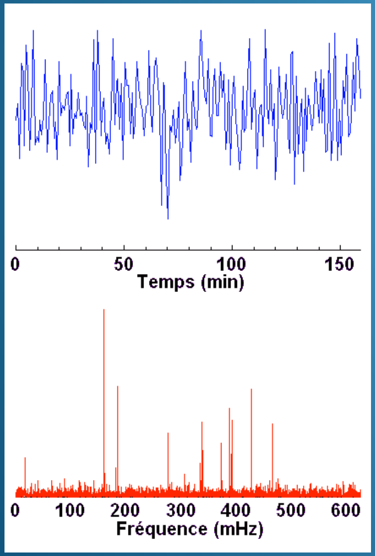
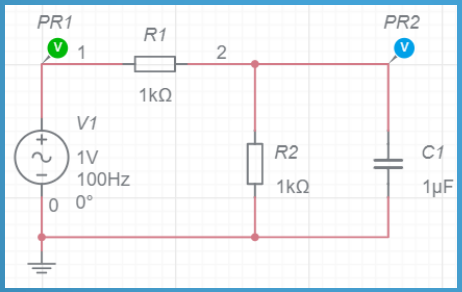
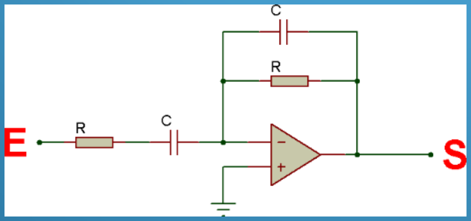
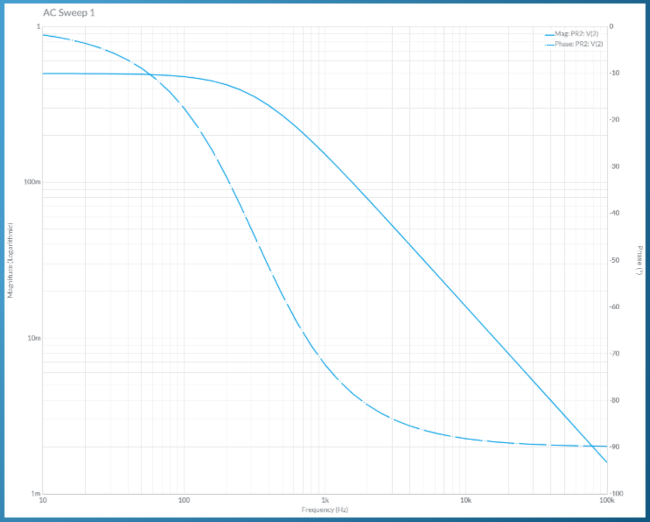
Dualité temps-fréquence et filtrage

Elen2 – Module R2-08









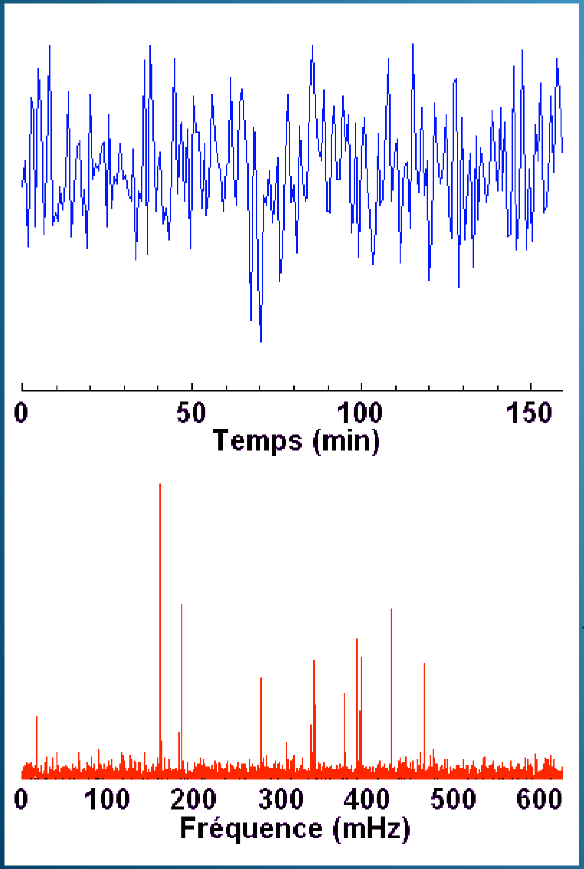
Jean-François LIEBAUT, BUT GEII
Université de Toulon, 🖃 : *liebaut@univ-tln.fr*

Organisation du module

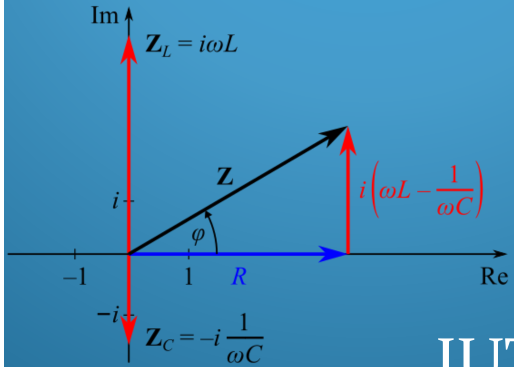
- **Électronique Elen2 (R2-08 : 60h => 13,5+16,5+30)**
  - **Dualité temps fréquence et filtres 1er ordre (40,5h Jean-François LIEBAUT)**
    - 6 cours (9h) : JFL
      - Effet de la fréquence, impédances complexes
      - Représentation spectrale, diagramme de Bode
      - Fonction de transfert, forme canonique 1er ordre
      - Filtres passifs du 1er ordre
      - Filtres actifs du 1er ordre
      - Compléments AOP (monotension-limites)
    - 7 TD (10,5h) : JFL x2, JB x1
      - TD1 : Analyse de circuits en alternatif sinusoïdal
      - TD2 : Diagramme semi-logarithmique
      - TD3 & TD4 : Filtres passifs 1er ordre
      - TD5 & TD6 : Filtre actif 1er ordre
      - TD7 : AOP mono tension
    - 7 TP (21h) : JFL x2, JB x1, ED x1, SK x1, GD x1
      - TP1 : Effets d'un filtre, analyse fréquentielle
      - TP2 : Relevé de diagramme de Bode d'un filtre passif 1er ordre
      - TP3 : Filtre actif passe bas, passe haut
      - TP4 : Filtre actif passe bande
      - TP5 : Limites des AOP
      - TP6 : Filtre AOP mono tension
      - Partiel TP
  - **Filtres 2nd ordre et générateur de signaux (19,5h Sébastien PIOCH)**

1. Effets de la fréquence, impédances complexes
2. Représentation spectrale, le diagramme de Bode
3. Fonctions de transfert et formes canoniques du 1er ordre.
4. Les filtres passifs du 1er ordre.
5. Les filtres passifs du 2nd ordre.
6. Compléments sur les montages à AOP.

BUT 1 – Elen2 – Module R2-08
Filtrage en électronique



1. Effets de la fréquence, impédances complexes



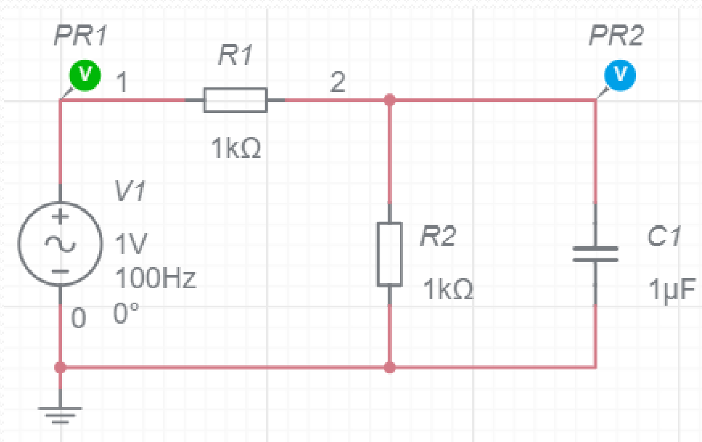
Jean-François LIEBAUT
IUT GEII, université de Toulon
: *liebaut@univ-tln.fr*

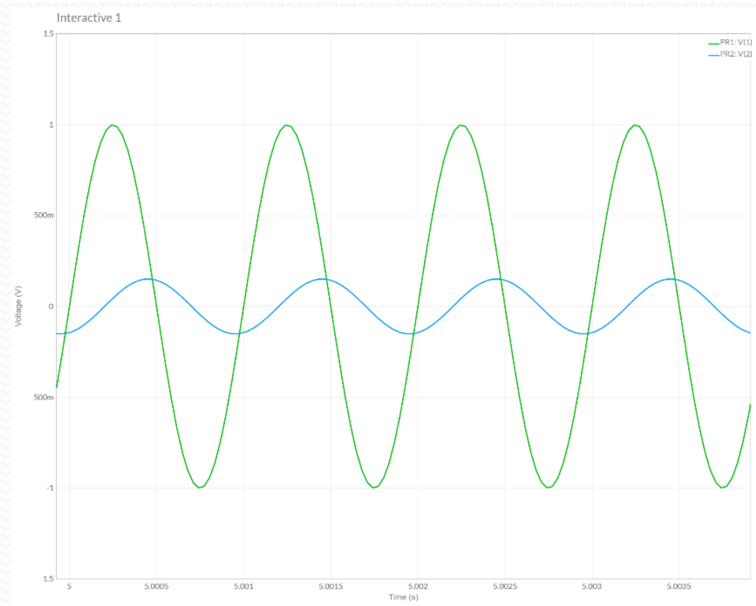
Plan du cours

- Effets de la fréquence, expérimentation
- Représentation temporelle, vectorielle et complexe des grandeurs électriques
- Impédances complexes et loi d'Ohm généralisée
- Exemples de calculs

Effet de la fréquence sur un circuit

- Soit un circuit électrique
  - Composé de composants passifs (pour faire plus simple)
  - Soumis à un générateur de tension sinusoïdal (ou générateur de courant)
  - On observe la tension de sortie
  - On fait varier la fréquence du générateur.





- Constatations :
  - Les différents signaux sont sinusoïdaux (tensions et courants).

⇨ Définition : Dans un circuit composé de composants linéaires, commandé par un générateur sinusoïdal, toutes les grandeurs électriques (tensions et courants) sont de forme sinusoïdales également et à la même fréquence que celle du générateur.

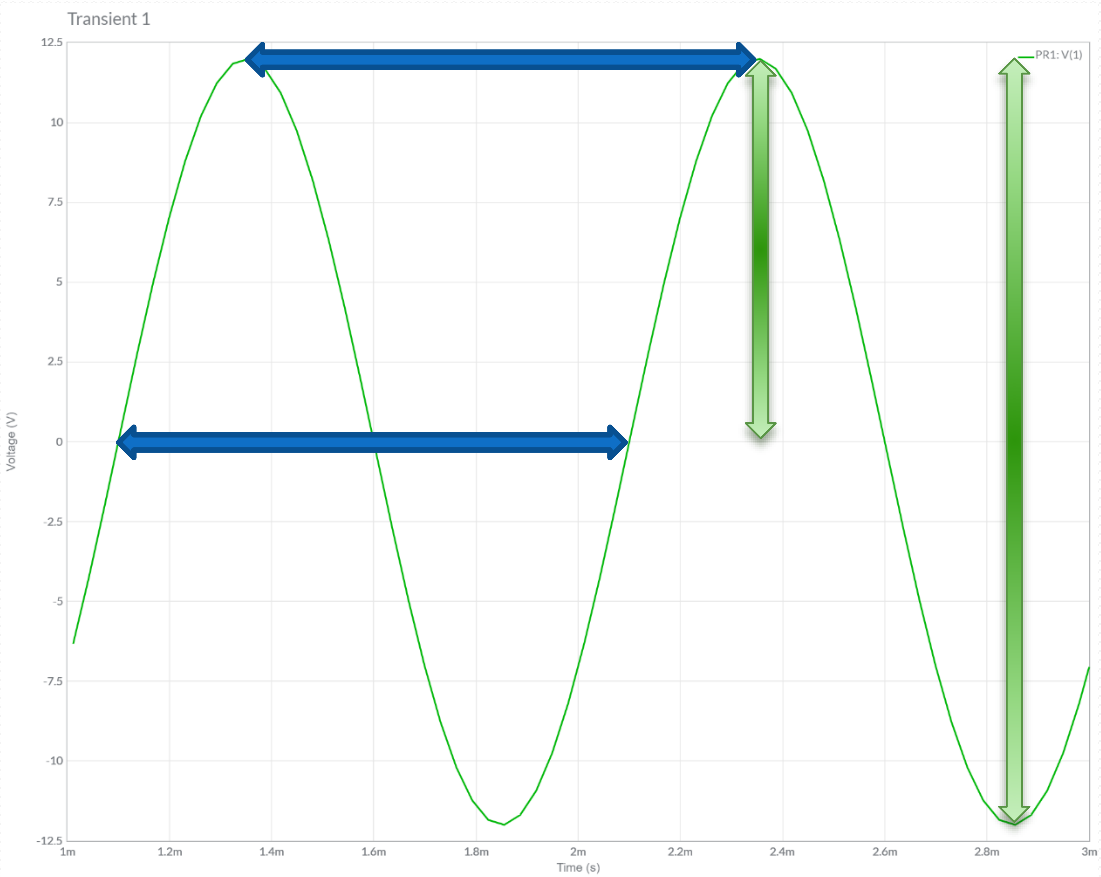
NB : composants linéaires : résistors, bobines, condensateurs.

  - L'amplitude du signal de sortie varie avec la fréquence.
  - Le déphasage entre les signaux varie avec la fréquence.
- Questions :
  - Peut-on quantifier ces variations par rapport à la fréquence ?
  - $V_S = f(\omega)$ et $\arg(V_S) = f(\omega)$? NB : f ou ω=2.π.f
  - Quels outils pour l'analyse harmonique ?

Représentation temporelle

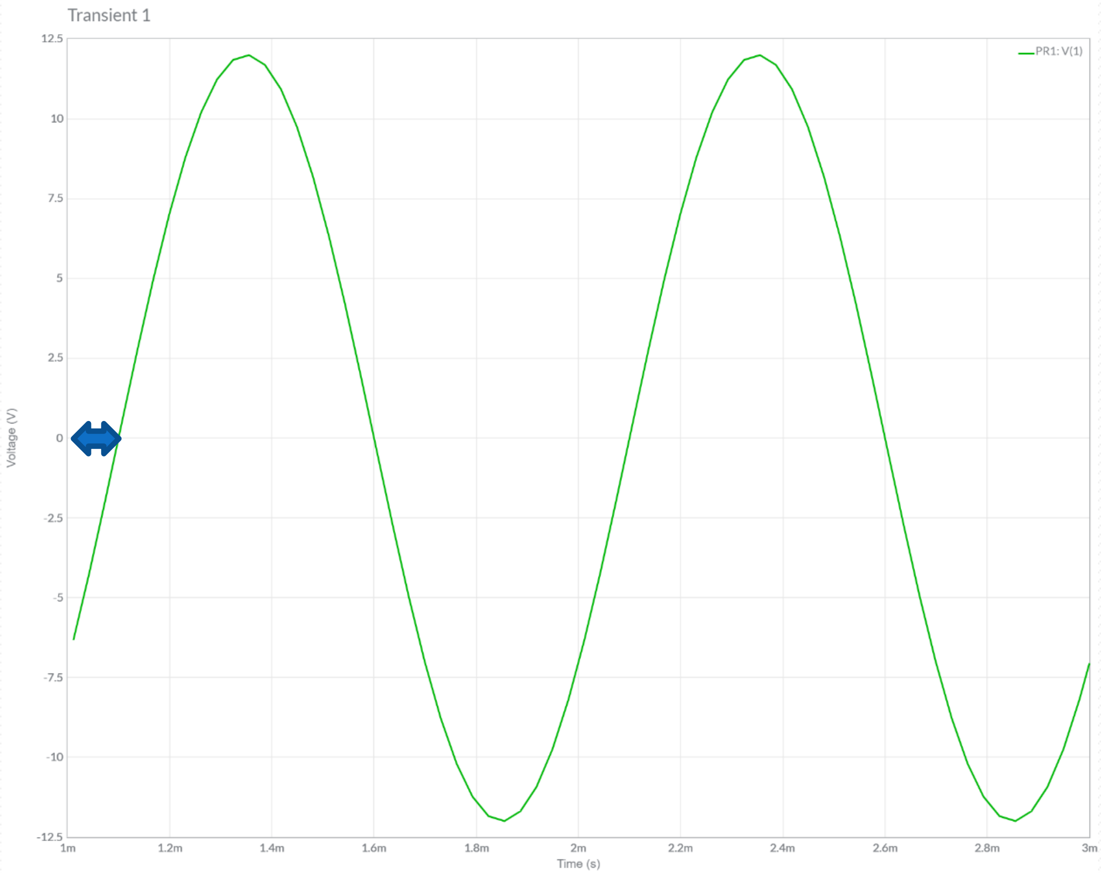
- Tension (ou courant) sinusoïdale
  - De manière quelconque :

$$V(t) = V_{max}.\sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}.V_{eff}.\sin(\omega t + \varphi)$$



- ✓ Mesure de la période :
  - Entre 2 passage par 0 ↑
  - Entre 2 maximum, …
  - Ici T=1 ms
- ✓ Fréquence et pulsation :
  - f=1/T ici f = 1/10⁻³ = 1 kHz
  - ω = 2.π.f = 6,28 k rad/s
- ✓ Mesure de l'amplitude :
  - Entre min et max (CC) ⇨ $2.V_{max}$
  - Entre 0 et max ⇨ V_{max}
  - Ici $V_{max} = 12V$
- ✓ Valeur efficace :
  - $V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = 8,48V$

- Suite … $V(t) = V_{max}.\sin(\omega t + \varphi)$
  - ✓ La phase cela dépend de l'origine des temps …
  - ✓ Il faut une référence !
  - ✓ Ici la référence c'est t=0, mais avec un oscilloscope ? ⇨ Instant de synchro.
  - ✓ Ou référence à chaque période t=0+k.T.



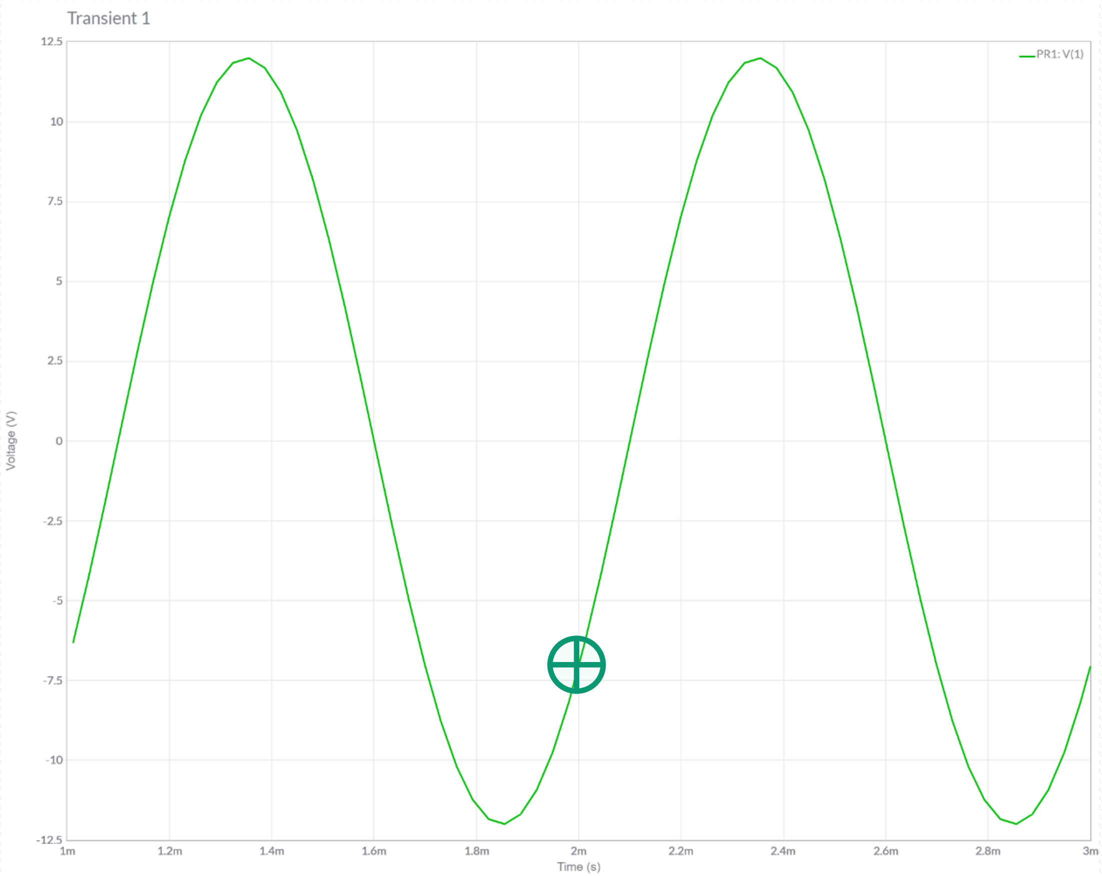
✓ Mesure de la phase méthode n° 1 :

- Au passage par 0 ↑ par rapport au dernier kT.
- On mesure un temps qu'il faut convertir T⇔2π (ou 360°);
- Ici -0,1 ms pour une période T=1 ms (– car passe 0,1ms après en 0).

⇨φ= -2π.0,1/1=0,2.π

φ=-0,62 rad

- Suite … $V(t) = V_{max} . \sin(\omega t + \varphi)$



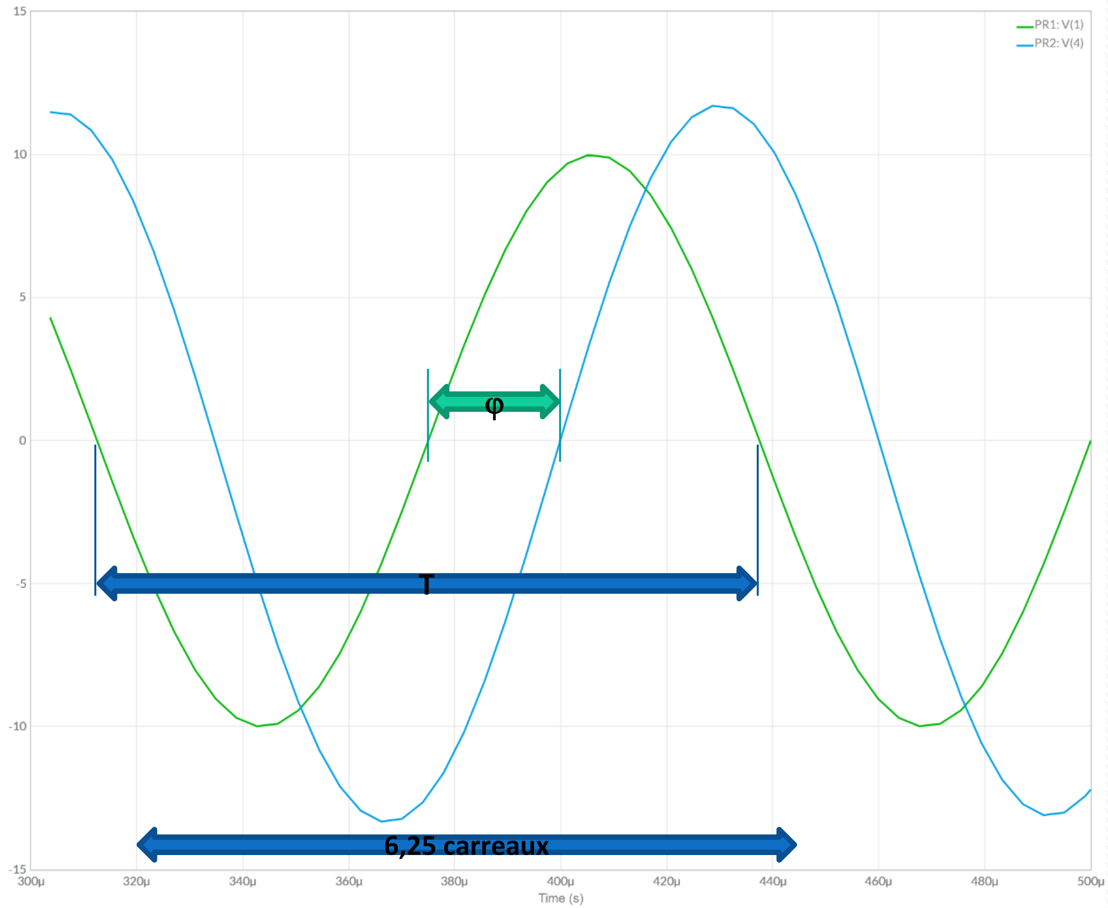
✓ Mesure de la phase méthode n° 2 :
  - Par mesure de valeur à kT (à une période)
  - On mesure la valeur instantanée et la valeur maximale ; ici Vmax=12V et A=-7V ;

$A = V_{max} . \sin(\omega kT + \varphi) \Rightarrow$
$-7 = 12 . \sin(2k\pi + \varphi) = 12. \sin(\varphi)$

⇨ φ= arcsin(-7/12)

φ = -0,62 rad

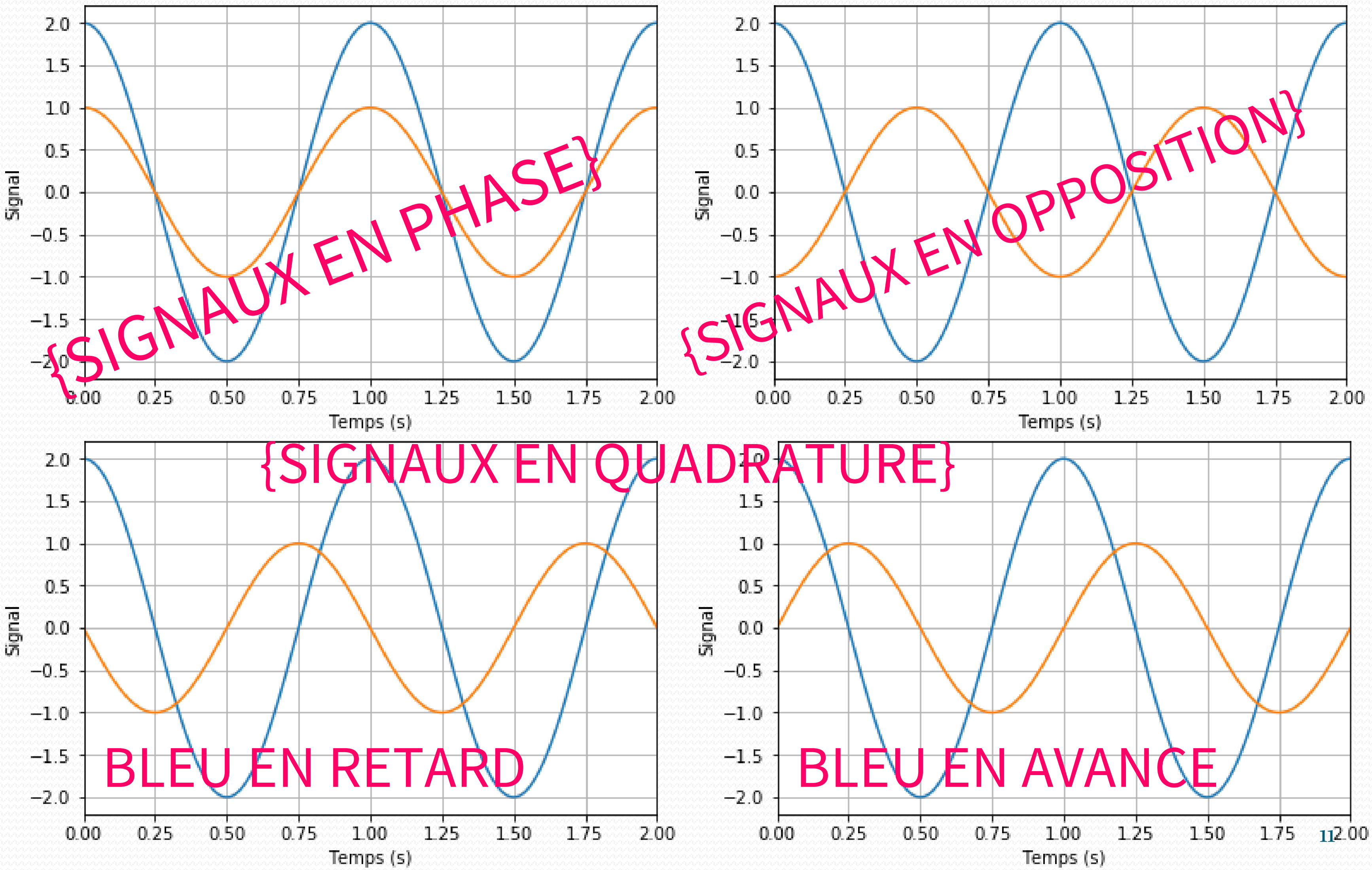
- Déphasage entre deux signaux
  - Dans le même circuit donc de même fréquence
  - Déphasage à une période près donc +/- 2kπ
  - Généralement un signal sert de référence de phase



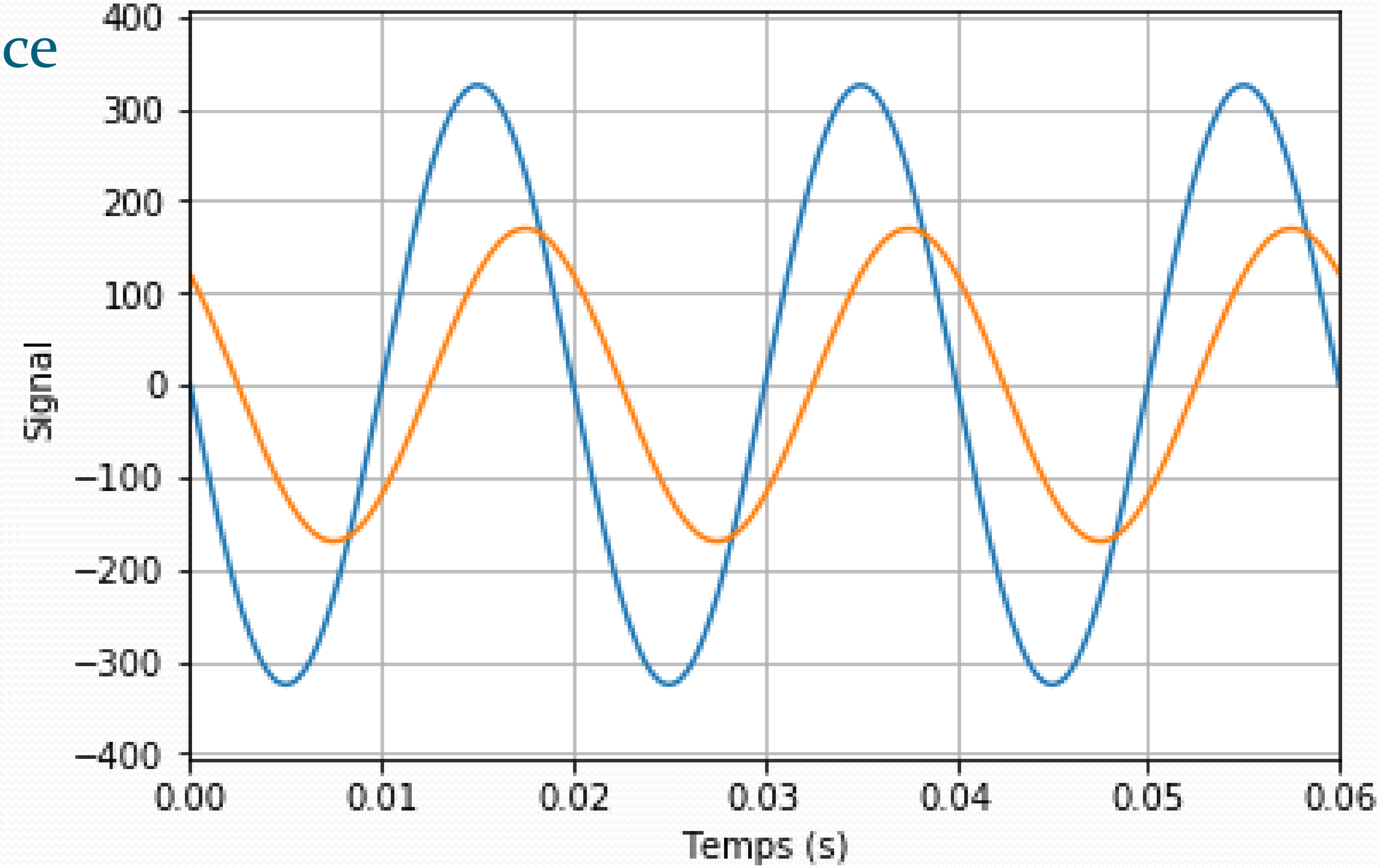
- ✓ Courbe verte comme référence de phase.
- ✓ Mesure de la fréquence :
  - T ⬄ 6,25 carreaux, 1 carreau ⬄ 20µs
  - T=125 µs ⇨ f=8kHz
- ✓ Mesure du déphasage entre les 2 signaux :
  - φ ⬄ 1,25 car. ⬄ 25µs
  - T=125 µs ⬄ 2π
  - ⇨ φ=2π.25/125 = 2π/5
  - ⇨ φ=1,256 rad ou 72°
- ✓ Signe du déphasage :
  - Signal bleu en retard (passe par 0 après)
  - ⇨ φ=-1,256 rad ou -72°

Déphasage entre deux signaux (suite)

- Cas remarquables :



- Exercice

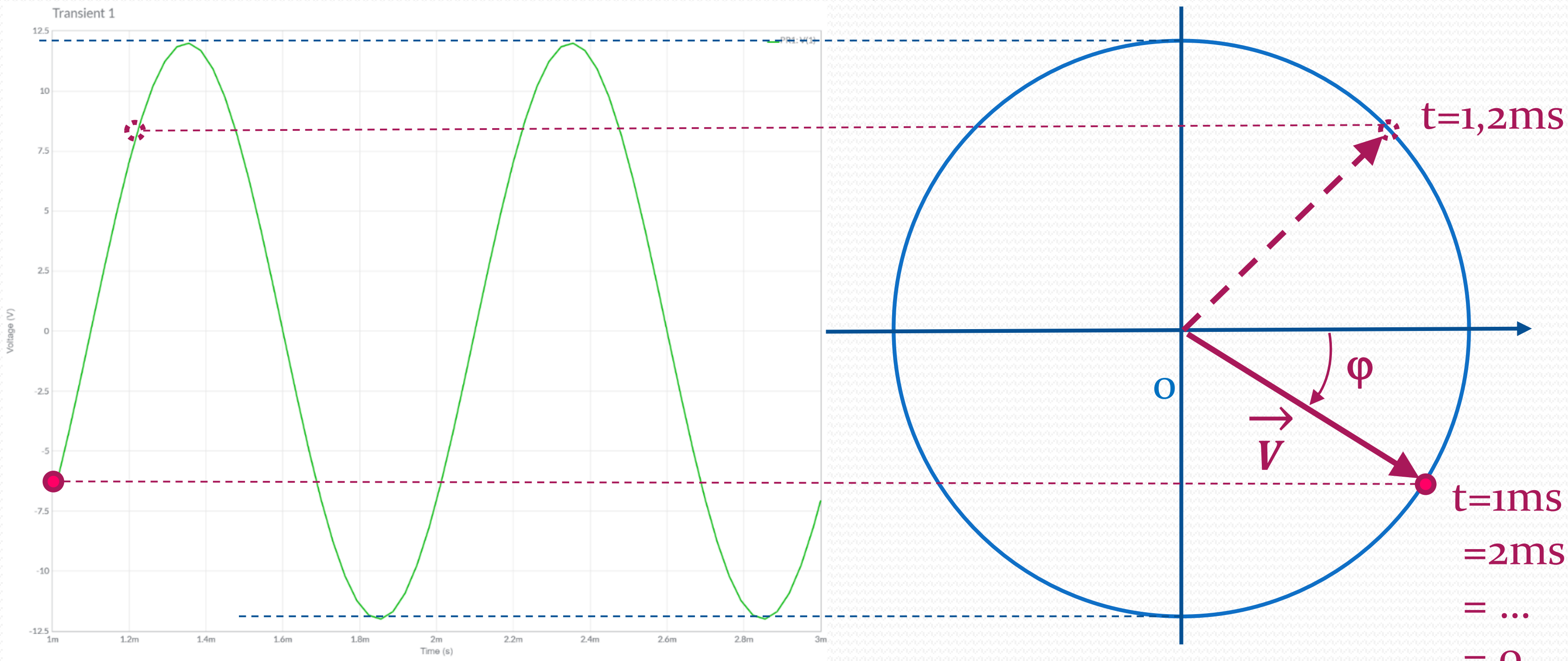


- ✓ Déterminer la fréquence et les valeurs efficaces des signaux. **T=20ms ⇨ f=50Hz**
- ✓ Déterminez le déphasage du signal orange par rapport au bleu. **¼ de carreau $-\frac{\pi}{4}$**
- ✓ Si le signal bleu est décrit par l'équation $230.\sqrt{2}.\sin(\omega t)$, qu'elle est celle du orange ? $\frac{170}{\sqrt{2}}.\boldsymbol{sin}\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)=120.\sqrt{2}.\boldsymbol{sin}\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$

Représentation vectorielle

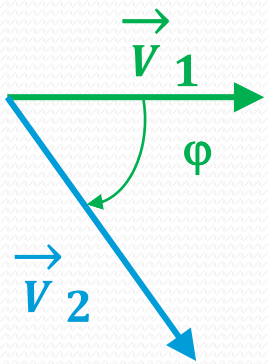
- Signal sinusoïdal
  - Expression temporelle :

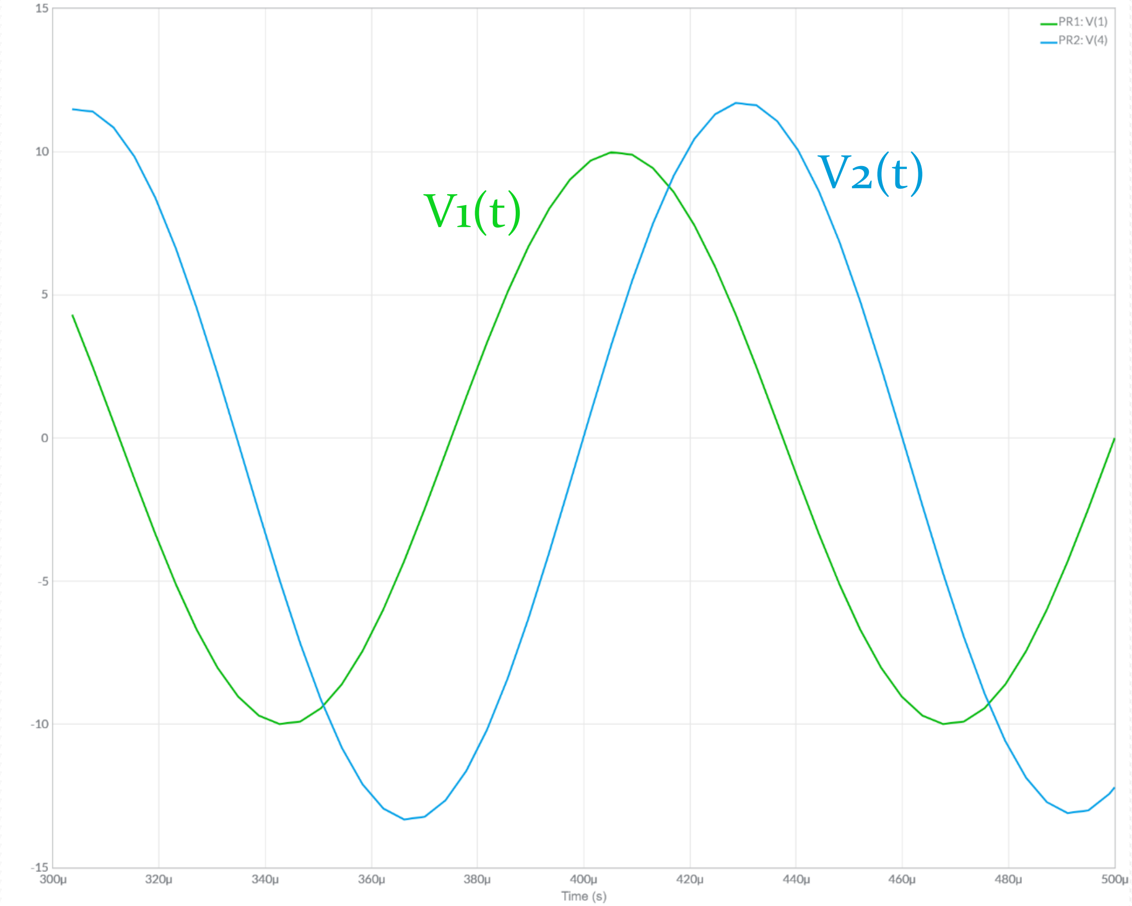
$$V(t) = V_{max}\,.\sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}.V_{eff}\,.\sin(\omega t + \varphi)$$



  - Représenté par un vecteur tournant à la vitesse ω.
  - Vecteur(s) fixe(s) à t=0 où si on se place dans le repère tournant.

- Plusieurs signaux
  - L'un sert de référence (vert ici)

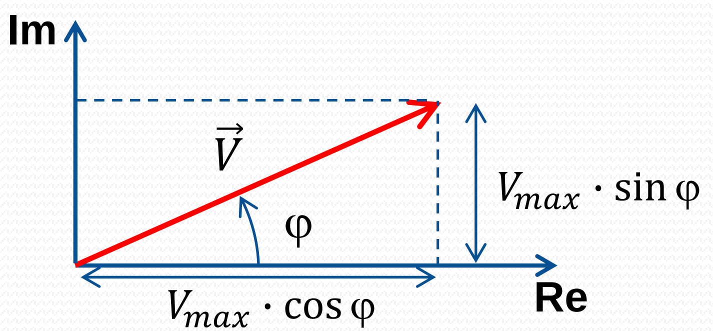




- Norme du vecteur ⇔ Valeur efficace ou **amplitude** (valeur maximale). Amplitude : V1 = 10V et V2 = 12V ici.
- Signe du déphasage (sens trigo => +, donc en avance, sinon – et en retard). $\overrightarrow{V_2}$ déphasé de -72° par rapport à $\overrightarrow{V_1}$ (V2 en retard).

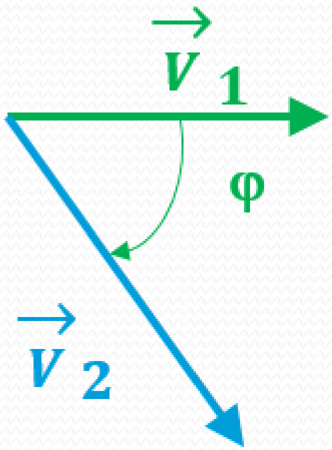
Représentation complexe

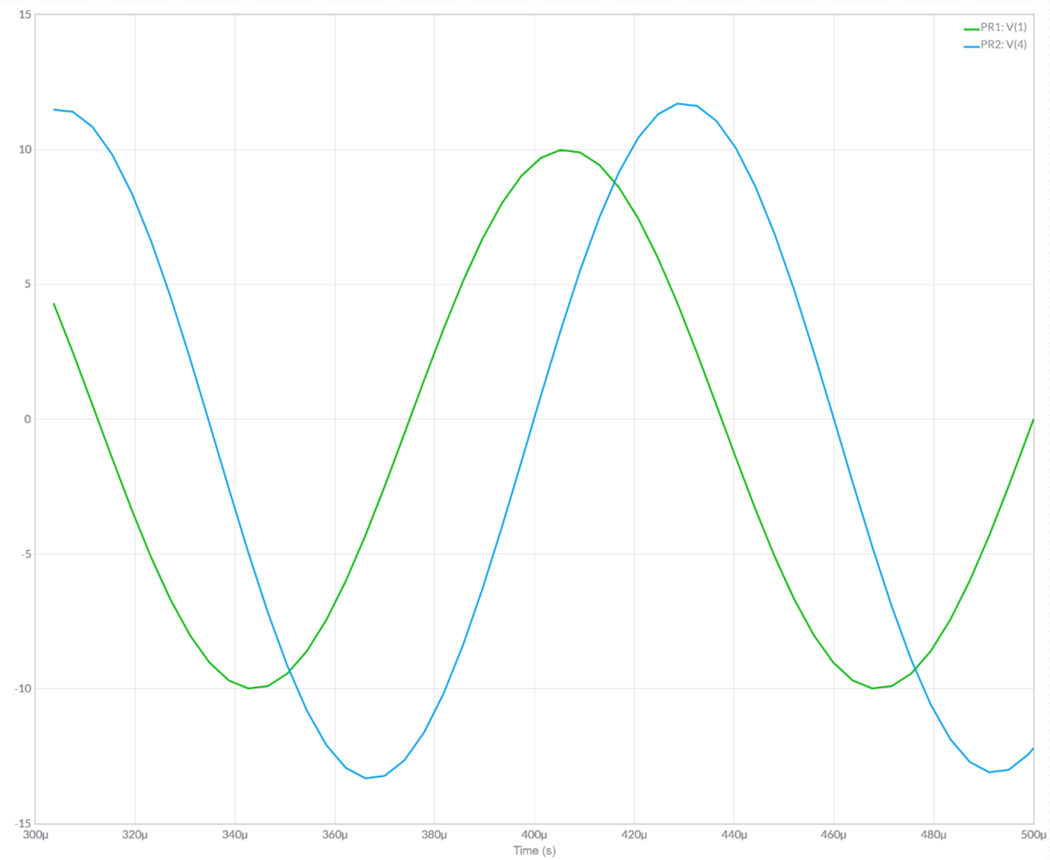
- Vecteur représenté dans le plan complexe
  - Expression temporelle : $V(t) = V_{max} . \cos(\omega t + \varphi)$
  - Temporelle et complexe : $V(t) = Re\left[V_{max} .\ e^{j(\omega t+\varphi)}\right]$
  - Expression complexe : $\underline{V} = V_{max} .\ e^{j\varphi}$ (ou valeur efficace en énergie)



  - Représentation de la grandeur complexe :
    - ✓ Forme cartésienne : $\underline{V} = V \cdot cos\,\varphi + j \cdot V \cdot sin\,\varphi = Re(\underline{V}) + j \cdot Im(\underline{V})$
    - ✓ Forme polaire : $\underline{V} = [V\,;\varphi] = \left[\sqrt{Re(\underline{V})^2 + Im(\underline{V})^2}\,; arctan\frac{Im(\underline{V})}{Re(\underline{V})}\right]$

- Exercice
  - Exprimer $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$



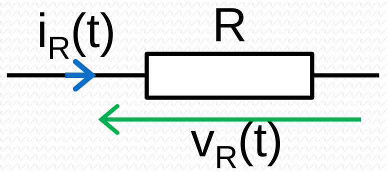


- Forme cartésienne :
  - ✓ $Re\left(\underline{V_1}\right) = V_1.cos\,\varphi_1 = 12.\cos(0) = 12V$
  - ✓ $Im\left(\underline{V_1}\right) = V_1.sin\,\varphi_1 = 12.\sin(0) = 0V$
  - ✓ $Re\left(\underline{V_2}\right) = V_2.cos\,\varphi_2 = 10.\cos(-72) = 3{,}09\ V$
  - ✓ $Im\left(\underline{V_2}\right) = V_2.sin\,\varphi_2 = 12.\sin(-72) = -9{,}51\ V$
  - ✓ $\underline{V_1} = 12$ et $\underline{V_2} = 3{,}09 - j.9{,}51$

- Forme polaire :
  - ✓ $\underline{V_1} = [12V; 0°]$
  - ✓ $\underline{V_2} = [10V; -72°]$

Impédance complexe

- Composant résistor
  - Relation instantanée courant tension :



$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

  - Cas particulier de l'alternatif sinusoïdal :

$$i_R(t) = I_{Rmax} . \sin(\omega t + \varphi)$$

A chaque instant t, $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$

⇨ $v_R(t) = R. I_{Rmax} . \sin(\omega t + \varphi)$, **tension en phase (/ courant)**

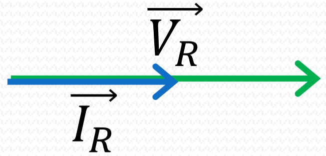
  - Relation courant-tension complexe :

$$\underline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{R}}$$

On défini l'impédance complexe d'un dipôle : $\underline{\boldsymbol{Z}} = \frac{\underline{\boldsymbol{V}}}{\underline{\boldsymbol{I}}}$

  - Impédance complexe d'un résistor :

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} = [\boldsymbol{R}; \boldsymbol{0}]$$

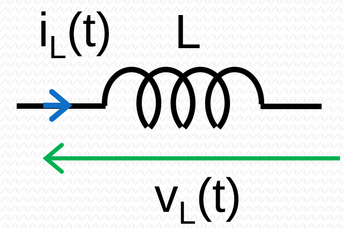


Exemples
Impédances
Représentation
Effets fréquence

- Composant bobine

  - Relation instantanée courant tension :

    $v_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}(t)$; L inductance en Henry (H)



  - Cas particulier de l'alternatif sinusoïdal :

    $i_L(t) = I_{Lmax} . \sin(\omega t + \varphi)$

    $\Rightarrow v_L(t) = L \cdot \frac{d(I_{Lmax} . \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = L\omega . I_{Lmax} . \cos(\omega t + \varphi)$

    $\Rightarrow v_L(t) = L\omega . I_{Lmax} . \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

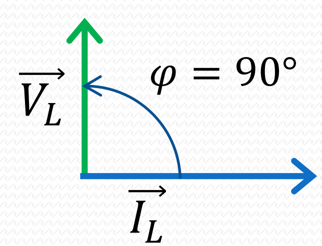
    Tension en quadrature et en avance de phase (/ courant)

  - Relation courant-tension complexe :

    $\underline{\boldsymbol{V_L}} = \boldsymbol{jL\omega} \cdot \underline{\boldsymbol{I_L}}$

  - Impédance complexe d'une bobine :

    $\underline{\boldsymbol{Z_L}} = \boldsymbol{jL\omega} = \left[\boldsymbol{L\omega ; +\frac{\pi}{2}}\right]$



Exemples

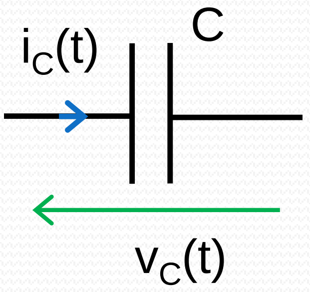
Impédances

Représentation

Effets fréquence

- Composant condensateur

  - Relation instantanée courant tension :



$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt}(t)$$; C capacité en Farad (F)

  - Cas particulier de l'alternatif sinusoïdal :

$$v_C(t) = V_{Cmax} \,.\, \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow i_C(t) = C \cdot \frac{d(V_{Cmax} \,.\sin(\omega t+\varphi))}{dt} = C\omega . V_{Cmax} \,.\, \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow i_C(t) = C\omega . V_{Cmax} \,.\, \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

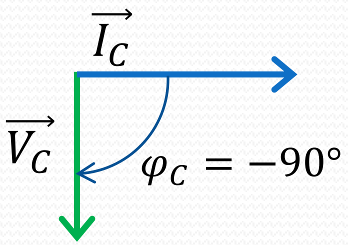
Tension en quadrature et en retard de phase (/ courant)

  - Relation courant-tension complexe :

$$\underline{\boldsymbol{V_C}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{jC\omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{I_C}}$$

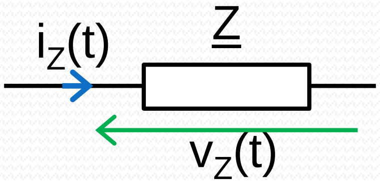
  - Impédance complexe d'un condensateur :

$$\underline{\boldsymbol{Z_C}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{jC\omega}} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C\omega}} ; -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$$



Intérêt de l'impédance complexe

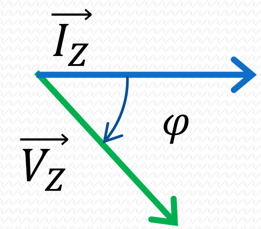
- Relation courant-tension complexe :



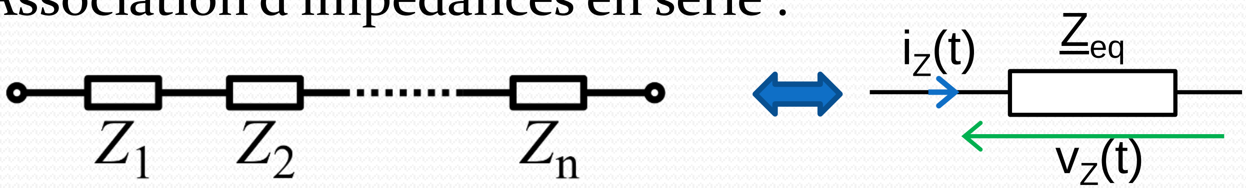
$$\underline{V_Z} = \underline{Z} \cdot \underline{I_Z} \qquad \text{(Idem résistances)}$$

- Déphasage tension courant en régime sinusoïdal :

$$\varphi = arg(\underline{Z})$$

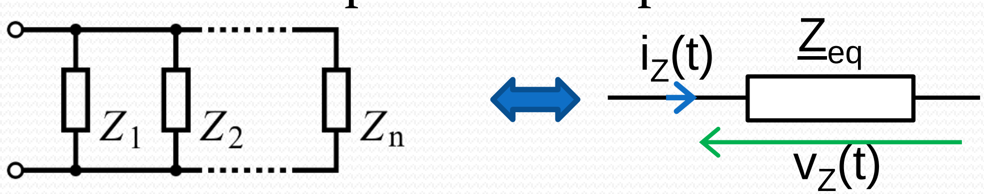


- Association d'impédances en série :



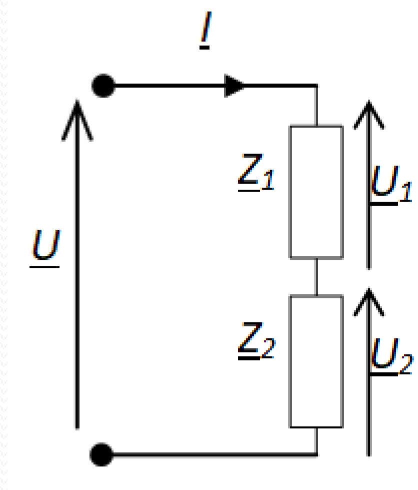
$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \cdots + \underline{Z_n}$$

- Association d'impédances en parallèle :



$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \cdots + \frac{1}{\underline{Z_n}}$$

- Intérêt de l'impédance complexe (suite)

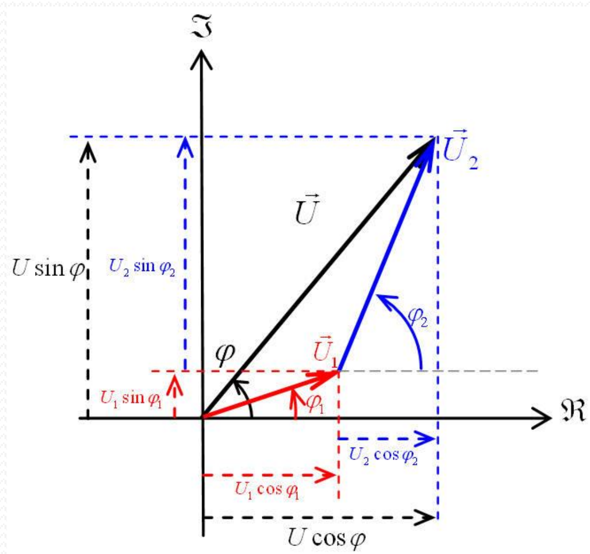


  - Loi des mailles :
    - ✓ Pour les grandeurs instantanées :

      $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$

    - ✓ En régime sinusoïdal avec Fresnel :

      $\vec{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$



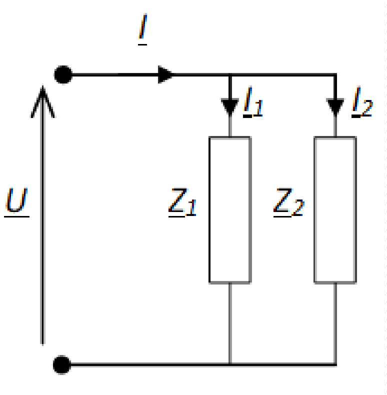
    - ✓ En régime sinusoïdal avec les complexes :

      $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$ **(Idem instantané)**

Intérêt de l'impédance complexe (suite)

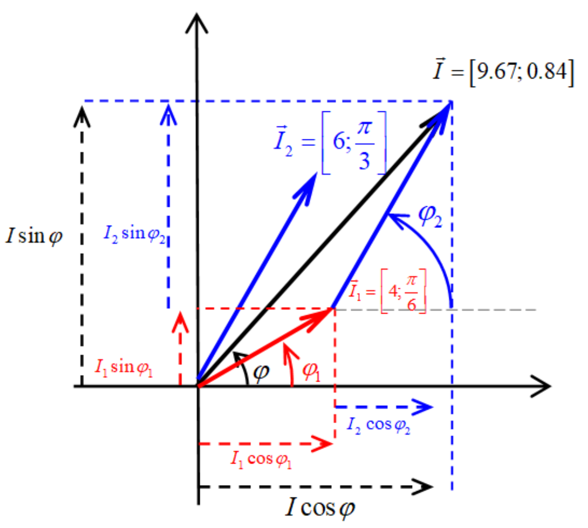
- Loi des noeux :
  - Pour les grandeurs instantanées :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$



  - En régime sinusoïdal avec Fresnel :

$$\vec{I} = \overrightarrow{I_1} + \overrightarrow{I_2}$$



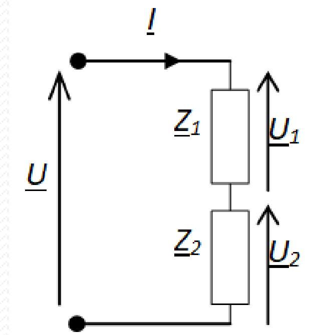
  - En régime sinusoïdal avec les complexes :

$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$ **(Idem instantané)**

Intérêt de l'impédance complexe (suite)

- Mais aussi :
  - ✓ Pont diviseur de tension :

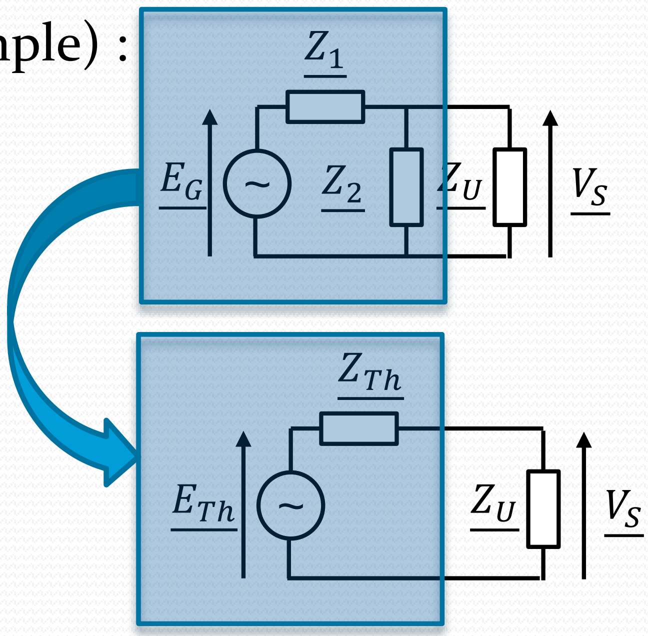
$$\underline{U_1} = \frac{\underline{U}.\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} \qquad \underline{U_2} = \frac{\underline{U}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$



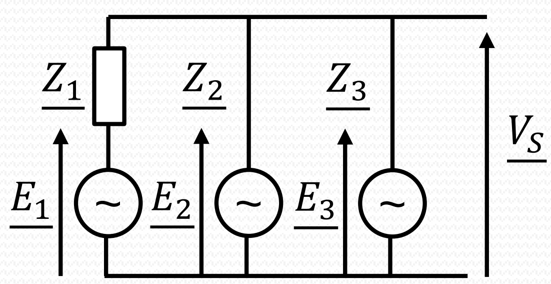
  - ✓ Théorème de superposition ⇨ idem !
  - ✓ Théorèmes de Thévenin et Norton (exemple) :

$$\underline{E_{Th}} = \frac{\underline{E_G}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} \; ; \; \underline{Z_{Th}} = \frac{\underline{Z_1}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

Ce qui permet de trouver $\underline{V_S} = \dfrac{\underline{E_{Th}}.\underline{Z_U}}{\underline{Z_{Th}}+\underline{Z_U}}$



  - ✓ Théorème de Millman :

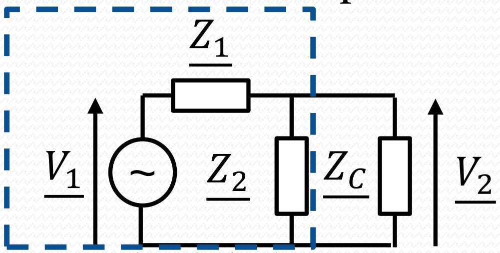


$$\underline{V_S} = \frac{\frac{\underline{E_1}}{\underline{Z_1}}+\frac{\underline{E_2}}{\underline{Z_2}}+\frac{\underline{E_3}}{\underline{Z_3}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}+\frac{1}{\underline{Z_3}}}$$

Exemples d'utilisation des complexes

- On cherche tension et phase à une fréquence donnée

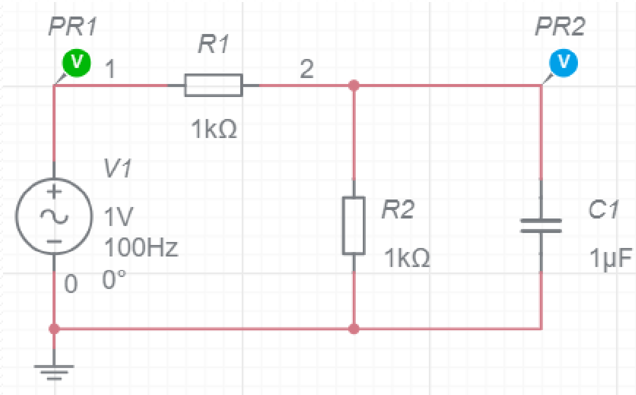
  - Calcul des impédances complexes



$\underline{Z_1} = \underline{Z_2} = 1000\ \Omega$

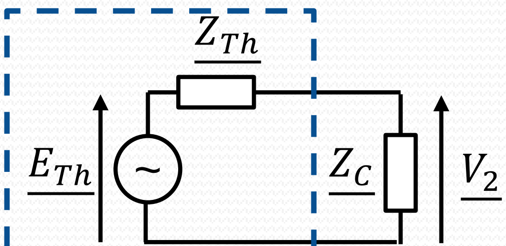
$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$

Dépend de f !



  - Calcul de la tension V2 :

En utilisant Thévenin par exemple



$$\underline{E_{Th}} = \frac{\underline{V_1}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\ ;\ \underline{Z_{Th}} = \frac{\underline{Z_1}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

$$\underline{E_{Th}} = \frac{\underline{V_1}}{2}\ ;\ \underline{Z_{Th}} = \frac{\underline{Z_1}}{2} = 500\ \Omega \Rightarrow \underline{V_2} = \frac{\underline{E_{Th}}.\underline{Z_C}}{\underline{Z_{Th}}+\underline{Z_C}}$$

Si f=100 Hz ⇨ $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{j10^{-6}.2.\pi.100} = \dfrac{1591}{j} = -j.1591\ \Omega$

V1 est la référence de tension donc $\underline{V_1} = 1$ (avec valeur max)

⇨ $\underline{V_2} = \dfrac{0{,}5.(-j.1591)}{500-j.1591} = \dfrac{-j.795{,}8}{500-j.1591} = \dfrac{-j.795{,}8.(500+j.1591)}{500^2+1591^2} = \dfrac{795{,}8x1591-j.795{,}8x500}{2783029}$

⇨ $\boldsymbol{\underline{V_2} = 0{,}455 - j.0{,}143 = [0{,}477\ V\ ;-17{,}44°]}$

- On cherche tension et phase à une fréquence donnée
  - Même montage, mais on cherche module et phase de V2 à 100 kHz

Si f=100 kHz ⇨ $\underline{Z_C} = \frac{1}{j10^{-6}.2.\pi.100.10^3} = \frac{1,591}{j} = -j.1,591\ \Omega$

V1 est la référence de tension donc $\underline{V_1} = 1$ (avec valeur max)

⇨ $\underline{V_2} = \frac{0,5.(-j.1,591)}{500-j.1,591} = \frac{-j.0,796}{500-j.1,591} = \frac{-j.0,796.(500+j.1,591)}{500^2+1,591^2} = \frac{0,796x1,591-j.0,796x500}{250002}$

⇨ $\boldsymbol{\underline{V_2} = 5,06.10^{-6} - j.1,59.10^{-3} = [1,59\ mV\ ; -89,82°]}$

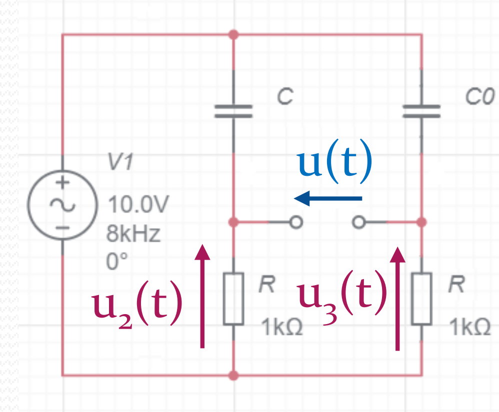
⇨ **Tension plus faible et déphasage proche de -90°**

Autre solution de calcul :

$\underline{V_2} = \frac{-j.0,796}{500-j.1,591} = \frac{[\mathbf{0,796;-90°}]}{[\mathbf{500,002;-0,182°}]} = \left[\frac{\mathbf{0,796}}{\mathbf{500,002}}\ ; \mathbf{-90° - (-0,182°)}\right] = [\mathbf{1,59\ mV\ ; -89,82°}]$

Exemples
Impédances
Représentation
Effets fréquence

Capteur de niveau de fluide



- Pour déterminer le niveau dans une cuve.
- Co est constant, C varie en fonction du niveau du fluide.
- Co=20nF, $\underline{V_1}$=[10V;0], f=8 kHz, R=1 kΩ

1. Déterminer $\underline{U}$ en fonction de C
2. Pour quelle valeur de C, U=0V ?
3. Que vaut $\underline{U}$ quand C=2.Co ?

- On flèche les tensions sur le montage
- On exprime $\underline{U}$ en fonction de $\underline{U}$2 et $\underline{U}$3 : $\underline{U} = \underline{U_2} - \underline{U_3}$
- On exprime $\underline{U}$2 et $\underline{U}$3 en fonction de C : $\underline{U_2} = \frac{\underline{V_1}.\underline{Z_R}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}$ et $\underline{U_3} = \frac{\underline{V_1}.\underline{Z_R}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_{C0}}}$
- On exprime les impédances : $\underline{Z_R} = R$; $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z_{C0}} = \frac{1}{jC0\omega}$
- On exprime $\underline{U}$: $\underline{U} = \frac{\underline{V_1}.R}{R+\frac{1}{jC\omega}} - \frac{\underline{V_1}.R}{R+\frac{1}{jC0\omega}} = \underline{V_1}.\left(\frac{R}{\frac{jRC\omega}{jC\omega}+\frac{1}{jC\omega}} - \frac{R}{\frac{jRC0\omega}{jC0\omega}+\frac{1}{jC0\omega}}\right)$

$\underline{U} = \underline{V_1}.\left(\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} - \frac{jRC0\omega}{1+jRC0\omega}\right)$; Si C=Co alors U=0V

- Si C=2.Co : $\underline{U} = \underline{V_1}.\left(\frac{j2RC0\omega}{1+j2RC0\omega} - \frac{jRC0\omega}{1+jRC0\omega}\right)$ avec $RC0\omega = 10^3.22.10^{-9}.2.\pi.8.10^3 = 1{,}106$

$\underline{U} = \underline{V_1}.\left(\frac{j2{,}212}{1+j2{,}212} - \frac{j1{,}106}{1+j1{,}106}\right) = \underline{V_1}.\left(\frac{j2{,}212(1-j2{,}212)}{1+2{,}212^2} - \frac{j1{,}106(1-j1{,}106)}{1+1{,}106^2}\right)$

$\underline{U} = \underline{V_1}.\big((0{,}375j + 0{,}830) - (0{,}497j + 0{,}550)\big) = \underline{V_1}.(0{,}280 - 0{,}122j) = \underline{V_1}.[0{,}305; 23{,}5°]$

$\underline{U} = [3{,}05V; 23{,}5°]$