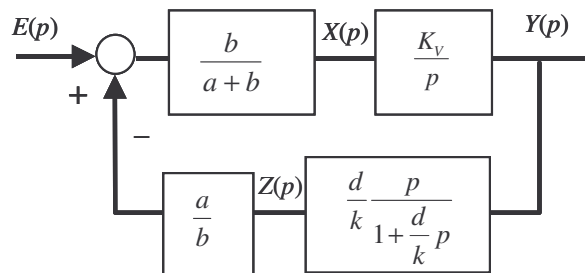


$$x = \frac{b}{a+b} \left[ e - \frac{a}{b} z \right]$$

$$-kz - d(\dot{z} - \dot{y}) = 0$$

$$Z(p) = \frac{d}{k} \frac{p}{1 + \frac{d}{k} p}$$

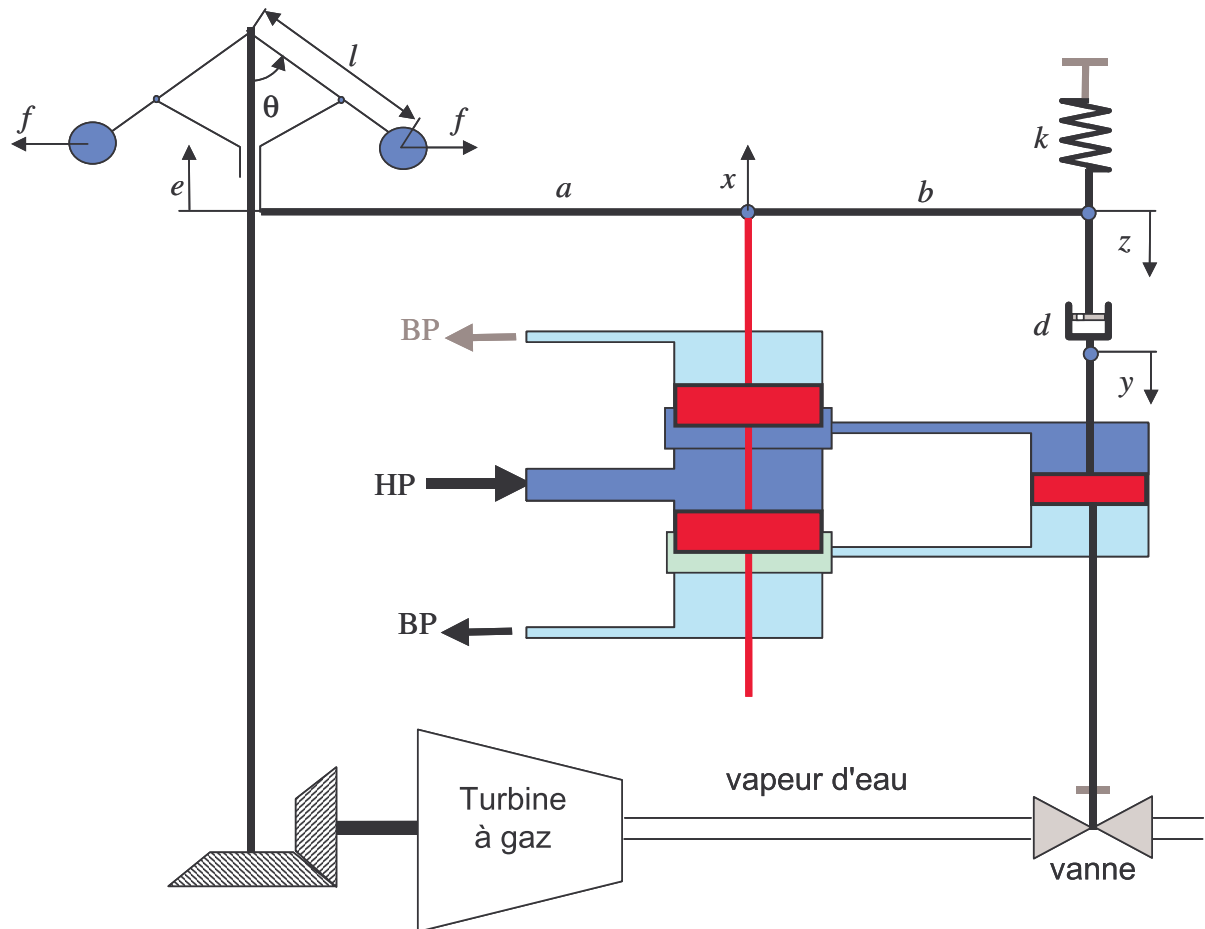
Négligeons la constante de temps  $\tau$  du moteur.



$$\frac{Y}{E}(p) = K'_v \frac{1+T_1 p}{p(1+T_2 p)}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} K'_v = \frac{bkK_v}{(a+b)k + adK_v} \\ T_1 = \frac{d}{k} \\ T_2 = \frac{d(a+b)}{(a+b)k + adK_v} \end{cases}$$

## 6.6.3. EXEMPLE : REGULATION DE VITESSE D'UNE TURBINE.



Actionnée par de la vapeur, la turbine à gaz entraîne une charge (e.g. un alternateur pour la production d'énergie électrique) à une vitesse qui doit être constante.

Admettons que le système soit en régime établi autour d'un point de fonctionnement et qu'à l'instant  $t_0$  la charge entraînée en rotation par la turbine décroît (moins d'énergie électrique consommée sur le réseau). La vitesse de rotation de la turbine croît alors de  $\omega$ . Sous l'action de la force centrifuge les masselottes du régulateur de WATT s'écartent entraînant le levier de la servocommande ( $e > 0$ ). Le vérin agit sur la vanne ( $y > 0$ ) en réduisant le débit de vapeur. La vitesse de la turbine chute et rejoint sa valeur nominale ( $\omega = 0$ ). On notera qu'en fin de correction le déplacement  $e$  est nul alors que le déplacement  $y$  du vérin ne l'est pas. L'effet intégrateur de la servocommande explique cela. On appréciera l'impact de cette remarque sur la précision du système en régime permanent.

