

Chapitre 6

Stabilité des systèmes discrets et échantillonnés

- 6.1. Définition
- 6.2. Critères algébriques de stabilité
 - 6.2.1. Critère simplifié de Jury (1961)
 - 6.2.2. Critère de Routh modifié
 - 6.2.3. Cas des systèmes bouclés
 - 6.2.4. Application
- 6.3. Méthode du lieu des racines (lieu de EVANS)
 - 6.3.1. Principe de la méthode
 - 6.3.2. Règles de construction
 - 6.3.3. Application

6.1. DEFINITION

Comme pour les systèmes continus, on définit la stabilité d'un système échantillonné par sa capacité à revenir de lui-même à sa position d'équilibre après avoir été excité par une perturbation. *Il convient donc que sa réponse impulsionnelle vérifie la relation¹ :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(kT) = 0$$

$$\text{Or } H(z) = \mathbf{Z}\{h_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{\sum_{i=0}^d b_i z^i} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

En supposant que les pôles z_{Pi} de la transmittance, soient simples, réels ou complexes 2 à 2 conjugués, la réponse impulsionnelle est de la forme :

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{C_1}{z - z_{P1}} + \frac{C_2}{z - z_{P2}} + \dots + \frac{C_d}{z - z_{Pd}} \quad \text{soit} \quad h_k = \sum_{i=0}^d C_i z_{Pi}^k$$

Comme h_k tend vers zéro si $\forall i \quad |z_{Pi}| < 1$ on énoncera le théorème suivant :

- **La transmittance $H(z)$ d'un système numérique est stable si et seulement si tous ses pôles sont situés à l'intérieur du cercle de rayon unité.** Il est d'autant plus stable que ses pôles sont près de l'origine.
- En d'autres termes la stabilité du système numérique est acquise dès lors que **le module de chacun de ses pôles est inférieur à 1.**
- Le système est **juste oscillant** si ses pôles sont de module 1 (i.e. situés sur le cercle unité)².

¹ On parle aussi de BIBO stabilité (Bounded Input Bounded Output = entrée bornée sortie bornée) si $\exists C$ tel que la réponse impulsionnelle soit $\leq C$.

² Rappel : l'intégrateur admet le pôle $z = 1$.

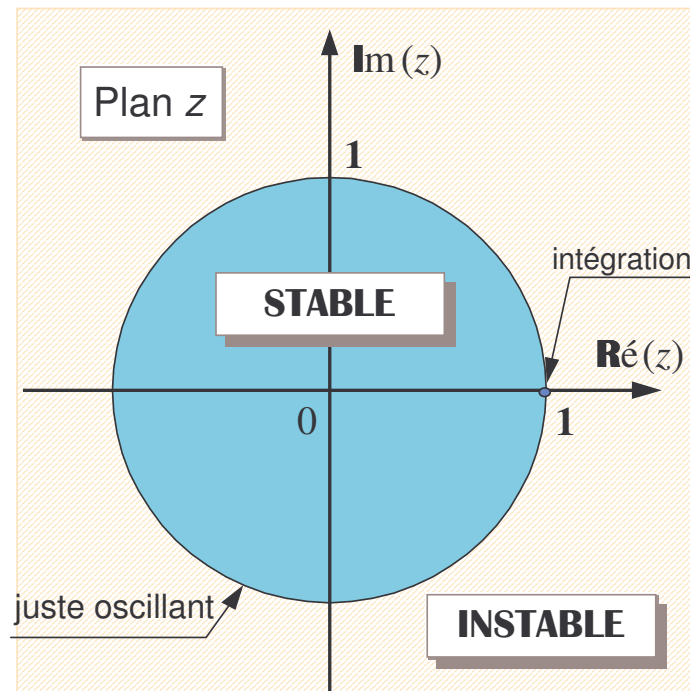


Figure 1 : Zone de stabilité des fonctions de transfert numériques

Sachant que $z = e^{Tp}$ posons $p = \sigma + j\omega$. La condition de stabilité s'écrit $|z| = e^{T\sigma} < 1$ ce qui équivaut à $\sigma < 0$. Ainsi on retrouve la condition de stabilité énoncée pour les systèmes continus.

6.2. CRITERES ALGEBRIQUES DE STABILITE

En général le calcul des racines de l'équation caractéristique du système (racines de $D(z)$) n'est pas facile en l'absence de moyen de calcul approprié (le recours au logiciel MATLAB est recommandé). Aussi utilise-t-on des critères algébriques qui, sans avoir à résoudre l'équation caractéristique, permettent de savoir si ses racines sont contenues dans le cercle unité du plan complexe z .

6.2.1. CRITERE SIMPLIFIE DE JURY (1961)

Soit la transmittance physiquement réalisable $H(z)$:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \dots + b_1 z + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{\sum_{i=0}^d b_i z^i}$$

Considérons le dénominateur $D(z)$ de degré d .

$$D(z) = b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \dots + b_i z^i + \dots + b_1 z + b_0 \quad \text{avec} \quad b_i \in \mathbf{R} \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Dressons le tableau suivant :

1	b_0	b_1	b_2	...	b_{d-k}	...	b_{d-2}	b_{d-1}	b_d
2	b_d	b_{d-1}	b_{d-2}	...	b_k	...	b_2	b_1	b_0
3	c_0	c_1	c_2	...	c_{d-k}	...	c_{d-2}	c_{d-1}	
4	c_{d-1}	c_{d-2}	c_{d-3}	...	c_{k-1}	...	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	d_{d-2}		
6	d_{d-2}	d_{d-3}	d_{d-4}	d_0		
...				
...				
2d-5	p_0	p_1	p_2	...					
2d-4	p_3	p_2	p_1	...					
2d-3	q_0	q_1	q_2						

Avec :

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{d-k} \\ b_d & b_k \end{vmatrix} \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{d-1-k} \\ c_{d-1} & c_k \end{vmatrix} \quad e_k = \begin{vmatrix} d_0 & d_{d-2-k} \\ d_{d-2} & d_k \end{vmatrix}$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Enoncé du critère de JURY :

Pour que toutes les racines de $D(z) = 0$ soient situées à l'intérieur du cercle unité il faut et il suffit que les $(d + 1)$ conditions suivantes soient satisfaites :

$$D(1) > 0 \quad D(-1) \begin{cases} > 0 & \text{pour } d \text{ pair} \\ < 0 & \text{pour } d \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et } (d-1) \text{ contraintes} \quad \begin{cases} |b_0| < b_d \\ |c_0| > |c_{d-1}| \\ |d_0| > |d_{d-2}| \\ |e_0| > |e_{d-3}| \\ \dots\dots\dots \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$$

Cas particuliers :

Système de second ordre	Système du troisième ordre
$D(z) = z^2 + b_1 z + b_0 \quad (d = 2)$ $D(1) = 1 + b_1 + b_0 > 0$ $D(-1) = 1 - b_1 + b_0 > 0$ $ b_0 < 1$	$D(z) = z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \quad (d = 3)$ $D(1) = 1 + b_2 + b_1 + b_0 > 0$ $D(-1) = -1 + b_2 - b_1 + b_0 < 0$ $ b_0 < 1$ $ b_0^2 - 1 > b_0 b_2 - b_1 $

6.2.2. CRITERE DE ROUTH MODIFIE

Comme nous l'avons évoqué à l'occasion de l'étude des systèmes de commande continus, le critère de ROUTH indique si un polynôme contient des racines à partie réelle positive. Ce critère ne s'applique donc pas aux transmittances en z puisque dans ce cas il s'agit de vérifier que le module des racines de $D(z)$ est <1 . Cependant il s'applique aux polynômes $D(w)$ obtenus par substitution de la variable w (transformation de MÖBIUS) à la variable z avec :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$$

En effet cette transformation fait correspondre au cercle de rayon unité du plan complexe z (zone de stabilité dans ce plan) le demi-plan gauche de la variable complexe w .

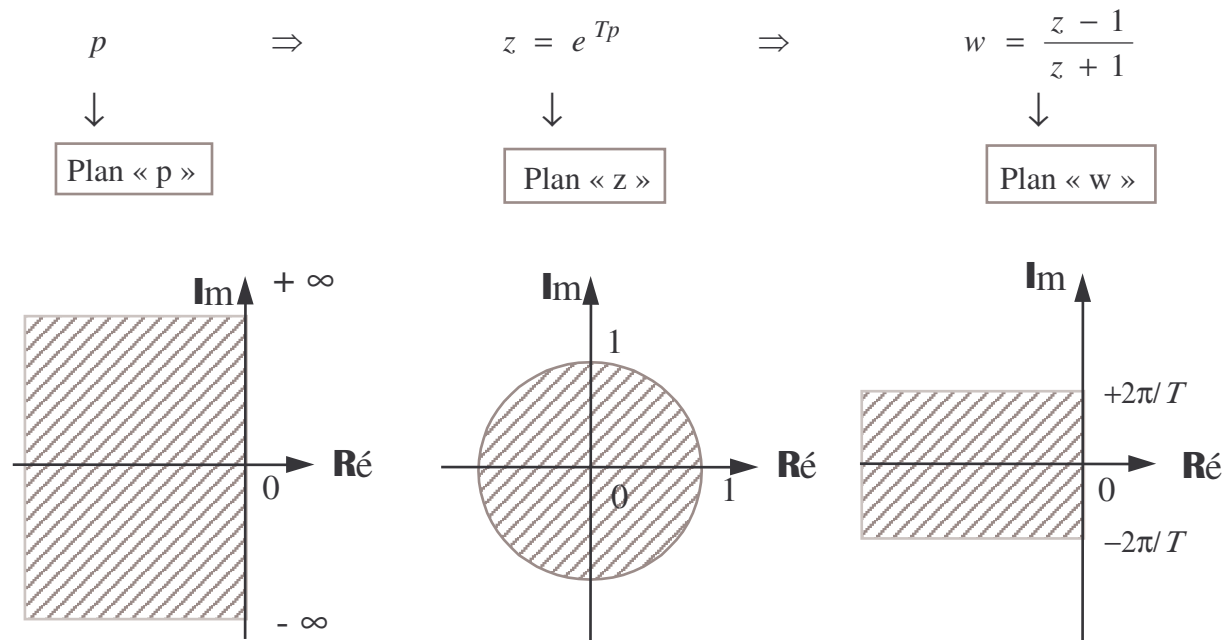


Figure 2 : Plan complexe et zone de stabilité

Le critère s'énonce comme suit :

$D(w) = b_d w^d + b_{d-1} w^{d-1} + \dots + b_i w^i + \dots + b_1 w + b_0$ a toutes ses racines à partie réelle négative si :

- $\forall i$ tous les $b_i \neq 0$ et de même signe
- tous les termes de la première colonne du tableau de ROUTH sont de même signe.

Formons le tableau de ROUTH :

w^d	b_d	b_{d-2}	b_{d-4}	b_{d-6}
w^{d-1}	b_{d-1}	b_{d-3}	b_{d-5}	b_{d-7}
w^{d-2}	c_1	c_2	c_3	c_4
w^{d-3}	d_1	d_2
w^{d-4}	e_1
.....
w^1
w^0

$$\begin{aligned} \text{Avec : } c_1 &= \frac{b_{d-1}b_{d-2} - b_d b_{d-3}}{b_{d-1}} & d_1 &= \frac{c_1 b_{d-3} - c_2 b_{d-1}}{c_1} \\ c_2 &= \frac{b_{d-1}b_{d-4} - b_d b_{d-5}}{b_{d-1}} & d_2 &= \frac{c_1 b_{d-5} - c_3 b_{d-1}}{c_1} \end{aligned}$$

6.2.3. CAS DES SYSTEMES BOUCLES

On calcule le dénominateur de la $FTBF(z)$ égal à :

$$Dbf(z) = Dbo(z) + Nbo(z)$$

et l'on applique les critères algébriques.

6.2.4. APPLICATION

On considère l'asservissement de position représenté ci après. La période d'échantillonnage T est égale à une seconde. Le correcteur numérique est un simple gain K .

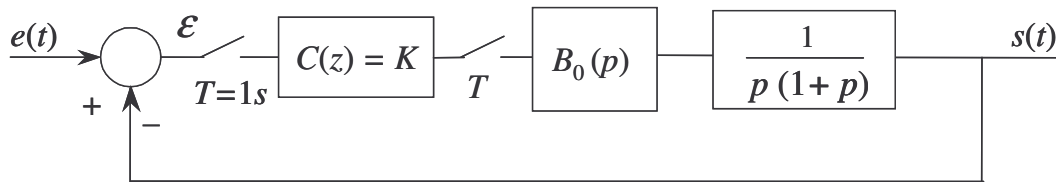


Figure 3 : Asservissement élémentaire de position à commande numérique

La fonction de transfert du processus associée au BOZ est donnée par l'expression suivante.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right] = \frac{0,37z + 0,26}{(z-1)(z-0,37)} \quad \text{et} \quad FTBO(z) = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z)} = K.G(z)$$

Calculons la $FTBF(z)$.

$$FTBF(z) = \frac{K(0,37z + 0,26)}{z^2 + (0,37K - 1,37)z + 0,37 + 0,26K} = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)} = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z) + Nbo(z)}$$

Appliquons le critère de JURY à $D(z) = z^2 + (0,37K - 1,37)z + 0,37 + 0,26K$

$$\left. \begin{aligned} D(1) &= 1 + 0,37K - 1,37 + 0,37 + 0,26K = 0,63K > 0 \\ D(-1) &= 1 - 0,37K + 1,37 + 0,37 + 0,26K = 2,74 - 0,11K > 0 \\ |0,37 + 0,26K| &< 1 \end{aligned} \right\} 0 < K < 2,42$$

Pour $K = 2,42$ il vient $Dbf(z) = z^2 - 0,4z + 1 = (z - e^{1,37j})(z - e^{-1,37j})$

$z_{p1} = e^{1,37j} = e^{Tp}$ avec $p = j\omega_{os} = 1,37j$ car $T = 1$ seconde. Ainsi : $\omega_{os} = 1,37$ rd/s

Appliquons le critère de ROUTH

$$G(w) = \frac{2w}{1+w} \cdot \mathbf{W} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right] = [G(z)]_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \left(\frac{1-w}{2w} \right) \frac{1+0,164w}{1+2,164w}$$

$$D(w) = (4,328 - 0,164K)w^2 + (2 - 0,836K)w + K$$

Formons le tableau de ROUTH.

w^2	$4,328 - 0,164K$	K	$K < 26,39$	$\Rightarrow 0 < K < 2,4$
w^1	$2 - 0,836K$	0	$K < 2,4$	
w^0	K		$K > 0$	

A partir du tableau de ROUTH on peut encore calculer la pulsation des auto-oscillations obtenues pour $K = 2,392$. La démarche est la suivante :

$(4,328 - 0,164K)w^2 + K = 0$ avec $K = 2,4$. Cette équation donne une valeur de w .

$$w = \tanh \frac{Tp}{2} \quad \text{avec} \quad p = j\omega_{os}.$$

Dans le cas de notre problème $w_{os} = -j \cdot \tan \frac{T\omega_{os}}{2}$ soit $\omega_{os} = 1,33 \text{ rad/s}$

6.3. METHODE DU LIEU DES RACINES (LIEU DE EVANS)

6.3.1. PRINCIPE DE LA METHODE

Considérons un système bouclé à retour unitaire :

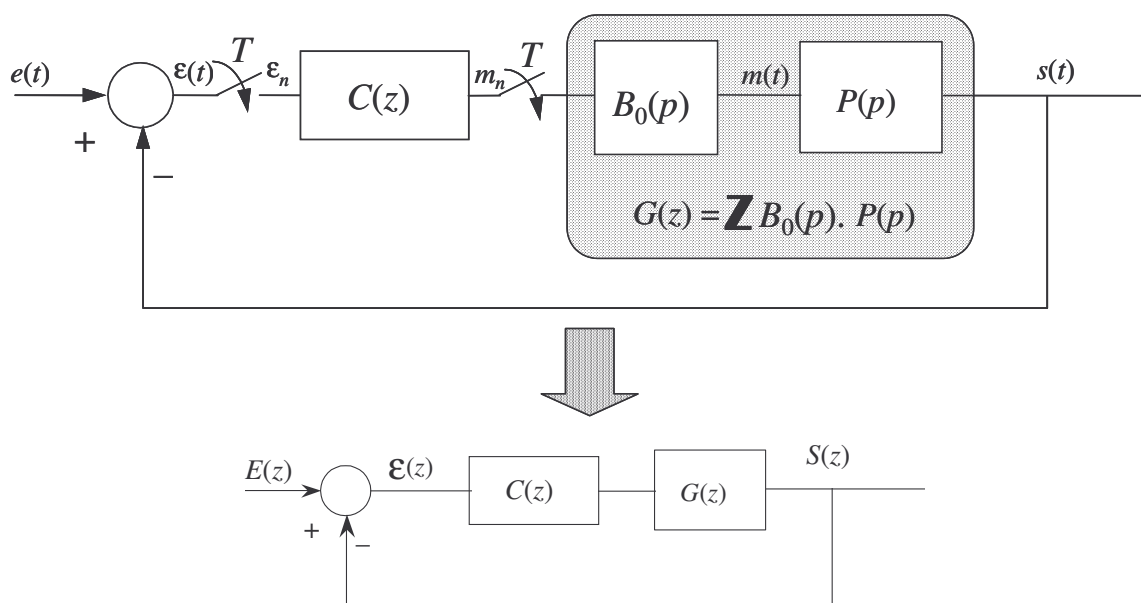


Figure 4 : Transposition de la boucle de commande dans le domaine « z »

Connaissant la $FTBO(z) = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z)}$ du système de commande, il s'agit d'apprécier sa stabilité en boucle fermée. Elle dépend de la distribution des pôles de la $FTBF(z)$ dans le plan complexe « z ». Lorsqu'on parle de lieu de racines ou des pôles il faut entendre lieu des pôles de la $FTBF(z)$ lorsqu'un paramètre (en général le facteur de gain) varie de 0 à l'infini.

Ces pôles sont les racines du dénominateur de la $FTBF(z)$. Calculons cette $FTBF(z)$.

$$FTBF(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{FTBO(z)}{1 + FTBO(z)} = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z) + Nbo(z)} = \frac{Nbf(z)}{Dbf(z)}$$

La stabilité de la $FTBF(z)$ dépend des racines de l'équation :

$$[1 + FTBO(z)] = Dbo(z) + Nbo(z) = 0$$

Ecrivons la $FTBO(z)$ sous la forme canonique permettant de mettre en évidence ses pôles, ses zéros et son facteur de gain k :

$$FTBO(z) = k \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_{Zi})}{\prod_{i=1}^d (z - z_{Pi})} = \frac{Nbo(z)}{Dbo(z)} ; \text{ attention le facteur de gain } k \neq K = \text{gain statique.}$$

Plaçons-nous dans le plan complexe z . Soit un point M d'affixe z dans ce plan. Ce point représente un pôle de la $FTBF(z)$ à la condition que, pour cette valeur de z , $[1 + FTBO(z)] = 0$ soit vérifiée. A chaque valeur de k on peut ainsi associer les solutions de :

$$[1 + FTBO(z)] = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^d (z - z_{Pi}) + k \prod_{i=1}^n (z - z_{Zi}) = Dbo(z) + Nbo(z) = 0$$

Si le facteur de gain k varie de zéro à l'infini les points représentatifs des pôles de la $FTBF(z)$ décrivent une courbe \mathbf{E} appelée lieu de EVANS ou lieu des racines (roots locus).

Pour étudier la stabilité d'un système de commande par la méthode de EVANS il convient :

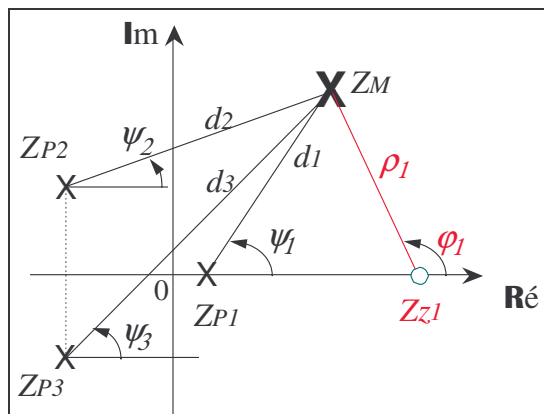
- de déterminer la $FTBO(z)$ du système concerné ;
- d'écrire la $FTBO(z)$ selon la forme canonique indiquée ci dessus ;
- de construire le lieu de EVANS \mathbf{E} à la main, selon les règles qui seront explicitées par la suite, ou en utilisant un logiciel adapté (e.g. MATLAB) ;
- de paramétrer le lieu \mathbf{E} en fonction du facteur de gain k ;
- d'analyser le tracé de \mathbf{E} ainsi réalisé afin de préciser les zones de stabilité de $FTBF(z)$ en fonction de k .

6.3.2. REGLES DE CONSTRUCTION

Rappelons quelques éléments concernant la représentation d'une fonction de transfert dans le plan complexe.

Soit à titre d'exemple $FTBO(z) = \frac{k(z - z_{Z1})}{(z - z_{P1})(z - z_{P2})(z - z_{P3})}$

Traçons les pôles et zéros de cette transmittance dans le plan complexe z . Pour tout point M d'affixe z_M il est possible de mesurer le module et l'argument de chaque pôle et zéro et ainsi de déterminer la transmittance $FTBO(z_M)$ au facteur de gain k près.



$$[FTBO(z)]_{z=z_M} = k \frac{\rho_1}{d_1 d_2 d_3} e^{j(\varphi_1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3)}$$

a. Conditions des angles et des modules

$$1 + FTBO(z) = 0 \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_{Zi})}{\prod_{i=1}^d (z - z_{Pi})} = \frac{-1}{k} \quad \text{avec} \quad k > 0 \Rightarrow \frac{-1}{k} = \frac{1}{k} e^{j(2\lambda+1)\pi}$$

Généralisons :

$$\frac{\prod_{i=1}^n (z_M - z_{Zi})}{\prod_{i=1}^d (z_M - z_{Pi})} = \frac{\prod_{i=1}^n \rho_i}{\prod_{i=1}^d d_i} e^{j \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i - \sum_{i=1}^d \psi_i \right]} = \frac{1}{k} e^{j(2\lambda+1)\pi}$$

Si $z_M \in \mathbf{E}$ (lieu de EVANS) alors les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{condition des angles : } \sum_{i=1}^n \varphi_i - \sum_{i=1}^d \psi_i &= (2\lambda + 1)\pi \\ \Rightarrow \text{condition des modules : } \frac{\prod_{i=1}^n \rho_i}{\prod_{i=1}^d d_i} &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

b. Axe de symétrie

Les racines de $[1 + FTBO(z)] = 0$ sont réelles ou 2 à 2 conjuguées. **L'axe réel du plan complexe z est donc axe de symétrie.**

c. Points de départ et d'arrivée

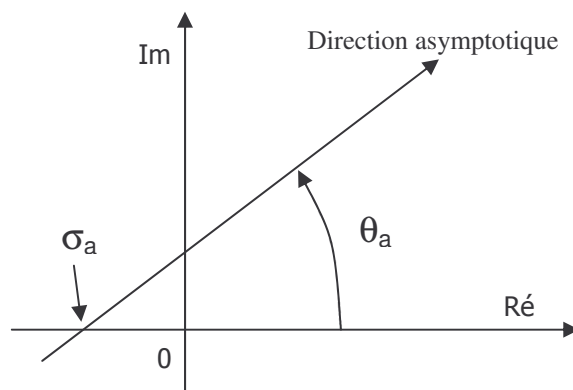
Le facteur de gain k est le paramètre de réglage. Il varie de zéro à l'infini.

$k = 0 \Rightarrow z = z_{Pi} \Rightarrow$ les d pôles de la $FTBO(z)$ sont **les points de départ** de \mathbf{E}

$k = \infty \Rightarrow z = z_{Zi} \Rightarrow$ les n zéros de la $FTBO(z)$ sont **les points d'arrivée** de \mathbf{E}

d. Directions asymptotiques

Il existe d points de départ et n points d'arrivée. Comme $d \geq n$ il existe $(d - n)$ directions asymptotiques.

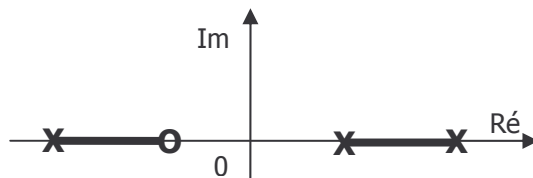


Avec :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^d z_{Pi} - \sum_{i=1}^n z_{Zi}}{d - n}$$

$$\theta_a = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{d - n}$$

e. Parties de l'axe réel \in au lieu \mathbf{E}



Tout point M de l'axe réel appartient à \mathbf{E} si on compte un nombre impair de pôles et de zéros à droite de M .

Cette appartenance se démontre facilement par la condition des angles.

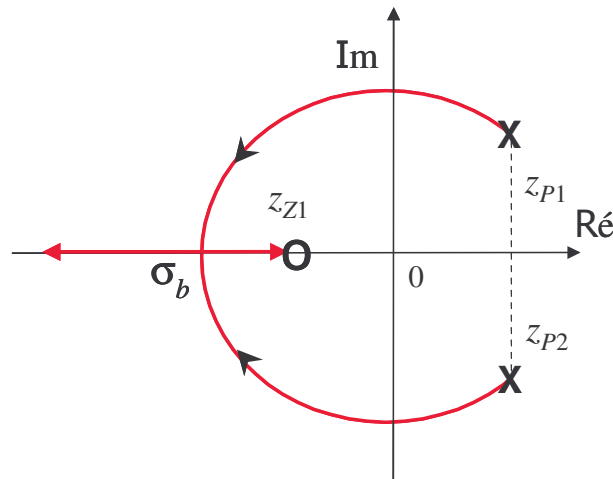
f. Points de branchement

Ces points correspondent à des racines doubles du lieu. L'exemple ci contre matérialise le point de branchement dont on désire calculer l'abscisse. On appliquera la méthode de calcul suivante :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_b - z_{Zi}} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_b - z_{Pi}}$$

ou encore :

$$\frac{dk}{dz} = 0 \quad \text{avec} \quad k = - \frac{\prod_{j=1}^d (z - z_{Pj})}{\prod_{i=1}^n (z - z_{Zi})}$$

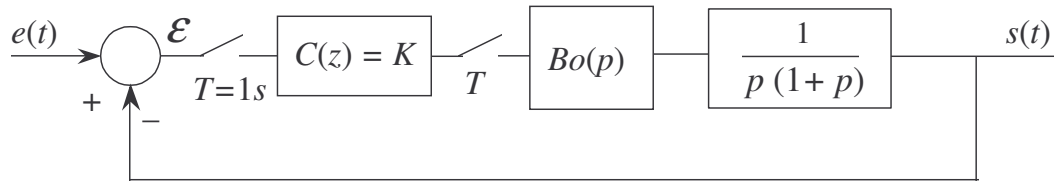


g. Tracé du lieu d'EVANS de quelques transmittances

On consultera l'annexe A.6.1.

6.3.3. APPLICATION

Considérons l'asservissement de position étudié en 6.2.4.



$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left[\frac{1}{p^2(1+p)} \right] = \frac{0,37z + 0,26}{(z-1)(z-0,37)}$$

a. Méthode graphique et analytique

⇒ Identifions la $FTBO(z)$

$$FTBO(z) = \frac{0,37K(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} = \frac{k(z+0,7)}{(z-1)(z-0,37)} \quad \text{avec le facteur de gain } k = 0,37.K$$

⇒ Éléments pour tracer le lieu de

$n = 1 \Rightarrow 1$ point d'arrivée ; $d = 2 \Rightarrow 2$ points de départ ;

$(d - n) = 1 \Rightarrow 1$ direction asymptotique

⇒ Equation du lieu (hors axe réel)

$$Dbf(z) = \text{dénominateur de la } FTBF(z) \Rightarrow Dbf(z) = z^2 + (k - 1,37)z + (0,37 + 0,7k)$$

$$\text{Soit } z = x + jy \Rightarrow \begin{cases} (x + 0,7)^2 + y^2 = (1,35)^2 \\ k = 1,37 - 2x \end{cases}$$

La première équation indique que le lieu est un cercle.

La seconde équation permet de paramétrer le lieu.

⇒ Points de branchement : $\frac{dk}{dz} = 0 \Rightarrow \sigma_{b1} = -2,05$ et $\sigma_{b2} = 0,65$

⇒ Intersection avec le cercle unité

$$\left. \begin{aligned} (x+0,7)^2 + y^2 &= (1,35)^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0,2375$$

Sachant que $k = 1,37 - 2x \Rightarrow k_{os} = 0,895$
Soit $K_{os} = 2,42$

⇒ Analyse succincte des résultats

Le système est stable pour :

$$0 < k < 0,898 \text{ soit } 0 < K < 2,42$$

La pulsation des auto-oscillations est :

$$z_{os} = 0,2375 + j0,9714 = e^{j\omega_{os}} \Rightarrow \omega_{os} = 1,33 \text{ rd / s}$$

⇒ Tracé du lieu de EVANS

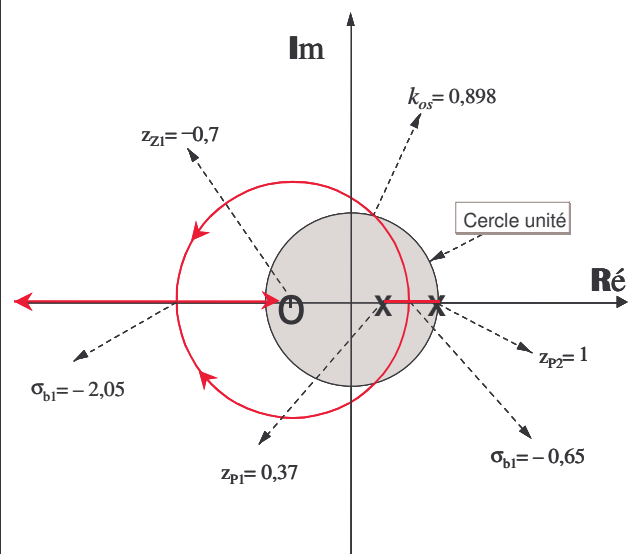


Figure 5 : Tracé du lieu de Evans

b. Utilisation du logiciel MATLAB:

Soit l'asservissement de position étudié en 6.2.4. La période d'échantillonnage est de 1s.

<pre>>> Gdp=tf([1],[1 1 0]); >> Gdz=c2d(Gdp,1) Transfer function: 0.3679 z + 0.2642 ----- z^2 - 1.368 z + 0.3679 Sampling time: 1</pre>	<p>On définit $G(p) = 1/p(1+p)$</p> <p>On convertit le système continu associé à un bloqueur d'ordre 0 en un système discret par la commande (c2d) avec $T = 1s$.</p> <p>On obtient directement Gdz c'est à dire $G(z)$.</p> <p>Dans ce cas MATLAB sait que Gdz est la fonction de transfert d'un système « discrétisé » au pas de une seconde.</p>
<pre>>> Ndz=[0.3679 0.2642]; >> Ddz=[1 -1.368 0.3679]; >> Gdz=tf(Ndz,Ddz,-1)</pre>	<p>On aurait pu ne connaître que les polynômes Ndz et Ddz. Dans ce cas on obtient la fonction de transfert Gdz par l'instruction ci-contre. Le paramètre -1 indique que le système est numérique de période non précisée.</p>

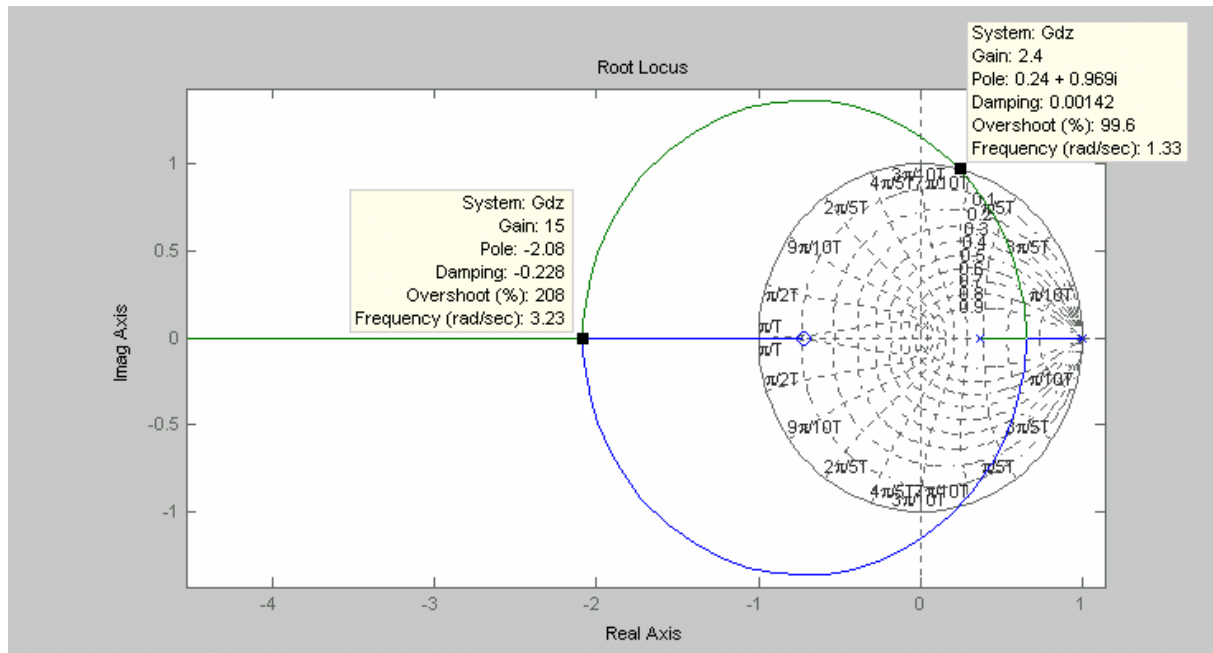
On obtient la forme de EVANS :

```
>> zpkgdz=zpk(Gdz) % on obtient la forme zpk de Gdz
Zero/pole/gain:
0.3679 (z+0.7181)
-----
(z-1) (z-0.3678)
Sampling time: unspecified
```

Traçons le lieu de EVANS :

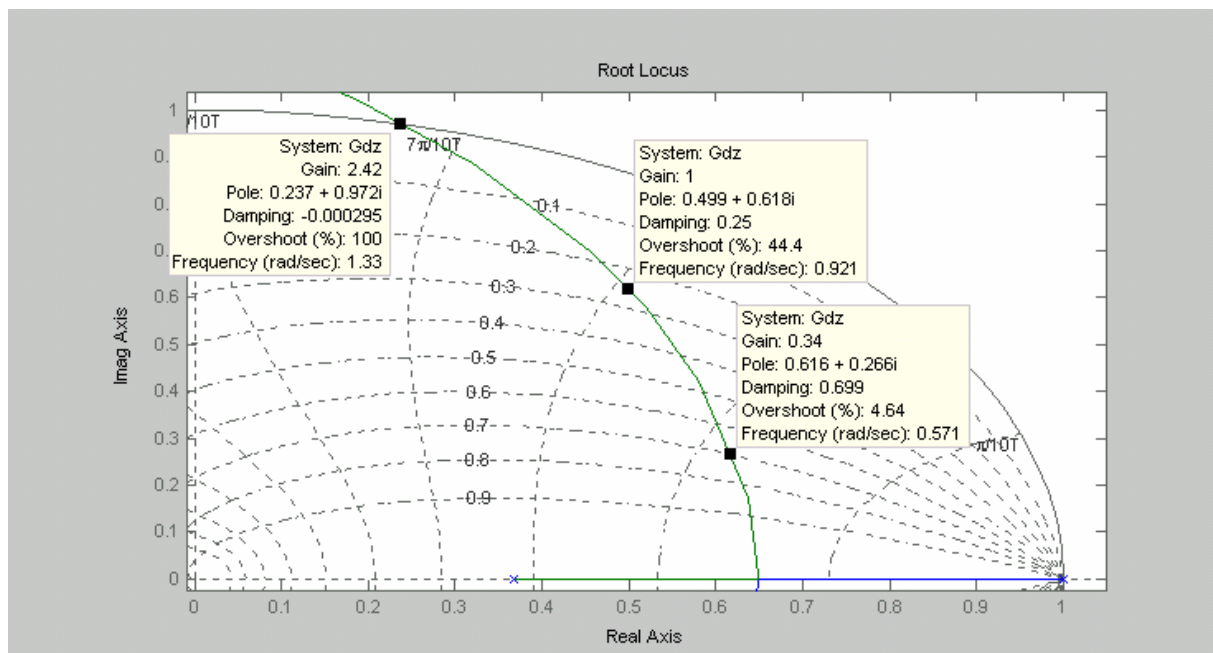
```
>> rlocus(Gdz),zgrid % on obtient la figure la figure ci-dessous
```

Attention le gain affiché par le « LTI viewer » est égal au gain statique.



On explicitera au chapitre 8 l'intérêt de la grille obtenue avec la commande « zgrid ».

Avec la souris on peut déplacer le curseur de mesure sur le lieu et l'on apprécie les performances de la boucle fermée. Ainsi pour $K = 2,42$ le système n'est plus amorti et il oscille à la pulsation de 1,33 rad/s. Avec le zoom on peut travailler finement sur cette figure.



On apprécie finement les performances de l'asservissement en boucle fermée. Ainsi pour $K = 0,34$ on obtient un amortissement de 0,7 correspondant à un dépassement est de 4,6 %. De même pour $K = 1$ on vérifie que le dépassement est supérieur à 44 %.

On peut encore sélectionner un point sur la figure et connaître, dans la fenêtre MATLAB, les données attachées à ce point (pôles de la *FTBF* et *facteur de gain k*).

```
>> [k,poles]=rlocfind(Gdz)
Select a point in the graphics window
selected_point =
    0.6164 + 0.2633i
k =    0.3368
poles =    0.6221 + 0.2644i
         0.6221 - 0.2644i
```

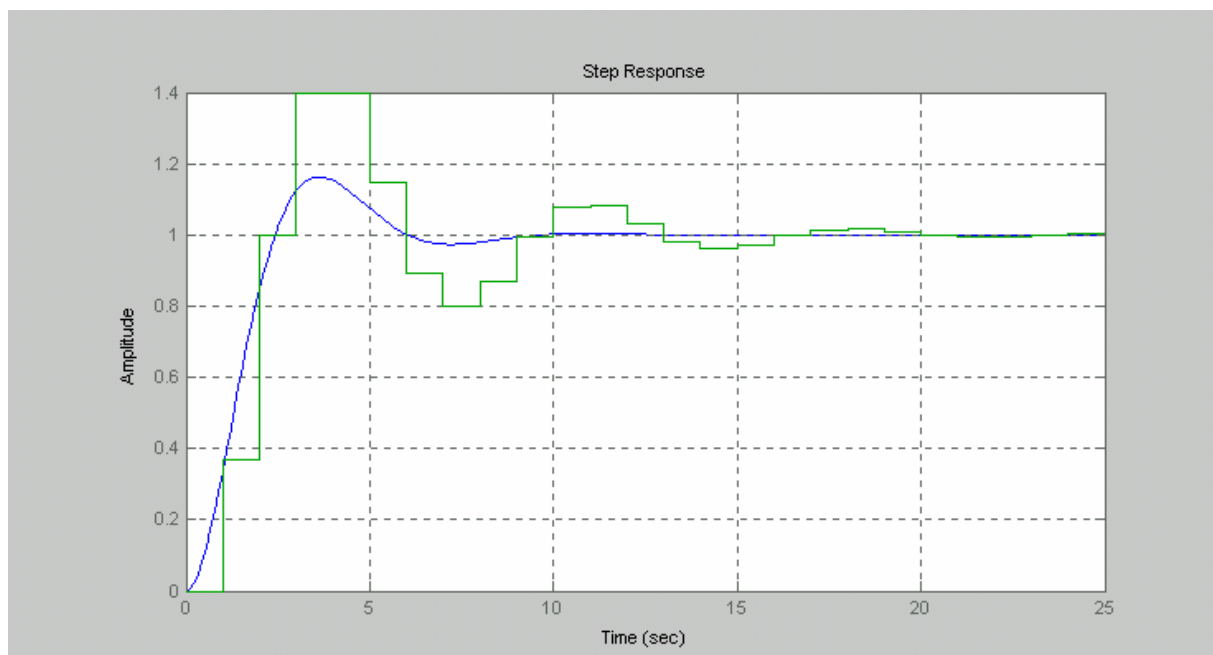
A titre d'exercice calculons la *FTBF* du système continu (*Ftbfdp*) et celle du système échantillonné (*Ftbf dz*) et comparons leur réponse indicielle grâce au « LTI viewer ».

```
>> Ftbf dz=feedback(Gdz,1)
Transfer function:
0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - z + 0.6321
Sampling time: 1
>> Ftbf dp=feedback(Gdp,1)
Transfer function:
1
-----
s^2 + s + 1
```

Attention la réponse indicielle du système échantillonné en boucle fermée est donnée **aux seuls instants d'échantillonnage**. Ce qui se passe entre ces instants nous l'ignorons.

Pour le connaître on simulera le processus avec SIMULINK.

```
>> step(Ftbf dz,Ftbf dp)
```

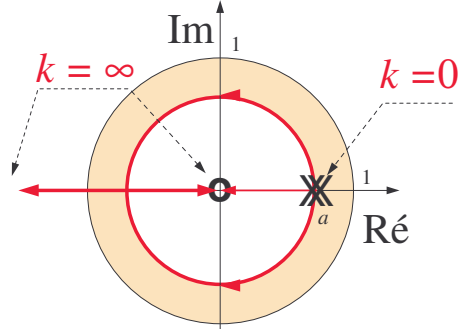
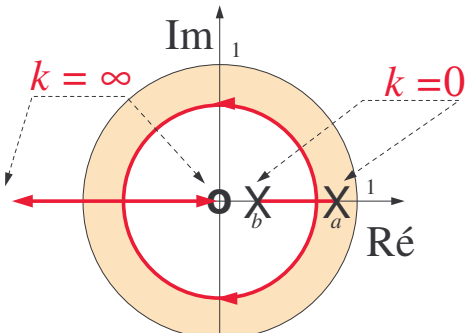
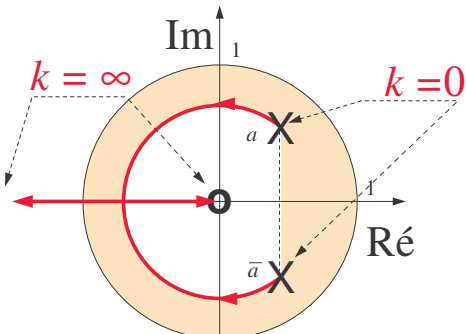
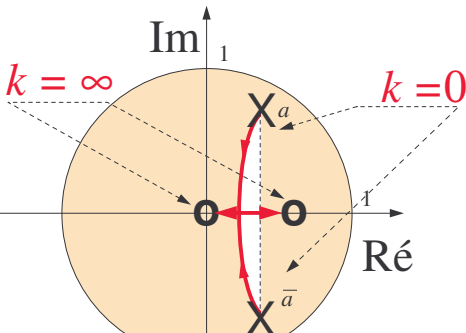


On remarquera l'effet déstabilisant de l'échantillonnage.

ANNEXE A.6.1.

LIEU D'EVANS

Transmittance	Lieu d'EVANS E
$\frac{1}{z-1}$	
$\frac{z}{z-1}$	
$\frac{z}{(z-1)^2}$	

$\frac{z}{(z-a)^2} \quad a \in \mathbf{R}$	 <p>Diagram illustrating the root locus for the transfer function $\frac{z}{(z-a)^2}$ with $a \in \mathbf{R}$. The plot shows a root at the origin (0) and a branch starting at a on the real axis, moving towards negative infinity. The region of stability is the interior of the unit circle, shaded in orange. The axes are labeled Im (vertical) and Ré (horizontal). The unit circle is marked with 1. The root locus is shown for $k=0$ (starting at a) and $k=\infty$ (starting at the origin).</p>
$\frac{z}{(z-a)(z-b)} \quad a, b \in \mathbf{R}$	 <p>Diagram illustrating the root locus for the transfer function $\frac{z}{(z-a)(z-b)}$ with $a, b \in \mathbf{R}$. The plot shows two poles on the real axis at a and b. A branch exists between a and b, and another branch starts at b and moves towards negative infinity. The region of stability is the interior of the unit circle, shaded in orange. The axes are labeled Im (vertical) and Ré (horizontal). The unit circle is marked with 1. The root locus is shown for $k=0$ (starting at a) and $k=\infty$ (starting at the origin).</p>
$\frac{z}{(z-a)(z-\bar{a})} \quad a \in \mathbf{C}$	 <p>Diagram illustrating the root locus for the transfer function $\frac{z}{(z-a)(z-\bar{a})}$ with $a \in \mathbf{C}$. The plot shows two poles on a complex conjugate pair at a and \bar{a}. A branch exists between a and \bar{a}. The region of stability is the interior of the unit circle, shaded in orange. The axes are labeled Im (vertical) and Ré (horizontal). The unit circle is marked with 1. The root locus is shown for $k=0$ (starting at a) and $k=\infty$ (starting at the origin).</p>
$\frac{z(z-b)}{(z-a)(z-\bar{a})} \quad b \in \mathbf{R} \text{ et } a \in \mathbf{C}$	 <p>Diagram illustrating the root locus for the transfer function $\frac{z(z-b)}{(z-a)(z-\bar{a})}$ with $b \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{C}$. The plot shows a zero at b on the real axis and a complex conjugate pole pair at a and \bar{a}. A branch exists between a and \bar{a}, and another branch starts at b and moves towards negative infinity. The region of stability is the interior of the unit circle, shaded in orange. The axes are labeled Im (vertical) and Ré (horizontal). The unit circle is marked with 1. The root locus is shown for $k=0$ (starting at a) and $k=\infty$ (starting at the origin).</p>