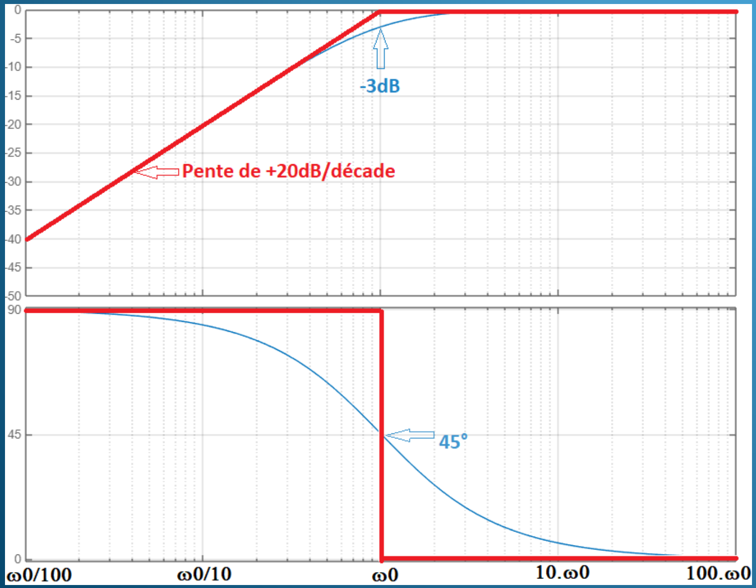
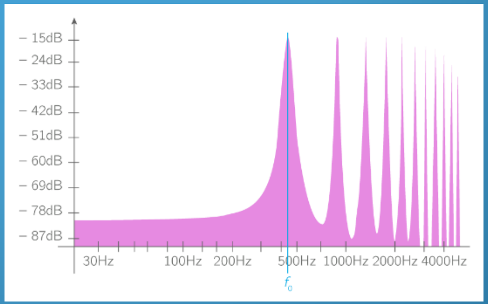
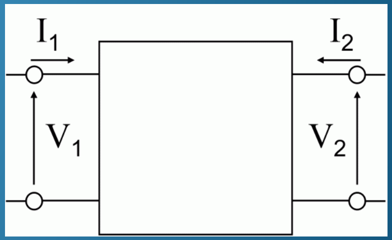
BUT 1 – Elen2 – Module R2-08

Filtrage en électronique

2. Représentation spectrale, Diagramme de Bode







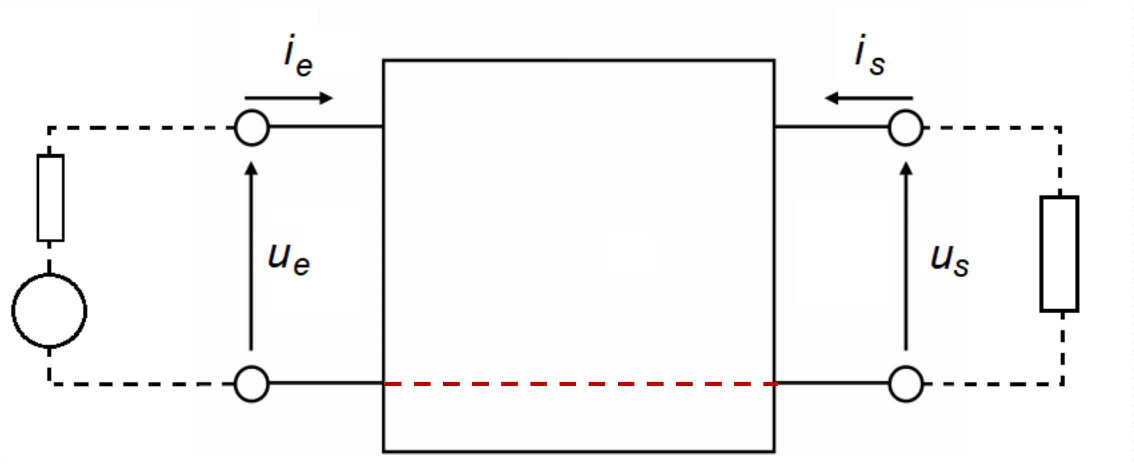
Jean-François LIEBAUT
IUT GEII, université de Toulon
: liebaut@univ-tln.fr

Plan du cours

- La notion de quadripôle
- Echelle logarithmique et dB
- Diagramme de Bode
  - Diagramme asymptotique
  - Diagramme réel
- Exemples

La notion de quadripôle

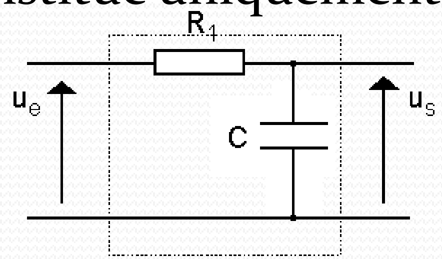
- Présentation
  - Jusqu'a maintenant on a étudié des dipôles (deux bornes)
  - Un quadripôle possède 4 bornes, 2 en entrée et 2 en sortie.
  - Il est caractérisé par 4 grandeurs :
    - ✓ 2 en entrée : u_e et i_e
    - ✓ 2 en sortie : u_s et i_s



- *Remarque 1 : Par convention les courants sont notés entrant dans le quadripôle.*
- *Remarque 2 : Souvent, une borne d'entrée et de sortie est commune (référence)*

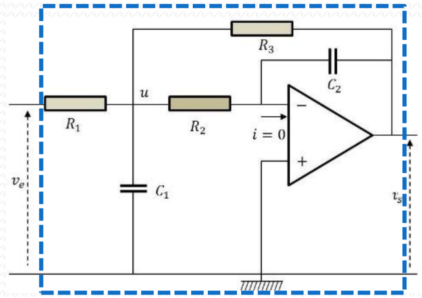
- Quadripôle actif et quadripôle passif
  - Quadripôle passif : constitué uniquement de dipôles passifs

Exemple : circuit R-C



  - Quadripôle actif : contient au moins un dipôle actif (alimentation)

Exemple : montage AOP



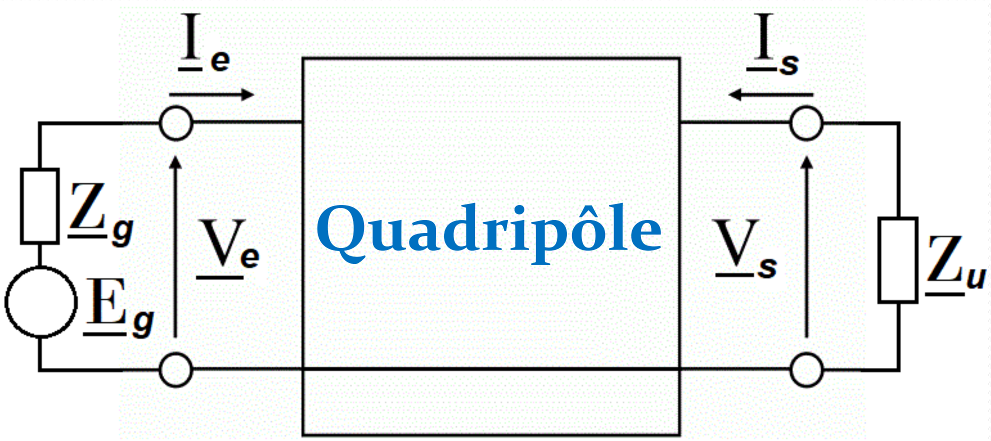
- Quadripôle linéaire et quadripôle non linéaire
  - Entrée sinusoïdale : $u_e(t) = U_{Emax} \, . \sin(\omega t)$
  - Si toutes les grandeurs externes sont sinusoïdales ⇨ **Linéaire**
  - Si une des grandeurs externes n'est pas sinusoïdale ⇨ **Non linéaire**

Exemple diode + résistance ⇨ sortie redressée (non sinus) ⇨ Non linéaire

Quadripôle linéaire

Notation complexe

Pour l'étude en régime harmonique (sinusoïdal) on utilisera la notation complexe.



Amplification et gain en puissance

- **L'amplification en puissance est définie par :**

$$A_P = \frac{\textit{Puissance active fournie à la charge}}{\textit{Puissance active absorbée par le quadripôle}} = \frac{P_s}{P_e}$$

- **Le gain en puissance est définie par :** $G_P = 10.\log(A_P)$

Le gain s'exprime en décibels (dB)

Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

Quadripôle linéaire (suite)

Amplification et gain en puissance (suite)

Le tableau suivant montre le changement d'échelle entre l'amplification et le gain.

A_P	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
$G_P(dB)$	-30	-20	-10	0	+10	+20	+30

On peut placer sur une même échelle des valeurs petites (0,001) et des valeurs grandes (1000).

Amplification et gain en tension

- **L'amplification en tension est définie par :**

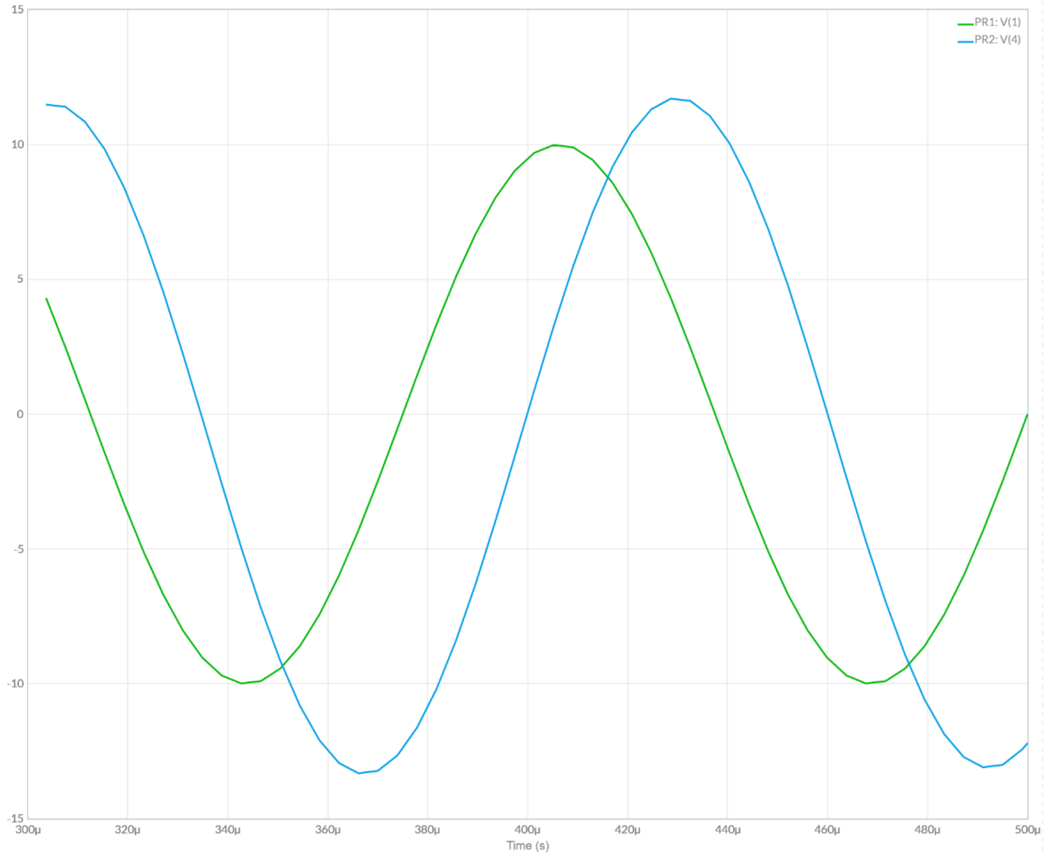
$$\underline{A_V} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = [A_V; \varphi_V]$$ **C'est un complexe !**

Remarque : φ_V représente le déphasage de $\underline{V_s}$ par rapport à $\underline{V_e}$

- **Le gain en tension est définie par : $G_V = 20.log(A_V)$**

Remarques : Le gain toujours en décibels, attention **x 20** pour les tensions

- Exemple
  - ✓ $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$
  - ✓ $\underline{V_e} = [10V; 0°]$
  - ✓ $\underline{V_s} = [12V; -72°]$



  - ✓ On calcul $\underline{A_V}$:

$$\underline{A_V} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{[12V;-72°]}{[10V;0°]}$$

$$\underline{A_V} = [1,2; -72°]$$

  - ✓ On calcul G_V :

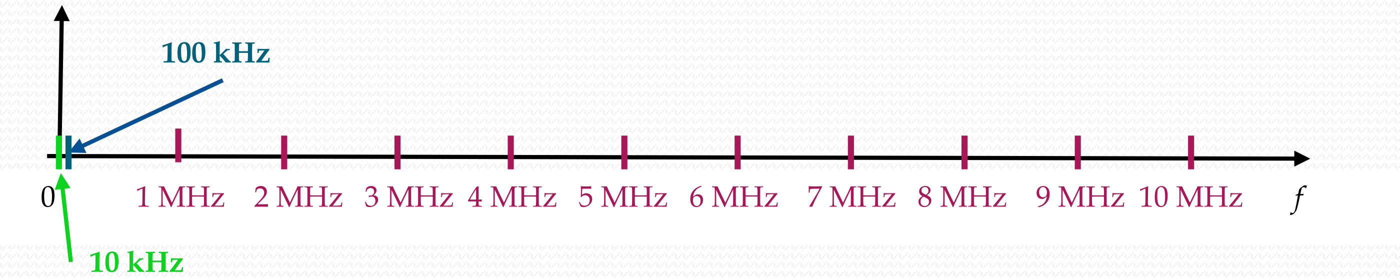
$$G_V = 20.\log(A_V) = 20.\log(1{,}2)$$

$$G_V = 1,58\ dB$$

Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

Echelle logarithmique (ou semi)

- Echelle de fréquence ou pulsation
  - Comme vu au cours 1, le comportement d'un circuit électrique linéaire varie avec la fréquence.
  - Souvent on veut connaitre le comportement sur une large plage de fréquence.
  - Exemple : de 1 Hz à 10 MHz



⇨ Les fréquences entre 0Hz et quelques dizaines de kHz sont quasi confondues.

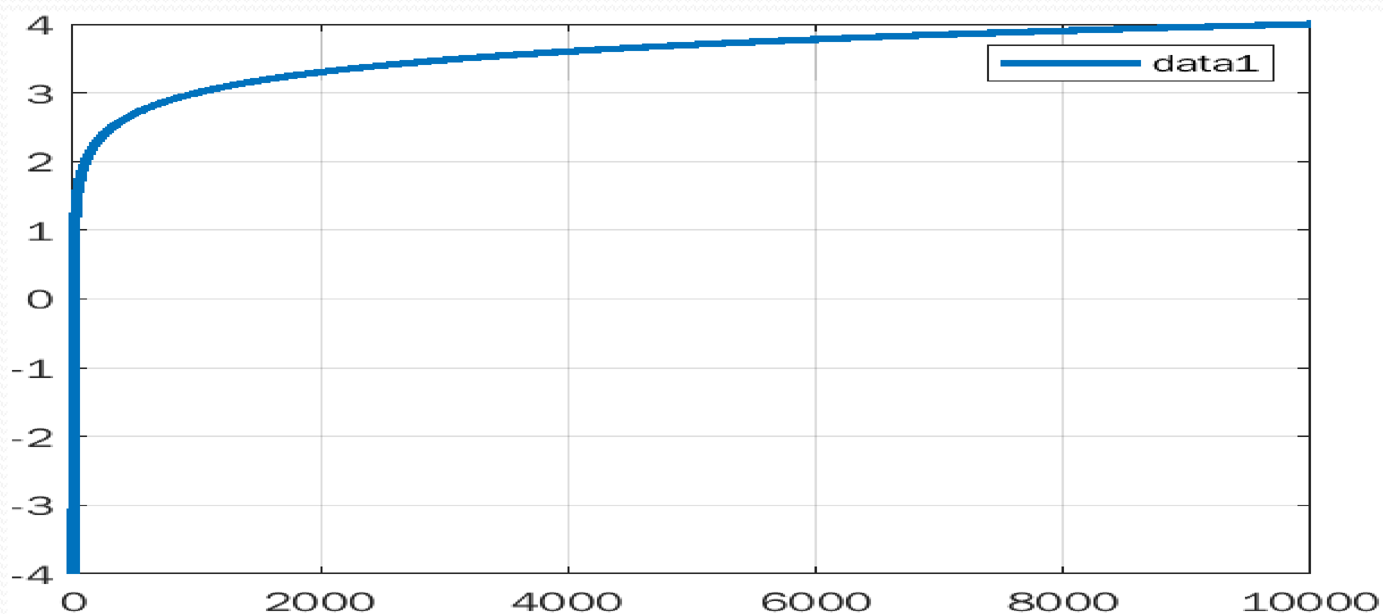
⇨ La plage 1 Hz – 100 kHz n'est pas exploitable dans cet exemple

⇨ Il faut « dilater » les fréquences faibles

La fonction logarithme décimale

- On définit la fonction logarithme décimal comme la fonction réciproque de la fonction : $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{x}}$
- $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{x}} \Leftrightarrow \mathbf{y} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{log_{10}}(\boldsymbol{y})$
- Exemple de valeurs

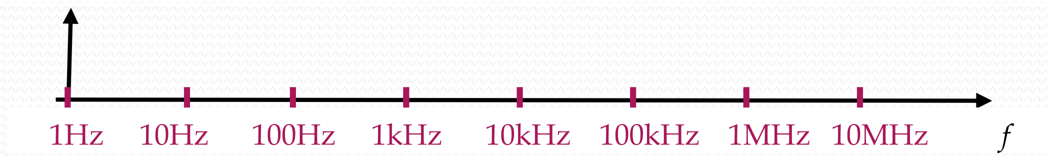
x	1/10000	1/1000	1/100	1/10	1	10	100	1000	10000
x	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
$\log_{10}(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4



Logarithme décimale de la fréquence

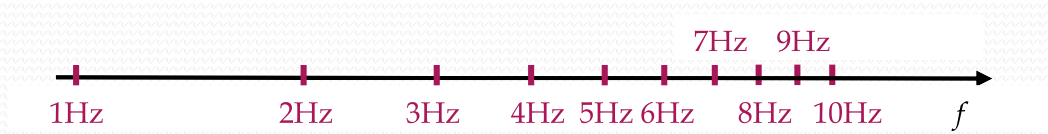
- Sur l'axe horizontal on représente les fréquences par une échelle logarithmique
- $\mathbf{x} \rightarrow y = 10^{x} \Leftrightarrow \mathbf{y} \rightarrow x = log_{10}(y)$
- Exemple de valeurs

f (Hz)	1	10	100	1k	10k	100k	1M	10M
$\log_{10}(f)$	0	1	2	3	4	5	6	7

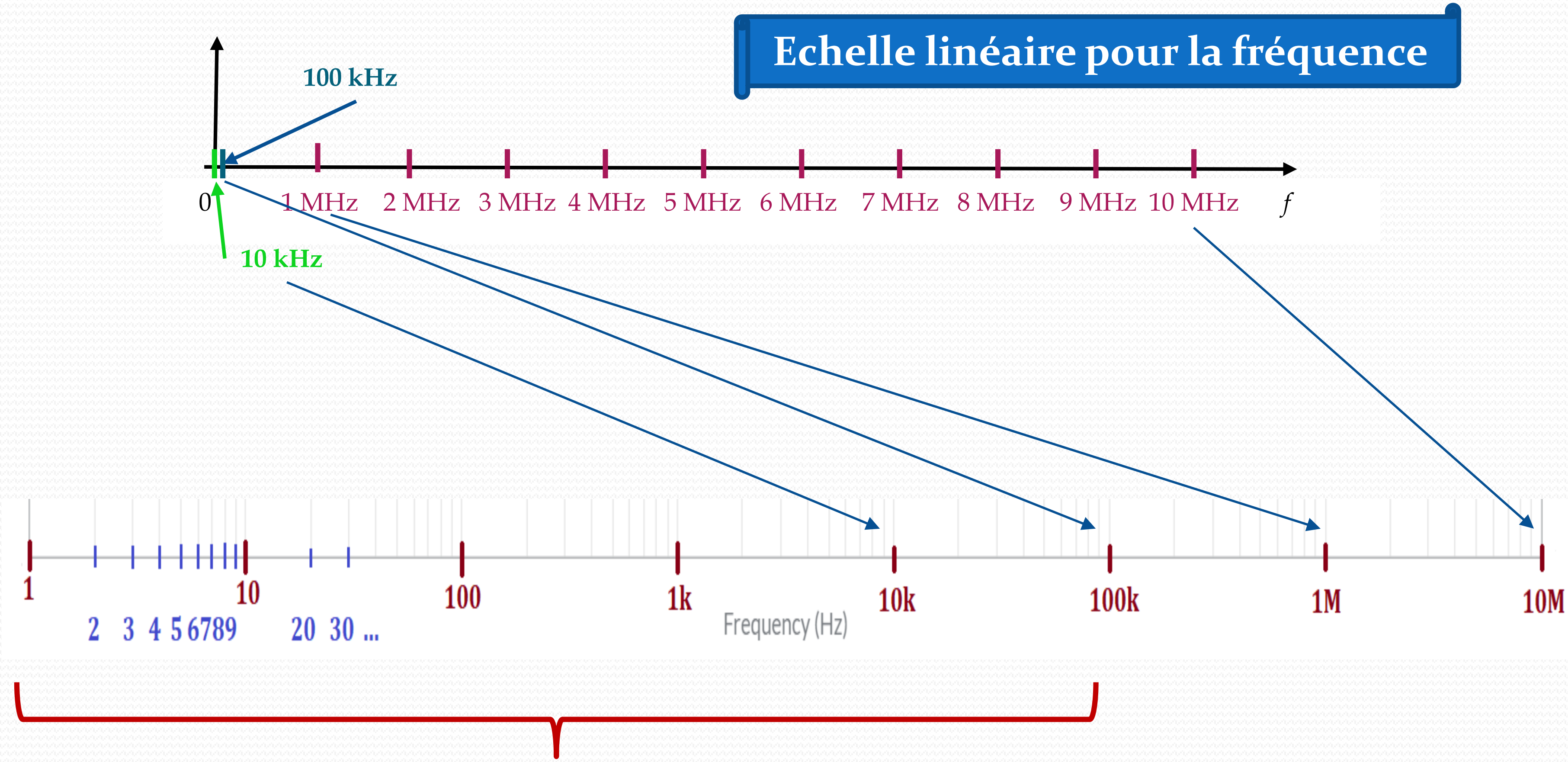


- Si on regarde entre chaque décade (de 1Hz à 10Hz par exemple)

f (Hz)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}(f)$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1



- Appliqué à l'exemple 1Hz 10MHz

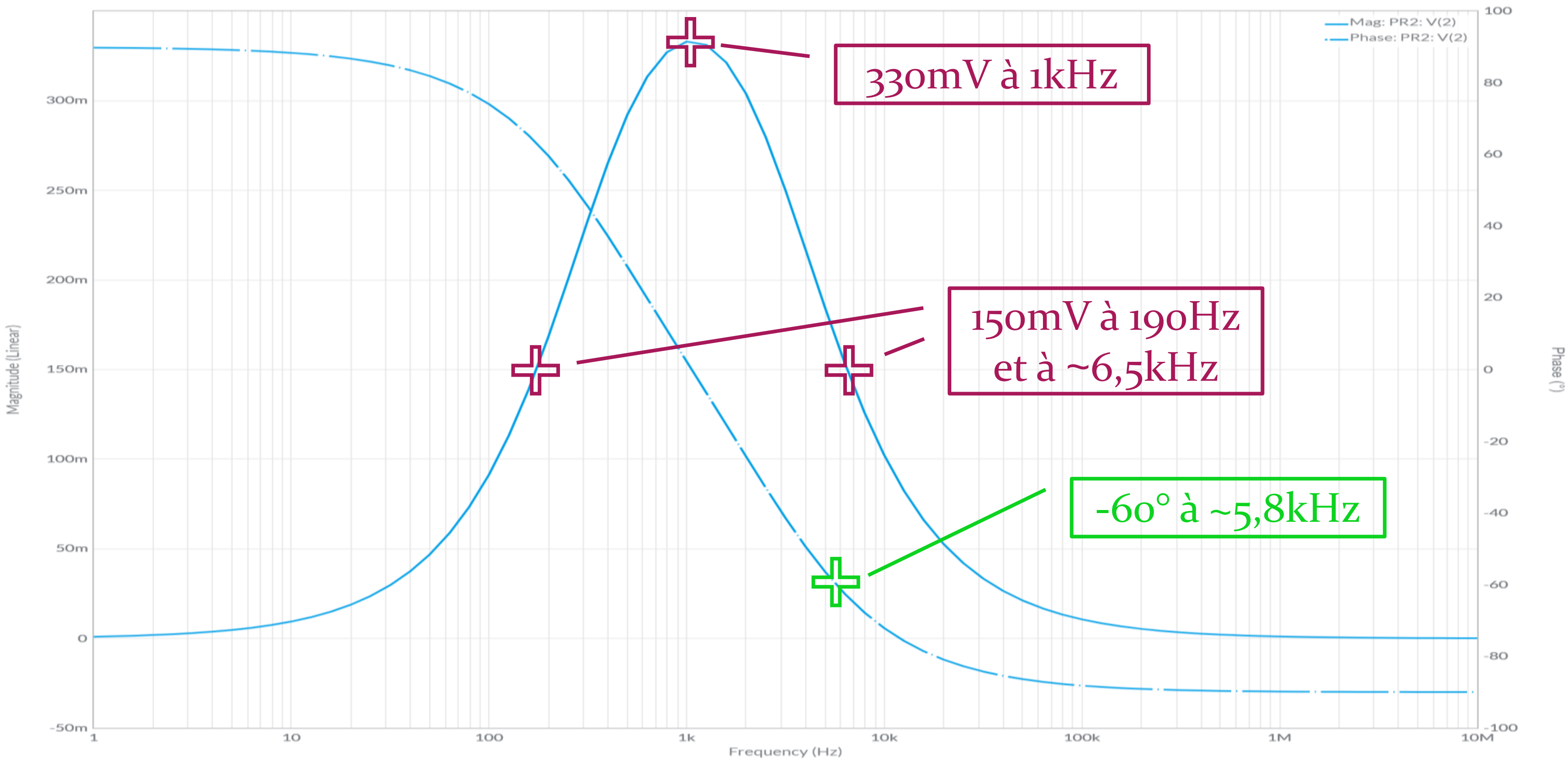


On fait « apparaitre toute la zone « cachée »

Echelle logarithmique pour la fréquence

- Exemple d'utilisation d'une représentation **semi-logarithmique**

On observe module et phase d'une tension de sortie d'un quadripôle en fonction de la fréquence (entre 10Hz et 10MHz)

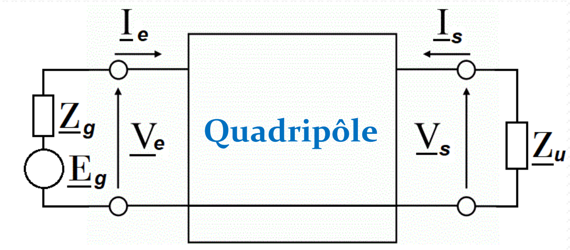


Echelle logarithmique pour les fréquences et échelle linéaire pour l'amplitude et la phase.

Diagramme de Bode

- Comportement fréquentiel d'un quadripôle

➤ Fonction de transfert d'un quadripôle :



La fonction de transfert d'un quadripôle est la relation qui relie la tension de sortie complexe à la tension d'entrée. C'est donc aussi un nombre complexe : $\underline{V_s} = \underline{H} \cdot \underline{V_e}$

On défini la fonction de transfert complexe d'un quadripôle : $\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{\underline{\boldsymbol{V_s}}}{\underline{\boldsymbol{V_e}}}$

➤ Etude du comportement en fréquence du quadripôle ⇔ étude en fréquence de $\underline{H}$ (module et phase).

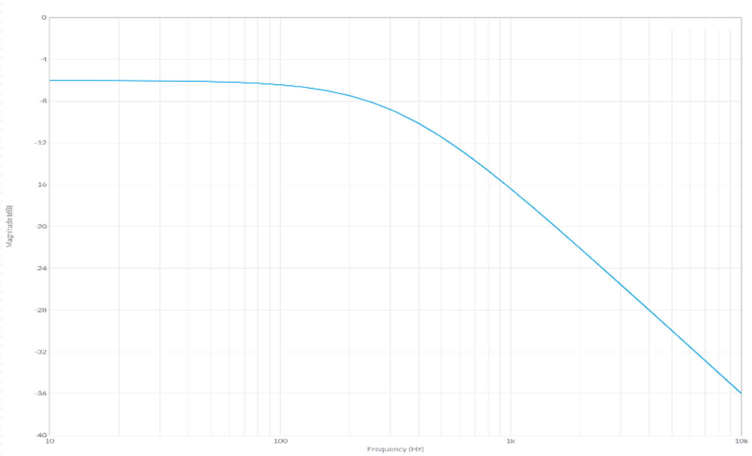
➤ On cherche à connaitre $|\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega})|$ et $\mathbf{arg}(\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}))$

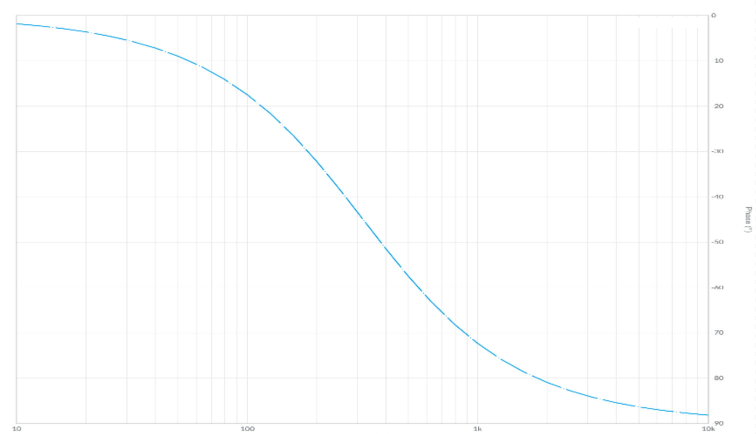
➤ Problème : difficile de représenter une large échelle de fréquence ⇨ utilisation d'une échelle logarithmique pour la fréquence.

Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

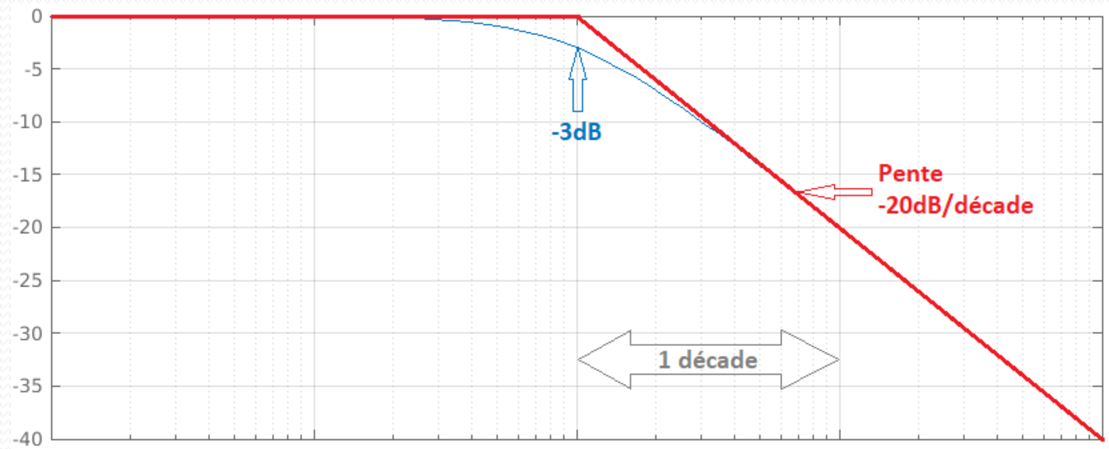
- Hendrik Wade Bode
  - Ingénieur chercheur chez Bell Labs (1905-1982)
  - Propose l'utilisation de deux tracés pour l'étude de la fonction de transfert :
    - ✓ Le gain (en dB) en fonction de la fréquence (ou pulsation)
    - ✓ La phase en fonction de la fréquence (ou pulsation)
    - ✓ Les fréquences (ou les pulsations) sont représentés sur une échelle logarithmique

Diagramme de Bode $\Leftrightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20.\,log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) \\ \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) \end{cases}$

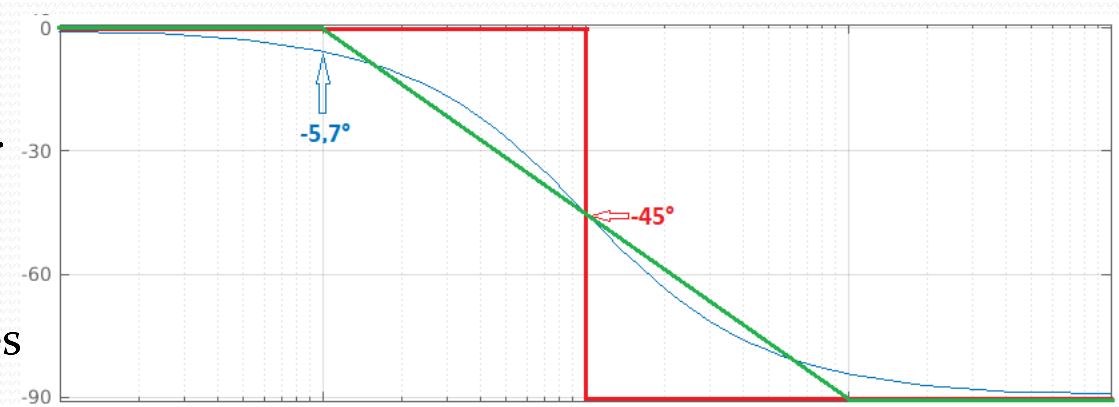




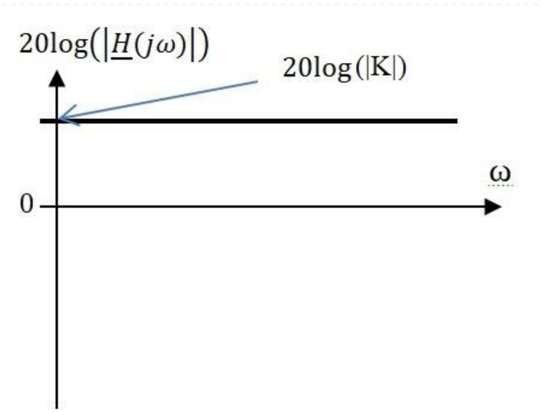
- Diagramme de Bode asymptotique
  - Sur le diagramme de Bode **réel**, on remarque des zones proche de droites
  - Tracé des droites :
    - ✓ Sur le gain :
      - Deux demi droites dans cet exemple.
      - Ecart faible.

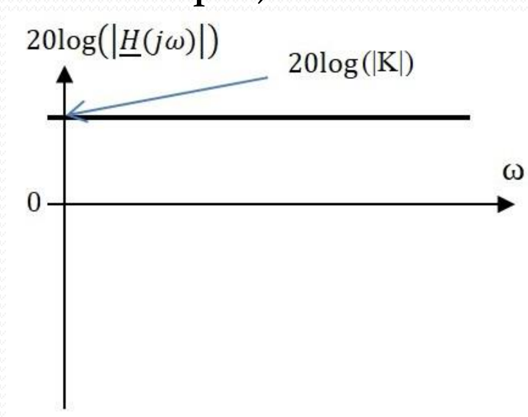


    - ✓ Sur la phase :
      - Soit deux demi droites dans cet exemple. Ecarts importants.
      - Soit trois segments de droites, écarts + faibles

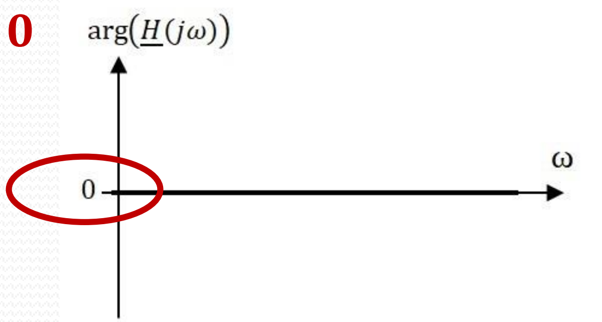


- Tracés des fonctions élémentaires du premier ordre
  - $\boxed{\underline{H}(j\omega) = K}$
    - ✓ $\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20.log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log(K) \\ \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \left| \begin{array}{l} 0\ (si\ K > 0) \\ \pm\pi\ (si\ K < 0) \end{array} \right. \end{cases}$
    - ✓ Diagramme de Bode asymptotique (Bode réel identique)

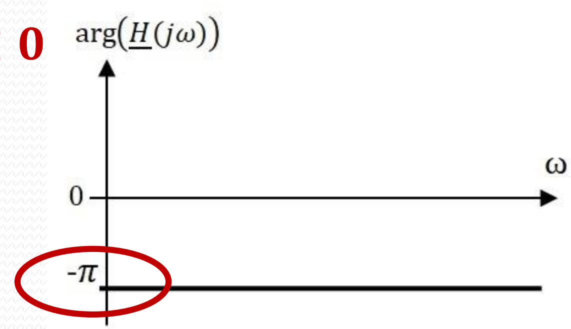




$K > 0$



$K < 0$



Exemples

Diag. Bode

Echelle log

Quadripôle

➤ $\boxed{\underline{H}(j\omega) = j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

✓ $$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20.\,log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

✓ Diagramme de Bode asymptotique (Bode réel identique)

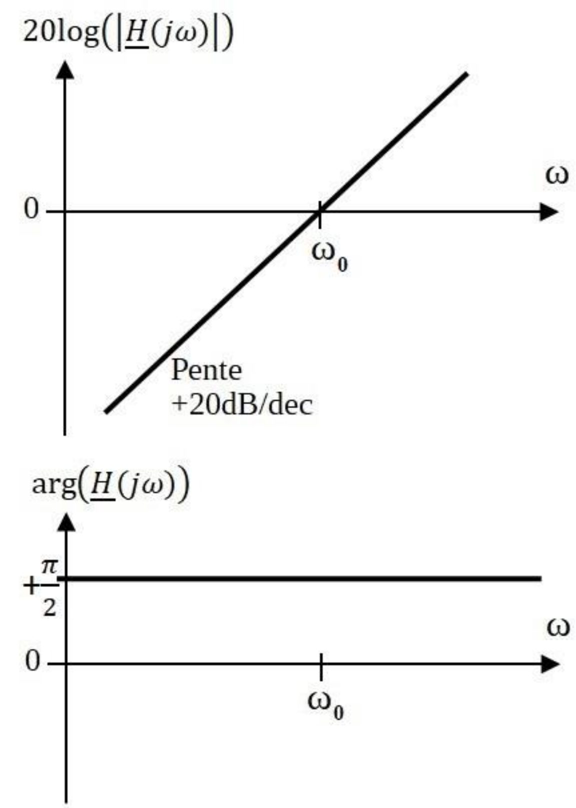
$G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20\log(\omega)$-20 $\log(\omega_0)$

L'échelle horizontale (pulsation) étant logarithmique, la variation en « x » correspond à $\log(\omega)$ et celle en « y » en 20.x-c[te] ⇨ **droite**

$$G_{dB}(\omega = \omega_0) = 20\log\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = 20\log(1) = 0$$

$$G_{dB}(\omega = 10.\omega_0) = 20\log\left(\frac{10{,}\omega_0}{\omega_0}\right) = 20\log(10) = 20\ dB$$

⇨ **Droite de pente +20dB par décade.**



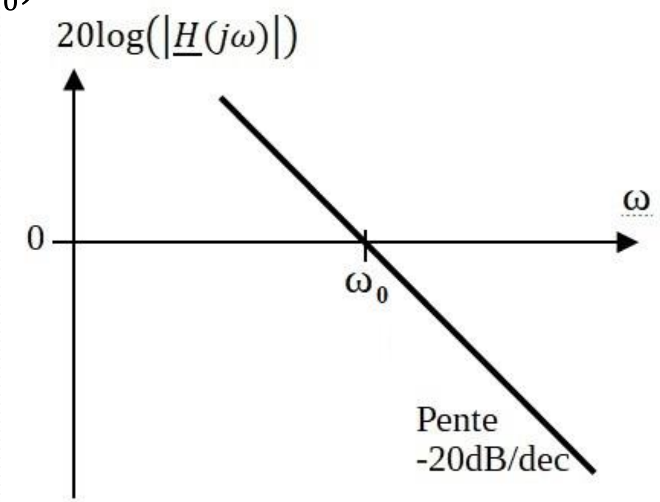
- $$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

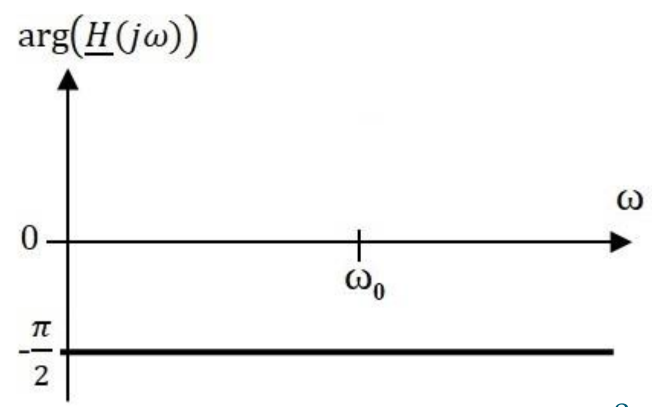
  - $$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20.log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

  - Diagramme de Bode asymptotique (Bode réel identique)

$$G_{dB}(\omega) = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= -20\log(\omega) + 20\log(\omega_0)$$

⇨ **Droite de pente -20dB par décade.**





- $$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$ (1/3)

✓ $$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20.log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = -20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \\ \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

✓ Diagramme de Bode asymptotique

Il faut regarder si la partie réelle est grande ou non devant la partie imaginaire. Soit si 1 est grand devant $\frac{\omega}{\omega_0}$. ⇨ Si $\omega \gg \omega_0$.

- Si $\omega_0 \gg \omega$, on néglige la partie imaginaire pour l'asymptote $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{1}$

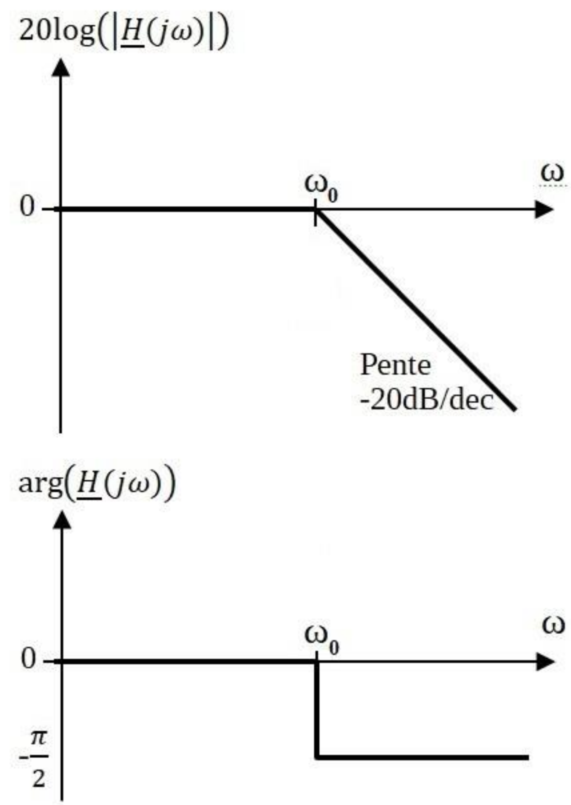
  Asymptote avant ω_0 : $G_{dB}(\omega)$ =0 et $\varphi(\omega)$ =0

- Si $\omega \gg \omega_0$, on néglige la partie réelle pour l'asymptote $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

  Asymptote après ω_0 : $G_{dB}(\omega) = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ et $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

- $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$ (2/3)



- ✓ Diagramme de Bode asymptotique (suite)
- ✓ Diagramme de Bode réel
  - Si $\omega = \omega_0$, $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{1}{1+j}$

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = -20\log\left(\sqrt{1+1}\right) = -3dB \\ \varphi(\omega_0) = -arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

  - Si$\omega = 10.\omega_0$, $\underline{H}(j.10.\omega_0) = \frac{1}{1+10.j}$

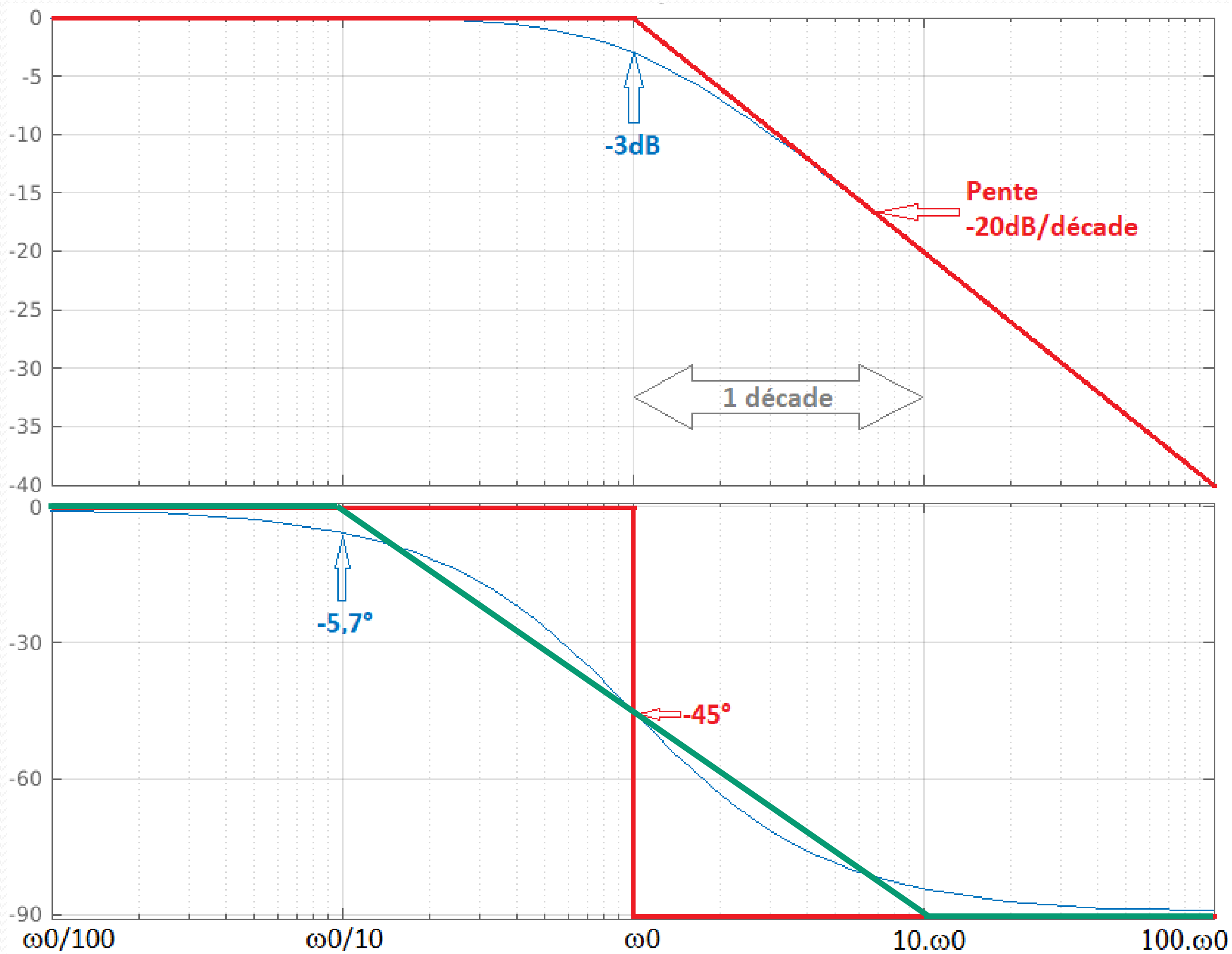
$$\begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = -20\log\left(\sqrt{1+10^2}\right) = -20{,}04dB \\ \varphi(\omega_0) = -arctan(10) = -1{,}47\ rad\ (-84{,}29°) \end{cases}$$

  - Si$\omega = 0{,}1.\omega_0$, $\underline{H}\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = \frac{1}{1+\frac{j}{10}}$

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = -20\log\left(\sqrt{1+10^{-2}}\right) = -0{,}04dB \\ \varphi(\omega_0) = -arctan(0{,}1) = -0{,}10\ rad\ (-5{,}7°) \end{cases}$$

➢ $$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$ (3/3)

✓ Diagramme de Bode réel (suite)



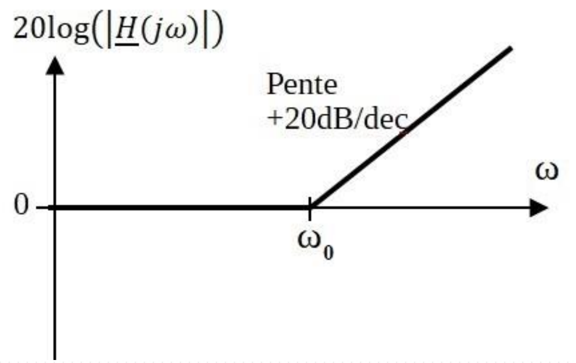
Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

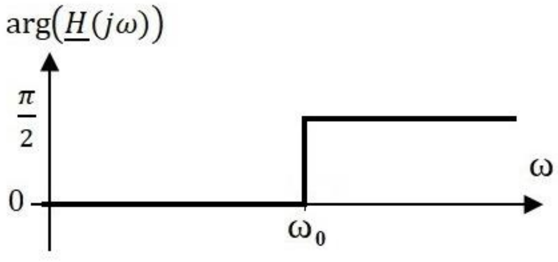
➢ $\boxed{\underline{H}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Remarque : Propriétés du log et des complexes, si $\underline{H_2}(j\omega) = \dfrac{1}{\underline{H_1}(j\omega)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{2\,dB}(\omega) = 20\log\left(\left|\dfrac{1}{\underline{H_1}(j\omega)}\right|\right) = -20\log\left(\left|\underline{H_1}(j\omega)\right|\right) = -G_{1\,dB}(\omega) \\ \arg\left(\underline{H_2}(j\omega)\right) = -\arg\left(\underline{H_1}(j\omega)\right) \end{cases}$$

✓ Diagramme de Bode asymptotique





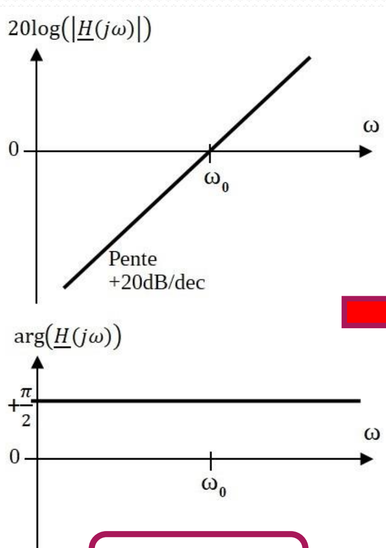
✓ Diagramme de Bode réel : même différences que précédemment.

➢ $$\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

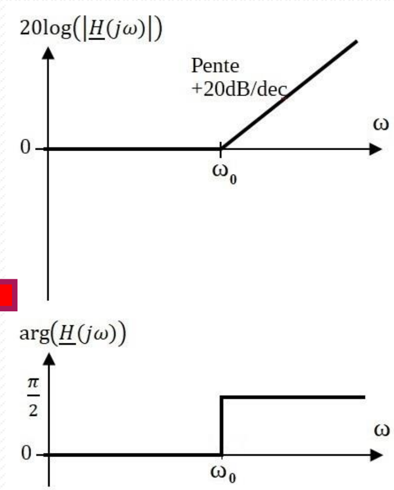
Remarque : Propriétés du log et des complexes, si $\underline{H_3}(j\omega) = \frac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{3\,dB}(\omega) = 20\log\left(\left|\underline{H_1}(j\omega)\right|\right) - 20log\left(\left|\underline{H_2}(j\omega)\right|\right) = G_{1\,dB}(\omega) - G_{2\,dB}(\omega) \\ \arg\left(\underline{H_3}(j\omega)\right) = \arg\left(\underline{H_1}(j\omega)\right) - \arg\left(\underline{H_2}(j\omega)\right) \end{cases}$$

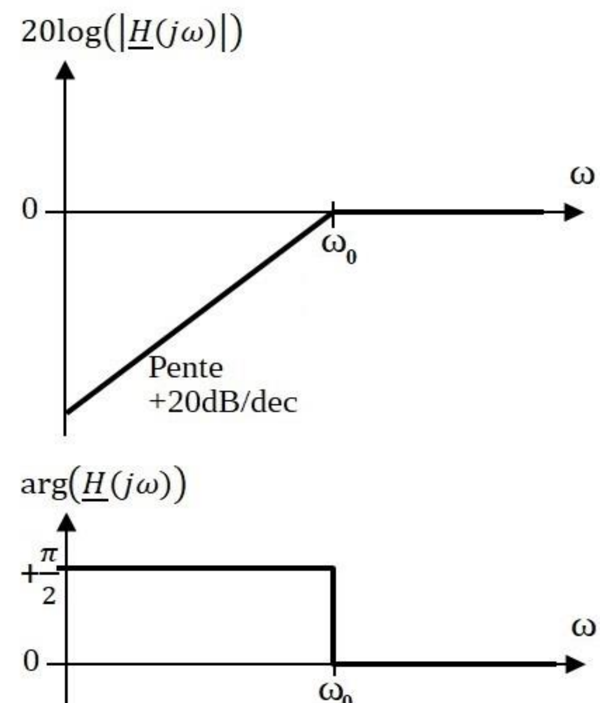
✓ Diagramme de Bode asymptotique



$\boldsymbol{\underline{H_1}(j\omega)}$



$\boldsymbol{\underline{H_2}(j\omega)}$



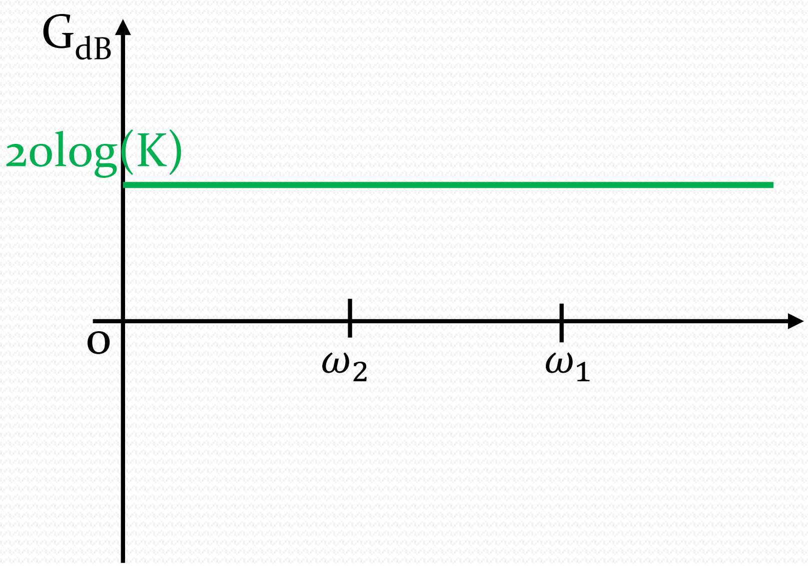
$\boldsymbol{\underline{H}(j\omega)}$

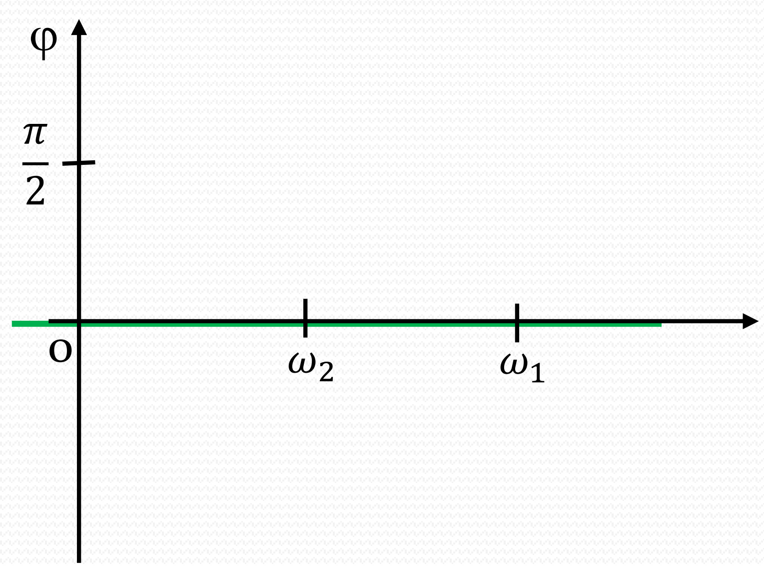
Exemples de diagrammes de Bode

- On cherche le diagramme de Bode asymptotique

  - $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{K}.\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec K>0 et $\omega_1 > \omega_2$
  - $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_0}(j\omega).\frac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$ avec $\underline{H_0}(j\omega) = K$; $\underline{H_1}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et

    $\underline{H_2}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$. Donc $G(j\omega) = G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$-$G_2(j\omega)$

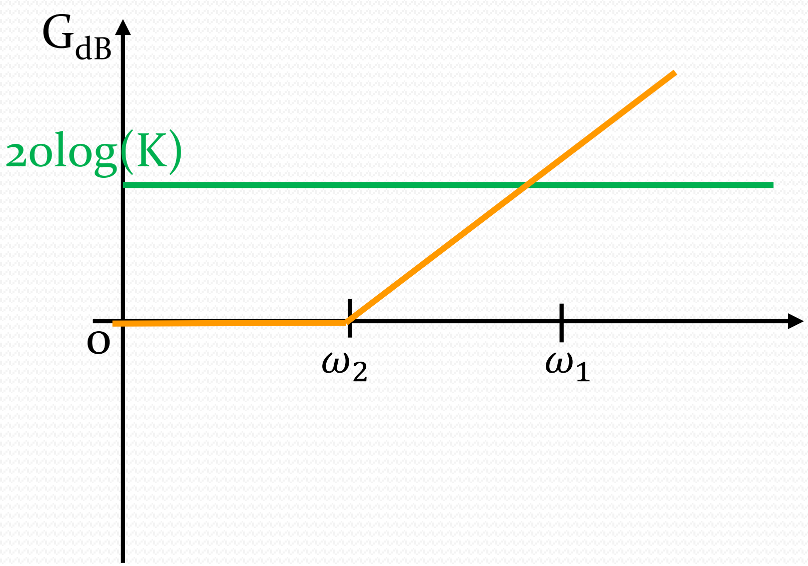


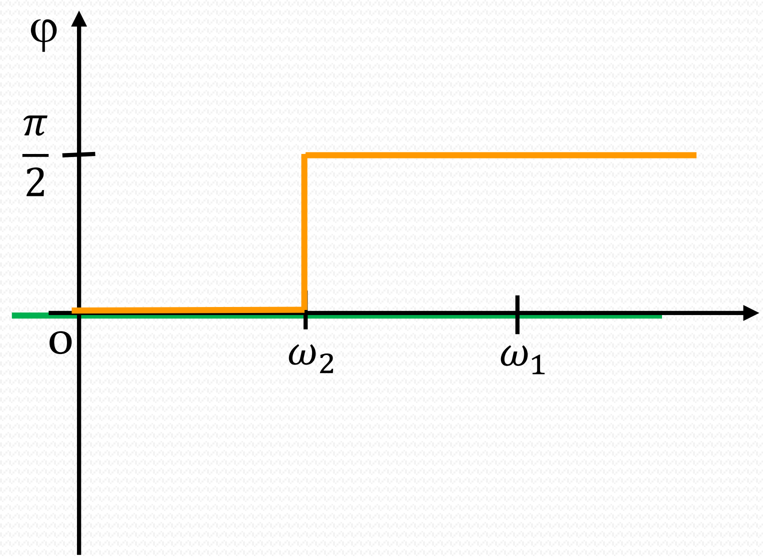


Exemples de diagrammes de Bode

- On cherche le diagramme de Bode asymptotique
  - $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{K}.\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_1}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_2}}}$ avec K>0 et $\omega_1 > \omega_2$
  - $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_0}(j\omega).\frac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$ avec $\underline{H_0}(j\omega) = K$; $\underline{H_1}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et

    $\underline{H_2}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$. Donc $G(j\omega) = G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$-$G_2(j\omega)$





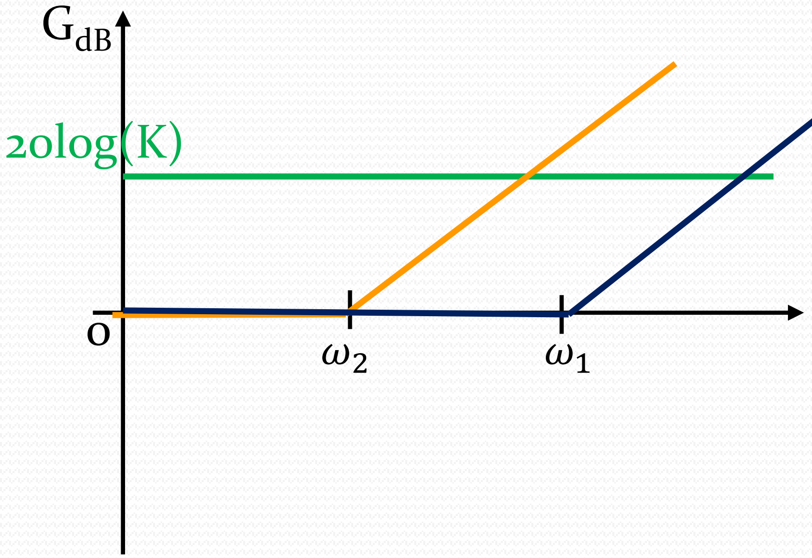
Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

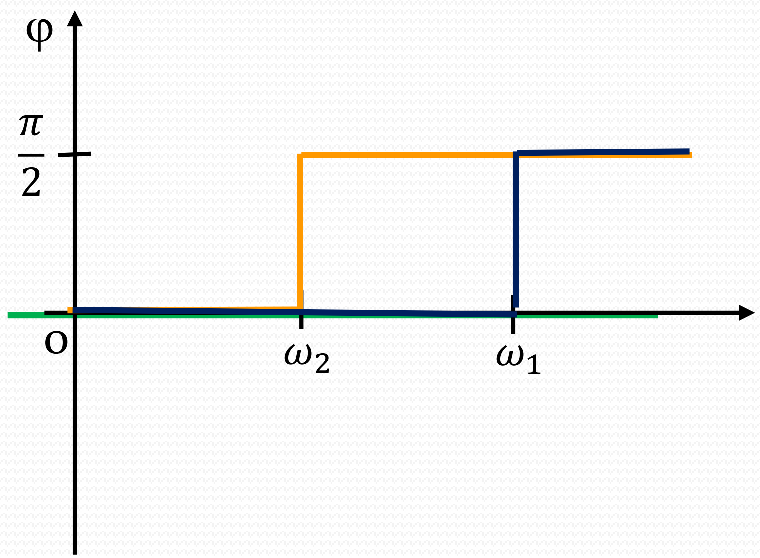
Exemples de diagrammes de Bode

- On cherche le diagramme de Bode asymptotique

  - $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{K}.\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec K>0 et $\omega_1 > \omega_2$

  - $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_0}(j\omega).\frac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$ avec $\underline{H_0}(j\omega) = K$; $\underline{H_1}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_2}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$. Donc $G(j\omega) = G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$-$G_2(j\omega)$





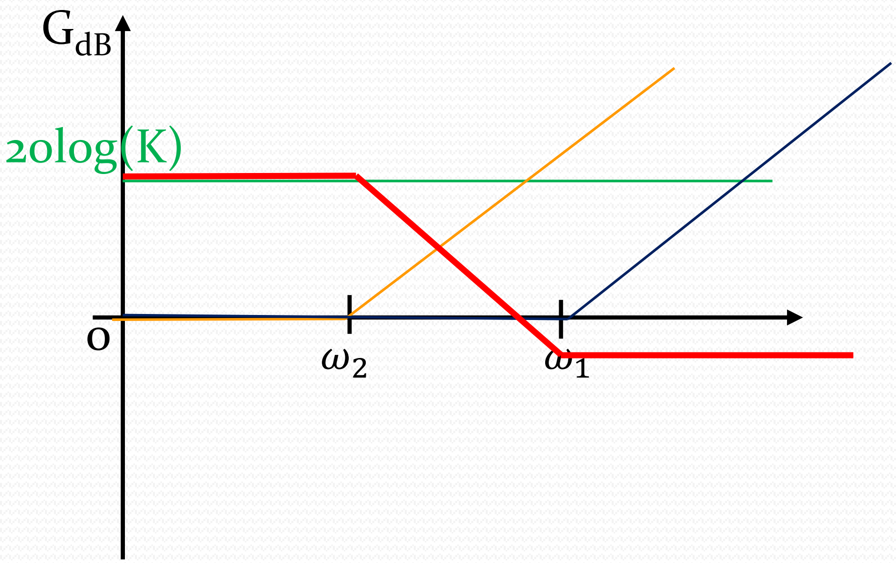
Exemples
Diag. Bode
Echelle log
Quadripôle

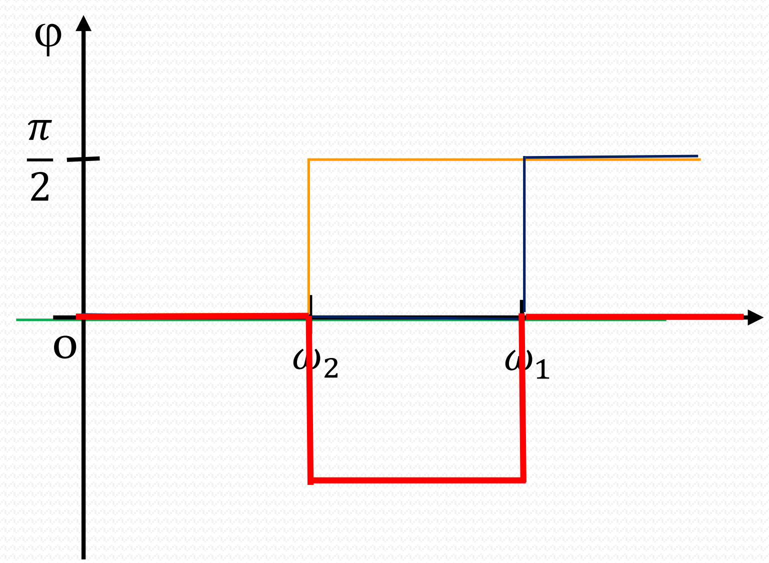
Exemples de diagrammes de Bode

- On cherche le diagramme de Bode asymptotique

  - $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{K}.\dfrac{\mathbf{1}+\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_1}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_2}}}$ avec K>o et $\omega_1 > \omega_2$

  - $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_0}(j\omega).\dfrac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$ avec $\underline{H_0}(j\omega) = K$; $\underline{H_1}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_2}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}$. Donc $G(j\omega) = G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$-$G_2(j\omega)$





Exemples de diagrammes de Bode

- On cherche le diagramme de Bode asymptotique

  - $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \boldsymbol{K}.\dfrac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec K>0 et $\omega_1 > \omega_2$
  - $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_0}(j\omega).\dfrac{\underline{H_1}(j\omega)}{\underline{H_2}(j\omega)}$ avec $\underline{H_0}(j\omega) = K$; $\underline{H_1}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}$ et

    $\underline{H_2}(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}$. Donc $G(j\omega) = G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$-$G_2(j\omega)$